①

α) Σ: καθώς $\left|\frac{\sin x}{x}\right|^2 \leq \frac{1}{x^2}$ συγκλίνει αρκετά γρήγορα στο άπειρο. Επίσης $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, οπότε είναι παντού πεπερασμένη. Άρα είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη.

β) Λ: αν P_1, P_2 προβολικοί τελεστές, $(P_1+P_2)^2 = P_1^2+P_2^2+P_1P_2+P_2P_1 = P_1+P_2+P_1P_2+P_2P_1 \neq P_1+P_2$

γ) Λ: $x^5+1=0 \to x=-1$, οπότε $\delta(x^5+1) = \frac{\delta(x+1)}{5x^4} = \frac{\delta(x+1)}{5(-1)^4} = \frac{1}{5}\delta(x+1)$

δ) Σ: η μήτρα πυκνότητας ρ καθαρής κατάστασης γράφεται ως $|\psi\rangle\langle\psi|$ που είναι προβολικός τελεστής

ε) Λ: καθώς έχει ημιακέραιο σπιν, η περιστροφή κατά 2π αντιστοιχεί σε $|\psi\rangle \to -|\psi\rangle$.

στ) Λ: ο χώρος Χίλμπερτ είναι $L^2(\mathbb{R}^3)\otimes C^{2s+1}$ που είναι απειροδιάστατος.

ζ) Λ: η γωνία παίρνει τιμές που κατανέμονται πιθανοκρατικά, και η κατανομή των πιθανοτήτων μένει σταθερή στο χρόνο.

η) Σ: το ${}^{6}_{3}Li^{++}$ αποτελείται από $3p+3n+1e = 7$ φερμιόνια, περιττό αριθμό, άρα είναι φερμιόνιο.

θ) Λ: αν το e είχε σπιν $\frac{3}{2}$ θα είχαμε 4 e σε κάθε τροχιακό, άρα θα γέμιζαν πιο αργά τα τροχιακά, άρα η εξώτερη στιβάδα θα αντιστοιχούσε σε μικρότερες τιμές του n, άρα τα άτομα θα ήταν μικρότερα.

ι) Λ: αφού η 3d είναι πριν από την 4p στη σειρά κατάληψης φλοιών, $E_{3,2} < E_{4,1}$

---

②

α) $\hat{p}\hat{x}^5 = \hat{x}^5\hat{p} + [\hat{p},\hat{x}^5] = \hat{x}^5\hat{p} - 5i\hat{x}^4$, άρα $\langle x|\hat{p}\hat{x}^5|k\rangle = \langle x|\hat{x}^5\hat{p}|k\rangle - 5i\langle x|\hat{x}^4|k\rangle$
$= kx^5\langle x|k\rangle - 5ix^4\langle x|k\rangle = (kx^5-5ix^4)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}$

β) η $|\psi\rangle$ αντιστοιχεί στο διάνυσμα $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1-i\\1\end{pmatrix}$, οπότε

$r_1 = \langle\psi|\hat{\sigma}_1|\psi\rangle = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1+i & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-i\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1+i & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1-i\end{pmatrix} = \frac{1}{3}(1+i+1-i) = \frac{2}{3}$

$r_2 = \langle\psi|\hat{\sigma}_2|\psi\rangle = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1+i & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-i\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1+i & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-i\\1+i\end{pmatrix} = \frac{1}{3}(-i+1+1+i) = \frac{2}{3}$

$r_3 = \langle\psi|\hat{\sigma}_3|\psi\rangle = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1+i & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-i\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1+i & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-i\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}(2-1) = \frac{1}{3}$

άρα $\vec{r} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

γ) Τα δύο πρώτα έχουν δυνατές τιμές j_{12}, $\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right| \leq j_{12} \leq \frac{1}{2}+\frac{1}{2} \to 0 \leq j_{12} \leq 1$, άρα $j_{12}=0,1$

για $j_{12}=0$ έχουμε

$$|j_3-j_{12}| \leq j_{ολ} \leq j_3+j_{12} \to \frac{3}{2} \leq j_{ολ} \leq \frac{3}{2} \to j_{ολ}=\frac{3}{2}$$

για $j_{12}=1$

$$|j_3-j_{12}| \leq j_{ολ} \leq j_3+j_{12} \to \frac{1}{2} \leq j_{ολ} \leq \frac{5}{2} \to j_{ολ}=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$$

Άρα οι δυνατές τιμές του $j_{ολ}$ είναι $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$

ε) Δεδομένου ότι ~~το καταστατικό διάνυσμα~~ η ενέργεια εξαρτάται μόνο από τους μεταφορικούς βαθμούς ελευθερίας, η κατάσταση ελάχιστης ενέργειας είναι $|0\rangle \otimes |0\rangle$ ως προς αυτούς. Αφού το συνολικό καταστατικό διάνυσμα είναι αντισυμμετρικό, πρέπει το κομμάτι που αφορά το σπιν να είναι αντισυμμετρικό, άρα να αντιστοιχεί σε $s=0$.
Το συνολικό καταστατικό διάνυσμα είναι

$$\underbrace{|0\rangle \otimes |0\rangle}_{\text{μεταφορικοί βαθμοί ελ.}} \otimes \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right\rangle \otimes \left|\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\right\rangle - \left|\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\right\rangle \otimes \left|\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right\rangle\right)}_{\text{σπιν}}$$

δ)

θεμελιώδης	$\|0,1,2\rangle$	$g=1$
2η	$\|0,1,3\rangle$	$g=1$
3η	$\|0,1,4\rangle$ $\|0,2,3\rangle$	$g=2$
4η	$\|0,1,5\rangle$ $\|0,2,4\rangle$ $\|1,2,3\rangle$	$g=3$
5η	$\|0,1,6\rangle$ $\|0,2,5\rangle$ $\|0,3,4\rangle$ $\|1,2,4\rangle$	$g=4$

στ). η μέση ακτίνα είναι $\langle r\rangle = \frac{1}{Z}\int d^3r\, r\, n(r) = \frac{4\pi}{Z}\int_0^\infty r^3 n(r)\, dr$. Καθώς $n(r) = \frac{1}{3\pi^2}\left(\frac{2Z}{a_0 r}\right)^{3/2} \phi(br/a_0)^{3/2}$
θέτοντας $z=br/a_0$, βρίσκουμε ότι $\langle r\rangle = C Z^{-1/3} \alpha_0$ όπου
$C=(2\pi^2)^{-1}(3/4\pi)^{2/3} \int_0^\infty dz\,[z\phi(z)]^{3/2}$ σταθερά, άρα το μέγεθος του ατόμου ελαττώνεται με το Z

(3) Η Χαμιλτονιανή είναι $H = \frac{1}{2m}\vec{p}^2 - g\vec{B}(x)\cdot\vec{S}$. Έστω $\hat{B}$ στην κατεύθυνση 3, τότε

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\vec{p}^2 - \frac{1}{2}g\vec{B}(x)\,\sigma_3 .$$

Στην εικόνα Χάιζενμπεργκ, $\dot{P}_i = -i[H, P_i] = -i\,\sigma_3\,[B(x), \hat{p}_i] = -i\sigma_3 (i\,\nabla_i B) = \sigma_3 \nabla_i B$

$$= \begin{pmatrix} \nabla_i B & 0 \\ 0 & -\nabla_i B \end{pmatrix}$$

Άρα η ορμή μεταβάλλεται με διαφορετικό τρόπο ανάλογα με την ~~σπιν~~ συνιστώσα του σωματιδίου. Μια δέσμη θα σπάσει σε δύο υποδέσμες.

Για σωμάτιο με σπιν s, έχουμε σπάσιμο σε 2s+1 υποδέσμες.

(4.) Ο προβολέας $\hat{P}_+$ του $\hat{\sigma}_1$ είναι $\frac{1}{2}(\hat{1}+\hat{\sigma}_1) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$Prob(+1,+1) = \langle\psi| P_+ \otimes P_+ |\psi\rangle = \frac{1}{5}\Big(\langle 1,0|\hat{P}_+ \otimes \hat{P}_+|1,0\rangle + 4\langle 0,1|\hat{P}_+ \otimes \hat{P}_+|0,1\rangle$$

$$- 2i\,\langle 1,0|\hat{P}_+ \otimes \hat{P}_+|0,1\rangle + 2i\,\langle 0,1|\hat{P}_+ \otimes \hat{P}_+|1,0\rangle =$$

$$= \frac{1}{5}\Big(\langle 1|\hat{P}_+|1\rangle\langle 0|\hat{P}_+|0\rangle + 4\langle 0|\hat{P}_+|0\rangle\langle 1|\hat{P}_+|1\rangle - 2i\,\langle 1|\hat{P}_+|0\rangle\langle 0|\hat{P}_+|1\rangle$$

$$+ 2i\,\langle 0|\hat{P}_+|1\rangle\langle 1|\hat{P}_+|0\rangle\Big) = \frac{1}{5}\Big(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} - 2i\,\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + 2i\,\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\Big)$$

$$= \frac{1}{5}\,\frac{5}{4} = \frac{1}{4}$$

---

(5) ο αριθμός καταστάσεων $\Omega(\varepsilon)$ είναι $\Omega(\varepsilon) = 2\cdot\sum_{n \le \sqrt{\frac{mL^2\varepsilon}{2\pi^2}}} 1$

στο συνεχές όριο $\Omega(\varepsilon) = 2\cdot 2\int_0^{\sqrt{\frac{mL^2\varepsilon}{2\pi^2}}} dn = 4L\sqrt{\frac{m}{2\pi^2}}\sqrt{\varepsilon} = \frac{2L}{\pi}\sqrt{2m}\sqrt{\varepsilon}$

$$g(\varepsilon) = \frac{d\Omega}{d\varepsilon} = \frac{L}{\pi}\sqrt{2m}\,\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

η ενέργεια Φέρμι βρίσκεται ως $\Omega(\varepsilon_F) = N \rightarrow$

$$\frac{2L}{\pi}\sqrt{2m}\sqrt{\varepsilon_F} = N \rightarrow \sqrt{\varepsilon_F} = \frac{\pi}{2\sqrt{2m}}\frac{N}{L} \rightarrow \varepsilon_F = \frac{\pi^2}{8m}\frac{N^2}{L^2}$$

$$E_0 = \int_0^{\varepsilon_F} d\varepsilon\, g(\varepsilon)\,\varepsilon = \int_0^{\varepsilon_F} d\varepsilon\,\frac{L}{\pi}\sqrt{2m}\,\varepsilon^{1/2} = \frac{L}{\pi}\sqrt{2m}\,\frac{2}{3}\,\varepsilon_F^{3/2} =$$

$$= \frac{L}{\pi}\sqrt{2m}\,\frac{2}{3}\,\frac{\pi^3}{8}\,\frac{1}{(2m)^{3/2}}\,\frac{N^3}{L^3} = \frac{\pi^2}{24m}\,\frac{N^3}{L^2}$$

(6) Κατασκευάζουμε το διάνυσμα $|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\rangle$ για την ολική στροφορμή.

Πρώτα βρίσκουμε το $|\frac{5}{2},\frac{3}{2}\rangle$, ως εξής

$$|\tfrac{5}{2},\tfrac{5}{2}\rangle = |2,2\rangle \otimes |\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$\hat{J}_-|\tfrac{5}{2},\tfrac{5}{2}\rangle = \sqrt{\tfrac{5}{2}\cdot\tfrac{7}{2}-\tfrac{5}{2}\tfrac{3}{2}}\,|\tfrac{5}{2},\tfrac{3}{2}\rangle = \sqrt{5}\,|\tfrac{5}{2},\tfrac{3}{2}\rangle \quad (i)$$

$$\hat{J}_-|\tfrac{5}{2},\tfrac{5}{2}\rangle = \hat{J}_-|2,2\rangle \otimes |\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\rangle + |2,2\rangle \otimes J_-|\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\rangle = 2|2,1\rangle \otimes |\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\rangle + |2,2\rangle \otimes |\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle \quad (ii)$$

$$(i)+(ii) \rightarrow |\tfrac{5}{2},\tfrac{3}{2}\rangle = \frac{2}{\sqrt{5}}|2,1\rangle \otimes |\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}|2,2\rangle \otimes |\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle$$

έστω $|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\rangle = \alpha|2,1\rangle \otimes |\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle + \beta|2,2\rangle \otimes |\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle$

καθώς $\langle\frac{5}{2},\frac{3}{2}|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\rangle = 0 \rightarrow 2\alpha + \beta = 0 \rightarrow \beta = -2\alpha$. καθώς $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \beta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

άρα $|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}|2,1\rangle \otimes |\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle - \frac{2}{\sqrt{5}}|2,2\rangle \otimes |\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle$

αφού το σύστημα είναι αρχικά στην $|\psi\rangle = |2,2\rangle \otimes |\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle$ τότε η πιθανότητα να βρεθεί $j = 3/2$ είναι

$$\left|\langle\psi|\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2}\rangle\right|^2 = \left|-\frac{2}{\sqrt{5}}\right|^2 = \frac{4}{5}$$