

Θέματα εξετάσεων, Κβαντική Φυσική 2, Ιούνιος 2015

1. Οι παρακάτω προτάσεις είναι σωστές ή λάθος; Απαντήστε δίνοντας μία σύντομη τεκμηρίωση. (10×0, 3)

(α') Η συνάρτηση $\psi(x) = \frac{\sin x}{x}$ είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη.

(β') Το άθροισμα δύο προβολικών τελεστών είναι πάντα προβολικός τελεστής.

(γ') $\delta(x^5 + 1) = 0$.

(δ') Η μήτρα πυκνότητας μιας καθαρής κατάστασης είναι προβολικός τελεστής.

(ε') Αν σε ένα σωματίο με σπιν $\frac{3}{2}$ κάνουμε μετασχηματισμό περιστροφής γύρω από οποιονδήποτε άξονα κατά 2π , το καταστατικό διάνυσμα $|\psi\rangle$ του σπιν γίνεται $i|\psi\rangle$.

(στ') Ο χώρος Χίλμπερτ που περιγράφει ένα μη-σχετικιστικό σωματίο με σπιν s στο χώρο έχει διάσταση $(2s + 1)^3$.

(ζ') Σε ένα σωματίο που κάνει μετάπτωση Λαρμόρ, η γωνία του διανύσματος του σπιν με τον άξονα του μαγνητικού πεδίου έχει τιμή που μένει σταθερή στο χρόνο.

(η') Το δις ιόνισμένο λίθιο ${}^6_3\text{Li}^{++}$ είναι φερμιόνιο.

(θ') Αν το ηλεκτρόνιο είχε σπιν $3/2$ και όλα τα άλλα ήταν ίδια, τα άτομα θα ήταν μεγαλύτερα.

(ι') Σε ένα ουδέτερο άτομο, το ενεργό δυναμικό της προσέγγισης μέσου πεδίου έχει ιδιοτιμές της ενέργειας $E_{n,\ell}$ που ικανοποιούν $E_{4,1} < E_{3,2}$.

2. Απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις. (6 × 0, 5)

(α') Υπολογίστε το στοιχείο πίνακα $\langle x|\hat{p}x^5|k\rangle$, όπου $|x\rangle$ και $|k\rangle$ τα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα θέσης και ορμής.

(β') Γράψτε το διάνυσμα της σφαίρας του Μπλοχ που αντιστοιχεί στην κατάσταση

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle + \frac{1-i}{\sqrt{3}}|1\rangle.$$

(γ') Τρία σωματία έχουν κβαντικούς αριθμούς στροφορμής $j_1 = \frac{1}{2}$, $j_2 = \frac{1}{2}$ και $j_3 = \frac{3}{2}$. Ποιες είναι οι δυνατές τιμές του κβαντικού αριθμού ολικής στροφορμής J του συστήματος;

(δ') Βρείτε το βαθμό εκφυλισμού της 5ης ενεργειακής κατάστασης ενός συστήματος 3 φερμιονικών ταλαντωτών συχνότητας ω .

(ε') Ο τελεστής Σρέντινγκερ για ένα σωματίο στο δυναμικό $V(r)$ έχει μη εκφυλισμένα τα 3 πρώτα ενεργειακά επίπεδα $|n\rangle$, ($n = 0, 1, 2$). Έστω σύστημα δύο ηλεκτρονίων εντός του δυναμικού $V(r)$. Θεωρούμε ότι η αλληλεπίδραση μεταξύ των ηλεκτρονίων είναι αμελητέα. Προσδιορίσετε το ολικό σπιν του συστήματος των δύο ηλεκτρονίων στη θεμελιώδη του κατάσταση. Γράψτε το συνολικό καταστατικό διάνυσμα της θεμελιώδους κατάστασης του συστήματος.

(στ') Εξηγήστε γιατί στη θεωρία Τόμας -Φέρμι, το μέγεθος του ατόμου ελαττώνεται με τον ατομικό αριθμό Z ως $Z^{-1/3}$. (Θεωρείστε ως δεδομένες τις εκφράσεις στο τυπολόγιο.)

3. Εξηγήστε το φαινόμενο Στερν Γκέρλαχ (δηλαδή το σπάσιμο μία δέσμης ουδέτερων σωματιδίων με σπιν $s = \frac{1}{2}$ σε δύο όταν περνά μέσα από ανομοιογενές μαγνητικό πεδίο) ξεκινώντας από τη Χαμιλτονιανή που περιγράφει το σωματίο. Τι θα παρατηρούμε για άλλες τιμές του s ; (1)

4. Σύστημα δύο κιούμπιτ προετοιμάζεται στην κατάσταση $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}|1, 0\rangle - \frac{2i}{\sqrt{5}}|0, 1\rangle$. Σε κάθε ένα κιούμπιτ γίνεται μέτρηση του $\hat{\sigma}_1$. Βρείτε την πιθανότητα τα αποτελέσματα των δύο μετρήσεων να είναι +1 και +1. (1)

5. Οι ιδιοτιμές της ενέργειας σωματιδίου μάζας m σε μία διάσταση με συνοριακές συνθήκες περιόδου L είναι

$$E_n = \frac{2\pi^2 n^2}{L^2 m},$$

όπου $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Έστω ότι το σωματίο είναι φερμιόνιο με σπιν $s = \frac{1}{2}$.

(α') Δείξτε ότι η πυκνότητα καταστάσεων του για μεγάλες τιμές της ενέργειας είναι

$$g(\epsilon) = \frac{L}{\pi} \sqrt{\frac{2m}{\epsilon}}. \quad (0,4)$$

(β') Δείξτε ότι η ενέργεια Φέρμι ενός συστήματος $N \gg 1$ μη αλληλεπιδρώντων τέτοιων σωματιδίων είναι ίση με

$$\epsilon_F = \frac{\pi^2 N^2}{8mL^2}. \quad (0,3)$$

(γ') Βρείτε την ενέργεια της θεμελιώδους κατάστασης του συστήματος των N φερμιονίων. (0,3)

6. Ηλεκτρόνιο βρίσκεται σε κατάσταση με τροχιακή στροφορμή $\ell = 2$ και $m_\ell = 2$. Έστω ότι $m_s = -\frac{1}{2}$. Ποια είναι η πιθανότητα η μέτρηση της ολικής στροφορμής του να δώσει τιμή που αντιστοιχεί σε $j = \frac{3}{2}$; (1)