

Εξετάσεις Κβαντική Φυσική 2

21 Ιανουαρίου 2015

1. Οι παρακάτω προτάσεις είναι σωστές ή λάθος; Απαντήστε δίνοντας και μία συνοπτική τεκμηρίωση. ($9 \times 0,4$)

(α') Το άθροισμα δύο μοναδιαίων τελεστών είναι πάντα μοναδιαίος τελεστής.

(β') Η συνάρτηση $\psi(x) = e^{-ax^3}$ είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη στο \mathbf{R} , για $a > 0$.

(γ') Ο μειωτικός τελεστής \hat{J}_- της ολικής στροφορμής είναι κανονικός τελεστής.

(δ') Ένας προβολικός τελεστής έχει μόνο τις ιδιοτιμές 0 και 1.

(ε') $\delta(e^x - 1) = \delta(x)$.

(στ') Η επαλληλία δυο καθαρών καταστάσεων σε ένα qubit βρίσκεται στο εσωτερικό της σφαίρας του Bloch.

(ζ') Δύο κανονικοποιημένα διανύσματα $|\phi\rangle$ και $|\psi\rangle$ που περιγράφουν qubit έχουν εσωτερικό γινόμενο $\langle\phi|\psi\rangle = e^{-i\frac{\pi}{9}}$. Τα αντίστοιχα διανύσματα στη σφαίρα του Bloch σχηματίζουν γωνία ίση με $\frac{2\pi}{9}$.

(η') Το ιόν ${}^7_3\text{Li}^+$ είναι φερμιόνιο.

(θ') Ένα σύνθετο σωματίο που είναι φερμιόνιο δεν μπορεί να αποτελείται αποκλειστικά από μποζόνια.

2. Απαντήστε στα παρακάτω ερωτήματα. ($7 \times 0,7$)

(α') Γράψτε τις συνοριακές συνθήκες που αντιστοιχούν στο διάκριτο και στο συνεχές φάσμα της Χαμιλτονιανής του ατόμου του υδρογόνου και εξηγήστε τη φυσική τους σημασία.

(β') Γράψτε το διάνυσμα της σφαίρας του Bloch που αντιστοιχεί στην καθαρή κατάσταση ενός qubit $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)$.

(γ') Προσδιορίστε την ενέργεια και το βαθμό εκφυλισμού της 4ης ενεργειακής στάθμης σε σύστημα 5 αρμονικών ταλαντωτών συχνότητας ω που ικανοποιούν στατιστική Φέρμι.

(δ') Γράψτε τον πίνακα που αντιστοιχεί στον αυξητικό τελεστή της ολικής στροφορμής \hat{J}_+ για $j = \frac{3}{2}$.

(ε') Υπολογίστε το bracket $\langle k|\hat{x}\hat{p}^3|x\rangle$ για σωματίο σε μία διάσταση, όπου $|x\rangle$ και $|k\rangle$ τα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα θέσης και ορμής αντίστοιχα.

(στ') Qubit προετοιμάζεται στην κατάσταση $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)$ και του γίνονται μετρήσεις πρώτα του $\hat{\sigma}_2$ και μετά του $\hat{\sigma}_3$. Υπολογίστε την πιθανότητα και οι δύο μετρήσεις να δώσουν αποτέλεσμα +1.

(ζ') Έστω $|1\rangle$ και $|3\rangle$ ιδιοσυναρτήσεις του αυτοσυζυγή τελεστή \hat{A} με ιδιοτιμές a και $3a$ αντίστοιχα. Γράψτε μία καθαρή και μία μεικτή κατάσταση που δίνουν τις ίδιες πιθανότητες για τα αποτελέσματα της μέτρησης του \hat{A} , και ίσες με $\text{Prob}(a) = \frac{1}{3}$ και $\text{Prob}(3a) = \frac{2}{3}$. Με τι μετρήσεις μπορούμε να ξεχωρίσουμε μεταξύ των δύο αυτών καταστάσεων; (Γράψτε εκπνευσμένα παράδειγμα μέτρησης και τί πιθανότητες αντιστοιχούν σε κάθε περίπτωση.)

3. Ηλεκτρόνιο βρίσκεται σε κατάσταση με τροχιακή στροφορμή $l = 1$ και $m_l = 1$. Ποια είναι η πιθανότητα η μέτρηση της ολικής στροφορμής του να δώσει τιμή που αντιστοιχεί σε $j = \frac{1}{2}$ αν $m_s = -\frac{1}{2}$; (1,5)