Κεφ. 5

(1.) $\hat{D}_s \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi(x/s)$. $(D_s\psi, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \phi^*(x) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi(x/s) \overset{y = x/s}{=} \int_{-\infty}^{\infty} s\,dy\, \phi^*(ys)\psi(y)\frac{1}{\sqrt{s}}$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sqrt{s}\,\phi(ys)\right)^* \psi(y)\,dy \rightarrow D_s^\dagger \psi(x) = \sqrt{s}\,\phi(sx)$$

---

(3) $[A,B]=0$. Αν $\hat{A}\phi = a\phi \rightarrow \hat{A}\hat{B}\phi = \hat{B}\hat{A}\phi = a\hat{B}\phi \rightarrow \hat{B}\phi$ ιδιοδιάνυσμα του $\hat{A}$ με ιδιοτιμή a. Αν ο $\hat{A}$ δεν έχει εκφυλισμό, $\tilde{B}\phi \sim \phi$ και άρα $\hat{B}\phi = b\phi$.
Σε κάθε a, αντιστοιχεί ένα και μοναδικό $b(a)$. Άρα $\hat{B} = \sum_n b(a_n)|n\rangle\langle n| \rightarrow$
$\rightarrow \hat{B}$ συνάρτηση του $\hat{A}$

---

(4) Δείξαμε ότι αν $[\hat{A},\hat{B}]=0 \rightarrow [f(\hat{A}),\hat{B}]=0$, για κάθε f.
Άρα ισχύει και για $f = \chi_u$, όπου χ_u χαρακτηριστική συνάρτηση, $\hat{P} = \chi_u(\hat{A})$,
άρα $[\hat{P},\hat{B}]=0$ για κάθε φασματικό προβολέα $\hat{P}$ του $\hat{A}$.
$[\hat{P},\hat{B}]=0 \rightarrow [\hat{P}, f(\hat{B})]=0 \rightarrow$ ίδια επιχείρημα το $[\hat{P},\hat{Q}]=0$ για κάθε φασματικό προβολέα $\hat{Q}$ του $\hat{B}$.

---

(5) Αφού $\hat{B} \geq 0 \rightarrow \hat{B} = \sqrt{\hat{B}}\sqrt{\hat{B}}$ και $[\hat{A},\hat{B}]=0 \rightarrow [\hat{A},\sqrt{\hat{B}}]=0$

Άρα $\hat{A}\hat{B} = \hat{A}\sqrt{\hat{B}}\sqrt{\hat{B}} = \sqrt{\hat{B}}\hat{A}\sqrt{\hat{B}}$

Οπότε $\langle\phi|\hat{A}\hat{B}|\phi\rangle = \langle\phi|\sqrt{\hat{B}}\hat{A}\sqrt{\hat{B}}|\phi\rangle = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle \underset{\text{εξ ορισμού}}{\geq} 0$, $|\psi\rangle = \sqrt{\hat{B}}|\phi\rangle$

---

(6) $\hat{A} = \sum_n a_n \hat{P}_n$, $a_{max}\hat{I} - \hat{A} = a_{max}\sum_n P_n - \sum_n a_n P_n = \sum_n \underbrace{(a_{max} - a_n)}_{\geq 0} P_n \geq 0$

$$A^2 - a_{min}\hat{A} = \sum_n a_n^2 \hat{P}_n - a_{min}\sum_n a_n \hat{P}_n = \sum_n \underbrace{a_n}_{\geq 0} \underbrace{(a_n - a_{min})}_{\geq 0} \hat{P}_n \geq 0$$

(7) α) Αφού $[P_1,P_2]=0 \rightarrow \begin{cases} (P_1P_2)^\dagger = P_2^\dagger P_1^\dagger = P_2P_1 = P_1P_2 \\ (P_1P_2)^2 = P_1P_2P_1P_2 = P_1^2P_2^2 = P_1P_2 \end{cases}$ ο P_1P_2 προβολικός

Αν $P_1P_2\phi=\phi \rightarrow P_1^2P_2\phi = P_1\phi \rightarrow P_1P_2\phi = P_1\phi \rightarrow P_1P_2\phi \in V_1 \rightarrow \phi\in V_1$

όμοιως $\phi\in V_2$, άρα $\phi\in V_1\cap V_2$

β) αν $P_1P_2=0 \rightarrow$ $\begin{cases} (P_1+P_2)^\dagger = P_1^\dagger + P_2^\dagger = P_1+P_2 \\ (P_1+P_2)^2 = P_1^2+P_2^2+P_1P_2+P_2P_1 = P_1+P_2 \end{cases}$ P_1+P_2 προβολικός

$(P_1P_2)^\dagger = P_2P_1 = 0$

Αν $(P_1+P_2)\phi=\phi$. Γράφουμε $\phi=\phi_1+\phi_1^\perp$ όπου $\phi_1\in V_1$, $\phi_1^\perp\in V_1^\perp$.

$(P_1+P_2)(\phi_1+\phi_1^\perp) = \phi_1+\phi_1^\perp \rightarrow \underbrace{P_1\phi_1}_{\phi_1} + \underbrace{P_1\phi_1^\perp}_{0} + \underbrace{P_2\phi_1}_{0\ (P_2P_1=0)} + P_2\phi_1^\perp = \phi_1+\phi_1^\perp \rightarrow$

$\rightarrow P_2\phi_1^\perp = \phi_1^\perp \rightarrow \phi_1^\perp\in V_2$, άρα το $\phi = \underbrace{\phi_1}_{\in V_1} + \underbrace{\phi_1^\perp}_{\in V_2} \rightarrow \phi\in V_1\oplus V_2 = V_1\cup V_2$

γ) Αν $\hat P_1\hat P_2=\hat P_1$. Έστω $\phi\in V_1$, δηλαδή $P_1\phi=\phi \rightarrow P_2P_1\phi = P_2\phi \rightarrow \hat P_1\phi = \hat P_2\phi \rightarrow$

$\rightarrow \hat P_2\phi = \phi \rightarrow \phi\in V_2$. Άρα αν $\forall\ \phi\in V_1 \rightarrow \phi\in V_2$, οπότε $V_1\subseteq V_2$

δ) Με απειροδιάστατους υπόχωρους πρέπει να λάβουμε υπόψη τι συμβαίνει και με τα όρια διανυσμάτων.

---

(8) $[\hat x^3 p, \hat x p] = x^3[\hat p, \hat x \hat p] + [\hat x^3, \hat x \hat p]\hat p = x^3[\hat p,\hat x]\hat p + \hat x[x^3,\hat p]\hat p =$

$= x^3(-iI)\hat p + x(3x^2 i)\hat p = 2i\hat x^3\hat p$

$[\hat p^2,\hat x^3] = p[\hat p, x^3] + [\hat p, x^3]\hat p = \hat p(-i3\hat x^2) + (-i3x^2)\hat p = -3i(\hat p\hat x^2 + \hat x^2\hat p)$

$[\hat x^2,[\hat p^2,\hat x^3]] = -3i[x^2,\hat p\hat x^2] - 3i[\hat x^2,\hat x^2\hat p] = -3i[\hat x^2,\hat p]\hat x^2 - 3i x^2[\hat x^2,\hat p]$

$= -3i(2i\hat x)\hat x^2 - 3i\hat x^2(2i\hat x) = 12\hat x^3$

---

(9) Έστω $\hat{A}$ αυτοσυζυγής. Διαιρούμε με τη μέγιστη ιδιοτιμή α_{max}: $\frac{A}{\alpha_{max}} \equiv B \rightarrow \hat{B} \leq I$

άσκηση 5.6

$$\hat{U}_\pm = \hat{B} \pm i\sqrt{\hat{I} - \hat{B}^2} \longrightarrow \hat{U}_+ = U_-^\dagger$$

$$U_+^\dagger U_+ = U_- U_+ = \hat{B}^2 + I - B^2 \underbrace{+ iB\sqrt{I-B^2} - i\hat{B}\sqrt{I-B^2}}_{0} = I$$

ομοίως $U_-^\dagger U_- = I \rightarrow U_+ \; U_-$ μοναδιαίοι, $\rightarrow \hat{B} = \frac{1}{2}(\hat{U}_+ + \hat{U}_-) \rightarrow$

$$\rightarrow A = \frac{\alpha_{max}}{2}(\hat{U}_+ + \hat{U}_-)$$

---

(11) Είναι βολικό να εγκαταλείψουμε το συμβολισμό Ντιράκ. Γράφουμε $e_n \equiv |n\rangle$

οπότε $\hat{S}e_n = e_{n+1}$: $(\hat{S}e_n, e_m) = (e_{n+1}, e_m) = \delta_{n+1,m} = \delta_{n,m-1} = (e_n, e_{m-1}) = (e_n, S^\dagger e_m)$

εφόσον $m \geq 1$

άρα για $m \geq 1$ $S^\dagger e_m = e_{m-1}$. Για $m=0$ $(Se_n, e_0) = \delta_{n+1,0} = 0 \rightarrow S^\dagger e_0 = 0$

Άρα $S^\dagger S e_n = S^\dagger e_{n+1} = e_n \rightarrow S^\dagger S = I$

$$SS^\dagger e_n = \begin{cases} 0, & n=0 \\ e_n, & n>0 \end{cases} \rightarrow SS^\dagger \neq I$$

ο $\hat{S}$ δεν είναι μοναδιαίος παρότι $S^\dagger S = I$

---

(12) $X_h \psi(x) = h(x)\psi(x)$

α) $(X_h\psi, \phi) = \int dx\, \phi^*(x)\, h(x)\, \psi(x) = \int dx\, (h^*(x)\phi(x))^* \psi(x) = (\psi, X_h^\dagger \phi)$, όπου $X_h^\dagger \phi(x) = h^*(x)\phi(x)$

άρα
$$X_h^\dagger X_h \phi(x) = |h(x)|^2 \phi(x)$$
$$X_h X_h^\dagger \phi(x) = |h(x)|^2 \phi(x)$$
ίσα, άρα X_h κανονικός.

β) Αν $h(x)$ πραγματική $\rightarrow h(x) = h^*(x) \rightarrow \hat{X}_h = X_h^\dagger$

$|h(x)| = 1 \rightarrow X_h^\dagger X_h \phi(x) = \phi(x) = X_h X_h^\dagger \phi(x) \rightarrow X_h$ μοναδιαίος.

γ) Έστω $h(x)$ σταθερή στο (c,d) με τιμή $\alpha \rightarrow$ αν $\psi(x)$ συνεχής συνάρτηση όπου $\psi(x)=0$ για $x \notin (c,d)$ τότε $X_h \psi(x) = \alpha\psi(x) \rightarrow \psi$ ιδιοδιάνυσμα της X_h.

Καθώς υπάρχουν άπειρες τέτοιες συναρτήσεις, ο εκφυλισμός είναι άπειρος.

όλες οι συναρτήσεις $\psi: [c,d] \rightarrow \mathbb{C}$ με $\psi(c) = \psi(d) = 0$.

(13) a) Γράφουμε $\hat{A} = \hat{B} + i\hat{C}$, όπου $\hat{B}, \hat{C}$ αυτοσυζυγείς. Αν $AA^\dagger = A^\dagger A \to \hat{B}\hat{C} = \hat{C}\hat{B}$

οι $\hat{B}, \hat{C}$ έχουν κοινά ιδιοδιανύσματα, έστω $|\phi_n\rangle$ όπου $\hat{B}|\phi_n\rangle = b_n|\phi_n\rangle$ και $\hat{C}|\phi_n\rangle = c_n|\phi_n\rangle$

Άρα $\hat{A}|\phi_n\rangle = (b_n + i c_n)|\phi_n\rangle$, αλλά αφού οι ιδιοτιμές του $\hat{A}$ είναι πραγματικές $c_n = 0$

Σε πεπερασμένες διαστάσεις $\hat{C} = \sum_n c_n |\phi_n\rangle\langle\phi_n|$, οπότε αν $c_n = 0 \to \hat{C} = 0$.

β) ως αντιπαράδειγμα παίρνουμε ~~μία συνάρτηση~~ τον τελεστή

$\hat{X}_h$ με $h(x) = \begin{cases} 1 & x \in (-\infty, 0) \\ e^{ix} & x \in (\infty, 0) \end{cases}$, ο οποίος έχει

μόνη την πραγματική ιδιοτιμή 1, αλλά δεν είναι αυτοσυζυγής αφού $h(x) \neq h^*(x)$

---

(14) Υπολογίζουμε ιδιοτιμές

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \to (1-\lambda)^2(\lambda^2 - 2\lambda + 1 - 1) = 0 \to (\lambda-1)^2(\lambda-2)\lambda = 0$$

$\to \lambda = 1$ (διπλή)

$\lambda = 2$

$\lambda = 0$

για $\lambda=1$ $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = 0 \to \begin{pmatrix} 0 \\ -c_3 \\ -c_2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \to c_2 = c_3 = 0$$

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \\ 0 \\ c_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ Διαλέγουμε $|1,\alpha\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$|1,\beta\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

για $\lambda=0$ $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = 0 \to \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 - c_3 \\ -c_2 + c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = 0 \to \begin{matrix} c_1 = c_4 = 0 \\ c_2 = c_3 \end{matrix}$$

$$|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

για $\lambda=2$ $\quad \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&-1&-1&0\\ 0&-1&-1&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1\\ c_2\\ c_3\\ c_4 \end{pmatrix}=0 \to \begin{pmatrix} c_1\\ -c_2-c_3\\ -c_2-c_3\\ c_4 \end{pmatrix}=0 \to \begin{matrix} c_1=c_4=0\\ c_2=-c_3 \end{matrix}$

$$|2\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$\hat{P}_1=|1,\alpha\rangle\langle 1,\alpha|+|1,\beta\rangle\langle 1,\beta|=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\hat{P}_0=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1&0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$P_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&-1&0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&-1&0\\0&-1&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\hat{H}=\lambda\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}+0\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}+(2\lambda)\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&-1&0\\0&-1&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$e^{-i\hat{H}t}=e^{-i\lambda t}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}+e^{-2i\lambda t}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&-1&0\\0&-1&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

κ.ο.κ

---

17 α) έστω $w(f)=\int_{-\infty}^{\infty}dx\,\rho(x)f(x) \to w'(f)=-w(f')=-\int_{-\infty}^{\infty}dx\,\rho(x)f'(x)=\rho(x)f(x)\Big|_{-\infty}^{\infty}+\int_{-\infty}^{\infty}dx\,\rho'(x)f(x)$

$=\int_{-\infty}^{\infty}dx\,\rho'(x)f(x) \to$ στην w' αντιστοιχεί η ρ', όπως στο συνήθη ορισμό.

β) για τη δ': $\int dx\,\delta'(x)f(x):=-\int dx\,\delta(x)f'(x)=-f'(0)$

για τη δ'': $\int dx\,\delta''(x)f(x)=\int dx\,\delta(x)f''(x)=f''(0)$

γ) $\int_{-\infty}^{\infty}dx\,\delta'(x^2-1)f(x)=-\int_{-\infty}^{\infty}dx\,\delta(x^2-1)f'(x)=-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}dx\,\delta(x-1)f'(x)-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}dx\,\delta(x+1)f'(x)$

$=-\frac{1}{2}f'(1)-\frac{1}{2}f'(-1)=\frac{1}{2}\int dx\left(\delta'(x-1)+\delta'(x+1)\right)f(x)$

Άρα $\delta'(x^2-1)=\frac{1}{2}\delta'(x-1)+\frac{1}{2}\delta'(x+1)$, ομοίως για το $\delta''(x^2-1)$

18 (α) $\langle p|\hat{p}|x\rangle = p\langle p|x\rangle = \frac{p}{\sqrt{2\pi}} e^{-ipx}$

(β) $\langle p_1|\hat{x}|p_2\rangle = \int dx\, x\, \langle p_1|x\rangle\langle x|p_2\rangle = \int \frac{dx}{2\pi}\, x\, e^{i(p_2-p_1)x}$

$$\int dx e^{i\xi x}\, x = -i\frac{\partial}{\partial \xi}\int dx\, e^{i\xi x} = -i\frac{\partial}{\partial \xi} 2\pi\,\delta(\xi) = -i2\pi\,\delta'(\xi)$$

Άρα $\langle p_1|\hat{x}|\hat{p}_2\rangle = -i\,\delta'(p_2-p_1)$

(γ) $\langle p|\hat{x}\hat{p}|\hat{x}\rangle = \langle p|\hat{p}\hat{x}+iI|x\rangle = px\langle p|x\rangle + i\langle p|x\rangle = (xp+i)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ipx}$