15.1

Υπολογίζουμε $[\hat V,(\hat A\otimes\hat 1-\hat 1\otimes\hat A)^2]$ δρώντας στα διανύσματα βάσης
$|a,b\rangle = |a\rangle\otimes|b\rangle$

$$\hat V(\hat A\otimes\hat 1-\hat 1\otimes\hat A)^2|a,b\rangle = V(\hat A^2\otimes\hat 1+\hat 1\otimes\hat A^2-2\hat A\otimes\hat A)|a\rangle\otimes|b\rangle$$
$$= V(\hat A^2|a\rangle\otimes|b\rangle)+\hat V(|a\rangle\otimes\hat A^2|b\rangle)-2\hat V(\hat A|a\rangle\otimes\hat A|b\rangle) =$$
$$= |b\rangle\otimes\hat A^2|a\rangle+\hat A^2|b\rangle\otimes|a\rangle-2\hat A|b\rangle\otimes\hat A|a\rangle =$$
$$= (\hat 1\otimes\hat A-\hat A\otimes 1)^2|b,a\rangle = (\hat A\otimes\hat 1-\hat 1\otimes\hat A)^2 V|a,b\rangle$$ άρα παίρνουμε
$$[V,(\hat A\otimes\hat 1-\hat 1\otimes\hat A)^2]=0$$

- $\langle a,b|(\hat A\otimes\hat 1-\hat 1\otimes\hat A)^2|a,b\rangle = (\langle a|\otimes\langle b|)(\hat A^2|a\rangle\otimes|b\rangle+|a\rangle\otimes A^2|b\rangle-2\hat A|a\rangle\otimes\hat A|b\rangle)$

$$= \langle a|\hat A^2|a\rangle+\langle b|\hat A^2|b\rangle-2\langle a|A|a\rangle\langle b|\hat A|b\rangle =$$

- ${}_S\langle a,b|(\hat A\otimes\hat 1-\hat 1\otimes\hat A)^2|a,b\rangle_S = \frac{1}{2}\Big(\langle a,b|(\hat A\otimes\hat 1-\hat 1\otimes A)^2|a,b\rangle$

$$+\langle b,a|(\hat A\otimes 1-\hat 1\otimes\hat A)^2|b,a\rangle+\langle a,b|(\hat A\otimes\hat 1-\hat 1\otimes\hat A)^2|b,a\rangle+\langle b,a|(\hat A\otimes 1-\hat 1\otimes\hat A)^2|a,b\rangle\Big)$$

Υπολογίζουμε $\langle a,b|(\hat A\otimes\hat 1-1\otimes A)^2|b,a\rangle = \langle a|\hat A^2|b\rangle+\langle b|\hat A^2|a\rangle-2|\langle a|\hat A|b\rangle|^2$
οπότε

$${}_S\langle a,b|(\hat A\otimes\hat 1-\hat 1\otimes A)^2|a,b\rangle_S = \langle a|\hat A^2|a\rangle+\langle b|\hat A^2|b\rangle-2\langle a|\hat A|a\rangle\langle b|\hat A|b\rangle$$
$$+\langle a|\hat A^2|b\rangle+\langle b|\hat A^2|a\rangle-2|\langle a|\hat A|b\rangle|^2$$

- με τον ίδιο τρόπο (μόνη διαφορά κάποια −)

$${}_A\langle a,b|(\hat A\otimes\hat 1-\hat 1\otimes\hat A)^2|a,b\rangle_A = \langle a|\hat A^2|a\rangle+\langle b|\hat A^2|b\rangle-2\langle a|\hat A|a\rangle\langle b|\hat A|b\rangle$$
$$-\langle a|\hat A^2|b\rangle-\langle b|\hat A^2|a\rangle+2|\langle a|\hat A|b\rangle|^2$$

Θέτουμε $A \equiv \hat{x} = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}}(a+a^\dagger)$, $|a\rangle = |0\rangle$, $|b\rangle = a^\dagger|0\rangle$

οπότε $\langle a|\hat{A}^2|a\rangle = \frac{1}{2m\omega}\langle 0|(a+a^\dagger)^2|0\rangle = \frac{1}{2m\omega}\langle 0|\underbrace{a a^\dagger}_{\hat{N}+1} + \underbrace{a^\dagger a}_{\hat{N}}|0\rangle = \frac{1}{2m\omega}$

$\langle b|\hat{A}^2|b\rangle = \frac{1}{2m\omega}\langle 1|(a+a^\dagger)^2|1\rangle = \frac{1}{2m\omega}\langle 1|a a^\dagger + a^\dagger a|1\rangle = \frac{3}{2m\omega}$

εύκολα → $\langle a|\hat{A}|a\rangle = \langle b|\hat{A}|b\rangle = 0$

βρίσκουμε $\langle a|\hat{A}^2|b\rangle = \frac{1}{2m\omega}\langle 0|(a+a^\dagger)^2|1\rangle = 0$

$\langle a|\hat{A}|b\rangle = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}}\langle 0|(a+a^\dagger)|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}}$

οπότε

$$\langle a,b|(\hat{x}\otimes\hat{1} - \hat{1}\otimes\hat{x})^2|a,b\rangle = \frac{1}{2m\omega} + \frac{3}{2m\omega} - 0 = \frac{2}{m\omega}$$

$${}_S\langle a,b|(\hat{x}\otimes\hat{1} - \hat{1}\otimes\hat{x})^2|a,b\rangle_S = \frac{1}{2m\omega} + \frac{3}{2m\omega} - 2\left(\frac{1}{\sqrt{2m\omega}}\right)^2 = \frac{1}{m\omega}$$

$${}_A\langle a,b|(\hat{x}\otimes\hat{1} - \hat{1}\otimes\hat{x})^2|a,b\rangle_A = \frac{1}{2m\omega} + \frac{3}{2m\omega} + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2m\omega}}\right)^2 = \frac{3}{m\omega}$$

δηλ. η μέση απόσταση μειώνεται σε μποζόνια και αυξάνει σε φερμιόνια.

15.2

Φερμιονικοί

Στάθμη	κετ	ενέργεια	εκφυλισμός
1η	$\|0,1,2,3\rangle$	6ω	1
2η	$\|0,1,2,4\rangle$	7ω	1
3η	$\|0,1,2,5\rangle$	8ω	2
	$\|0,1,3,4\rangle$		
4η	$\|0,1,2,6\rangle$	9ω	3
	$\|0,1,3,5\rangle$		
	$\|0,2,3,4\rangle$		
5η	$\|0,1,2,7\rangle$	10ω	4
	$\|0,1,3,6\rangle$		
	$\|0,1,4,5\rangle$		
	$\|0,2,3,5\rangle$		

Μποζονικοί

Στάθμη	κετ	ενέργεια	εκφυλισμός
1η	$\|0,0,0,0\rangle$	0	1
2η	$\|1,0,0,0\rangle$	ω	1
3η	$\|1,1,0,0\rangle$	2ω	2
	$\|2,0,0,0\rangle$		
4η	$\|1,1,1,0\rangle$	3ω	3
	$\|2,1,0,0\rangle$		
	$\|3,0,0,0\rangle$		
5η	$\|1,1,1,1\rangle$	4ω	4
	$\|2,1,1,0\rangle$		
	$\|3,1,0,0\rangle$		
	$\|4,0,0,0\rangle$		

Διακρίσιμοι

Στάθμη	κετ		ενέργεια	εκφυλισμός
1	$\|0,0,0,0\rangle$		0	1
2	$\|1,0,0,0\rangle$		ω	4
	$\|0,1,0,0\rangle$			
	$\|0,0,1,0\rangle$			
	$\|0,0,0,1\rangle$			
3	$\|2,0,0,0\rangle$		2ω	10
	$\|0,2,0,0\rangle$			
	$\|0,0,2,0\rangle$			
	$\|0,0,0,2\rangle$			
	$\|1,1,0,0\rangle$			
	$\|1,0,1,0\rangle$			
	$\|1,0,0,1\rangle$			
	$\|0,1,1,0\rangle$			
	$\|0,1,0,1\rangle$			
	$\|0,0,1,1\rangle$			
4	$\|3,0,0,0\rangle$	$\|1,0,0,2\rangle$	3ω	20
	$\|0,3,0,0\rangle$	$\|0,1,0,2\rangle$		
	$\|0,0,0,3\rangle$	$\|0,0,1,2\rangle$		
	$\|0,0,0,4\rangle$	$\|1,1,1,0\rangle$		
	$\|2,1,0,0\rangle$	$\|1,1,0,1\rangle$		
	$\|2,0,1,0\rangle$	$\|1,0,1,1\rangle$		
	$\|2,0,0,1\rangle$	$\|0,1,1,1\rangle$		
	$\|1,2,0,0\rangle$			
	$\|0,2,1,0\rangle$			
	$\|0,2,0,1\rangle$			
	$\|1,0,2,0\rangle$			
	$\|0,1,2,0\rangle$			
	$\|0,0,2,1\rangle$			

Άσκηση 15.3

Αφού έχουν $s=0$ είναι μποζόνια. Η κυματοσυνάρτηση ικανοποιεί $\psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)=\psi(\vec{r}_2,\vec{r}_1)$.
Γράφοντας $\vec{R}=\frac{1}{2}(\vec{r}_1+\vec{r}_2)$, $\vec{r}=\vec{r}_1-\vec{r}_2$, παίρνουμε $\psi(\vec{R},\vec{r})=\psi(\vec{R},-\vec{r})$.
Άρα η κυματοσυνάρτηση είναι άρτια ως προς τους εσωτερικούς βαθμούς ελευθερίας. Εφόσον η πάριτυ έχει ιδιοτιμές $(-1)^\ell$, θα πρέπει το ℓ να είναι άρτιο

Άσκηση 15.4

α) η ενέργεια ενός σωματιδίου δεν εξαρτάται από το σπιν. Σε κάθε κβαντικό αριθμό n, αντιστοιχούν δύο τιμές του σπιν, έστω $+,-$.

		E	g
1η	$\lvert 0+,0-,1+\rangle$ $\lvert 0+,0-,1-\rangle$	ω	2
2η	$\lvert 0+,1+,1-\rangle$ $\lvert 0-,1+,1-\rangle$ $\lvert 0+,0-,2+\rangle$ $\lvert 0+,0-,2-\rangle$	2ω	4
3η	$\lvert 2\pm,1\pm,0\pm\rangle$ ← 8 δυνατοί συνδυασμοί $\lvert 0+,0-,3\pm\rangle$ ← 2 συνδυασμοί	3ω	10
4η	$\lvert 2+,2-,0\pm\rangle$ ← 2 συνδυασμοί $\lvert 0\pm,1\pm,3\pm\rangle$ ← 8 συνδυασμοί $\lvert 0+,0-,4\pm\rangle$ ← 2 συνδυασμοί $\lvert 1+,1-,2\pm\rangle$ 2 συνδυασμοί	4ω	14

(ii) ~~X~~ έχουμε 3 δυνατές στάθμες για κάθε σπιν. Δεν υπάρχει περιορισμός στο πως γεμίζουν οι ενεργειακές στάθμες ως προς το σπιν, άρα για κάθε χωρικό κετ έχουμε 3^3 δυνατές καταστάσεις σπιν.

Στάθμη	χωρικό κετ	ενέργεια	εκφυλισμός
1	$\|0,0,0\rangle$	0	27
2	$\|1,0,0\rangle$	ω	27
3	$\|1,1,0\rangle$ $\|2,0,0\rangle$	2ω	54
4	$\|1,1,1\rangle$ $\|2,1,0\rangle$ $\|3,0,0\rangle$	3ω	81

15.5

Σε δύο διαστάσεις, η Εξ. 12.23 δίνει

$$\Omega(\varepsilon) = (2s+1)\int_{|n|<a} d^2n \qquad \text{όπου} \quad a^2 = \frac{m\varepsilon L^2}{2\hbar^2}$$

Τώρα η ολοκλήρωση είναι στο εσωτερικό κύκλου ακτίνας a άρα

$$\int_{|n|<a} d^2n = \pi a^2 \leftarrow \text{εμβαδόν δίσκου}$$

οπότε $$\Omega(\varepsilon) = (2s+1)\frac{m\varepsilon L^2}{2\pi} = \frac{(2s+1)m\varepsilon A}{2\pi}, \quad A = L^2 \text{ εμβαδόν}$$

βρίσκουμε την ενέργεια Φέρμι $\Omega(\varepsilon_F) = N$

$$\frac{(2s+1)m\varepsilon_F A}{2\pi} = N \rightarrow \varepsilon_F = \frac{2\pi N}{(2s+1)mA}$$

$$g(\varepsilon) = \frac{d\Omega}{d\varepsilon} = \frac{(2s+1)mA}{2\pi}, \text{ άρα}$$

$$E_0 = \int_0^{\varepsilon_F} g(\varepsilon)\,\varepsilon\, d\varepsilon = \frac{(2s+1)mA}{2\pi}\int_0^{\varepsilon_F} \varepsilon\, d\varepsilon = \frac{(2s+1)mA}{4\pi}\varepsilon_F^2$$

$$= \frac{(2s+1)mA}{4\pi}\frac{4\pi^2}{(2s+1)^2m^2}\frac{N^2}{A^2} = \frac{\pi}{(2s+1)m}\frac{N^2}{A}.$$

Σε μία διάσταση, η Εξ 12.23 δίνει

$$\Omega(\varepsilon) = (2s+1)\int_{|n|<a} dn \qquad \text{οπότε} \quad \int_{|n|<a} dn = 2a, \text{ άρα}$$

$$\Omega(\varepsilon) = 2(2s+1)\sqrt{\frac{m}{2\pi^2}}\, L\sqrt{\varepsilon} = \frac{(2s+1)L}{\pi}\sqrt{2m\varepsilon}$$

βρίσκουμε την ενέργεια Φέρμι: $\Omega(\varepsilon_F) = N \longrightarrow \frac{(2s+1)L}{\pi}\sqrt{2m\varepsilon_F} = N$

$$\longrightarrow \sqrt{\varepsilon_F} = \frac{\pi N}{(2s+1)L}\frac{1}{\sqrt{2m}}$$

$$g(\varepsilon) = \frac{d\Omega}{d\varepsilon} = \frac{(2s+1)L}{2\pi}\frac{\sqrt{2m}}{\sqrt{\varepsilon}}$$

$$E_0 = \int_0^{\varepsilon_F} g(\varepsilon)\,\varepsilon\, d\varepsilon = \frac{(2s+1)L}{2\pi}\sqrt{2m}\int_0^{\varepsilon_F}\sqrt{\varepsilon}\, d\varepsilon =$$

$$= \frac{(2s+1)L}{3\pi}\sqrt{2m}\;\varepsilon_F^{3/2} = \frac{(2s+1)L}{3\pi}\sqrt{2m}\;\frac{\pi^3 N^3}{(2s+1)^3L^3}\;\frac{1}{(2m)^{3/2}} =$$

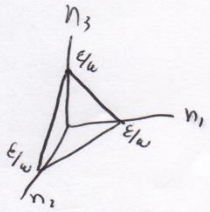
$$= \frac{\pi^2}{(2s+1)^2\, 6m}\frac{N^3}{L^2}$$

15.6

για αρμονικούς ταλαντωτές με σπίν s

$$\Omega(\varepsilon) = \sum_{n_1+n_2+n_3\le \frac{\varepsilon}{\omega}} (2s+1)$$

Αντιστοιχεί στον όγκου του τετράεδρου



ο οποίος είναι

$$\int_0^{\varepsilon/\omega} dn_3 \int_0^{\frac{\varepsilon}{\omega}-n_3} dn_2 \int_0^{\frac{\varepsilon}{\omega}-n_2-n_3} dn_1 =$$

$$= \int_0^{\varepsilon/\omega} dn_3 \int_0^{\varepsilon/\omega - n_3} dn_2 \left(\frac{\varepsilon}{\omega} - n_2 - n_3\right) = \int_0^{\varepsilon/\omega} dn_3 \left(\frac{\varepsilon}{\omega}\left(\frac{\varepsilon}{\omega}-n_3\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{\omega}-n_3\right)^2 - n_3\left(\frac{\varepsilon}{\omega}-n_3\right)\right)$$

$$= \int_0^{\varepsilon/\omega} dn_3\left(\frac{\varepsilon^2}{\omega^2} - \frac{\varepsilon}{\omega}n_3 - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2}{\omega^2} - \frac{1}{2}n_3^2 + \frac{\varepsilon}{\omega}n_3 - n_3\frac{\varepsilon}{\omega} + n_3^2\right) = \frac{1}{2}\int_0^{\varepsilon/\omega} dn_3 \left(n_3 - \frac{\varepsilon}{\omega}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{3}\left(\frac{\varepsilon}{\omega}\right)^3 = \frac{\varepsilon^3}{6\omega^3}$$

Άρα $\Omega(\varepsilon) = (2s+1)\frac{\varepsilon^3}{6\omega^3} \rightarrow g(\varepsilon) = \frac{d\Omega}{d\varepsilon} = (2s+1)\frac{\varepsilon^2}{2\omega^3}$ (το ζητούμενο για $s=0$)

Βρίσκουμε την ενέργεια Φέρμι. $\Omega(\varepsilon_F) = N \rightarrow (2s+1)\frac{\varepsilon_F^3}{6\omega^3} = N \rightarrow$

$$\varepsilon_F = \omega\left(\frac{6N}{2s+1}\right)^{1/3}$$

$$E_0 = \int_0^{\varepsilon_F} g(\varepsilon)\,\varepsilon\, d\varepsilon = \frac{(2s+1)}{2\omega^3}\int_0^{\varepsilon_F}\varepsilon^3 d\varepsilon = \frac{(2s+1)}{8\omega^3}\varepsilon_F^4 =$$

$$= \frac{(2s+1)}{8\omega^3}\,\omega^4\left(\frac{6N}{2s+1}\right)^{4/3} = \frac{\omega\,(6N)^{4/3}}{8(2s+1)^{1/3}}$$