<u>Κεφ. 14</u>

① Στην εικόνα Χάιζενμπεργκ

$$\hat{S}_1(t)=\hat{S}_1(0)\cos(\gamma Bt)+\hat{S}_2(0)\sin(\gamma Bt)$$
$$\hat{S}_2(t)=-\hat{S}_1(0)\sin(\gamma Bt)+\hat{S}_2(0)\cos(\gamma Bt)$$
$$\hat{S}_3(t)=\hat{S}_3(0)$$

α) Για $s=\frac{1}{2}$ $\hat{S}_i=\frac{1}{2}\hat{\sigma}_i$ και γράφοντας $\langle\hat{\sigma}_i(t)\rangle=\mathrm{Tr}(\rho(t)\hat{\sigma}_i)=\mathrm{Tr}(\rho\,\hat{\sigma}_i(t))$

παίρνουμε
$$\langle\hat{\sigma}_1(t)\rangle=\langle\sigma_1(0)\rangle\cos(\gamma Bt)+\langle\sigma_2(0)\rangle\sin(\gamma Bt)$$
$$\langle\hat{\sigma}_2(t)\rangle=-\langle\hat{\sigma}_1(0)\rangle\sin(\gamma BB)+\langle\sigma_2(0)\rangle\cos(\gamma Bt)$$

Καθώς $\hat{\rho}=\frac{1}{2}(\hat{I}+\vec{r}\cdot\vec{\sigma})$ με $\hat{r}_i=\langle\hat{\sigma}_i\rangle$, βρίσκουμε το $\rho(t)$

β) Για $s=1$, $S_1(0)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$, $\hat{S}_2(0)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix}$

οπότε
$$\hat{S}_1(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&e^{-i\gamma Bt}&0\\e^{i\gamma Bt}&0&e^{-i\gamma Bt}\\0&e^{i\gamma Bt}&0\end{pmatrix}$$

o $\hat{S}_1(t)$ έχει ιδιοτιμή 0 με ιδιοδιάνυσμα $|0,t\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}e^{-i\gamma Bt}\\0\\e^{i\gamma Bt}\end{pmatrix}$

$+1$ με ιδιοδιάνυσμα $|1,t\rangle=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}e^{-i\gamma Bt}\\\sqrt{2}\\e^{i\gamma Bt}\end{pmatrix}$

-1 " $|-1,t\rangle=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}e^{-i\gamma Bt}\\-\sqrt{2}\\e^{i\gamma Bt}\end{pmatrix}$

Αρχικά $(t=0)$ $|\psi_0\rangle=|1,t=0\rangle=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$ οπότε

$$\mathrm{Prob}(0,t)=|\langle 0,t|\psi_0\rangle|^2=\frac{1}{2}\sin^2\gamma Bt$$
$$\mathrm{Prob}(1,t)=|\langle 1,t|\psi_0\rangle|^2=\frac{1}{4}(1+\cos\gamma Bt)^2$$
$$\mathrm{Prob}(-1,t)=|\langle -1,t|\psi_0\rangle|^2=\frac{1}{4}(1-\cos\gamma Bt)^2$$

(2)

Οι εξισώσεις είναι:

$$\frac{d}{dt}\hat{S}_\pm(t) = \mp \gamma b\, \delta(t-t_0)\, s_\pm(t)$$

$$\frac{d}{dt}\hat{S}_z(t)=0$$

Ολοκληρώνουμε την πρώτη εξίσωση από 0 ως t οπότε

$$\hat{S}_\pm(t) - S_\pm(0) = \mp\gamma b\int_0^t S_\pm(s)\,\delta(s-t_0)\,ds \quad (1)$$

Αν $t<t_0$, η συνάρτηση $\delta(s-t_0)$ δε μηδενίζεται πουθενά στο $[0,t]$ άρα το ολοκλήρωμα μηδενίζεται $\longrightarrow$ $\hat{S}_\pm(t) = \hat{S}_\pm(0)$

Αν $t>t_0$, η $S_\pm(t)$ έχει άλμα στο $t=t_0$

οπότε $\int_0^t \hat{S}_\pm(s)\,\delta(s-t_0)\,ds = \frac{1}{2}\left(S_\pm(t_0^+)+S_\pm(t_0^-)\right) = \frac{1}{2}\left(\hat{S}_\pm(t_0^+)+S_\pm(0)\right)$

Για $t>t_0$ $\quad \hat{S}_\pm(t) = \hat{S}_\pm(t_0^+)$ οπότε η (1) δίνει

$$\hat{S}_\pm(t) - S_\pm(0) = \mp\frac{\gamma b}{2}\left(\hat{S}_\pm(t) + S_\pm(\hat{0})\right) \longrightarrow$$

$$S_\pm(t) = \frac{1\mp i\gamma b/2}{1\pm i\gamma b/2}\, S_\pm(0)$$

Επιλέγοντας κατάλληλη τιμή του b μπορούμε να αλλάξουμε το $\hat{S}_\pm(t)$ κατά οποιαδήποτε γωνία.

③ Έστω $\vec{n}=(0,0,1)$. Οπότε $\vec{\mu}\cdot\vec{n}=\gamma\vec{S}\cdot\vec{n}=\gamma\hat{S}_3$

$$\hat{H}=-\frac{\gamma^2}{4\pi\alpha^3}\left(3\hat{S}_3\otimes\hat{S}_3-\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2\right)$$

Χρησιμοποιούμε βάση ως προς το ολικό σπιν $|S,M\rangle = \begin{matrix}|0,0\rangle\\|1,-1\rangle\\|1,0\rangle\\|1,1\rangle\end{matrix}$

(Εξ 11.119)

$$\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2|S,M\rangle=\frac{1}{2}\left(S(S+1)-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)\right)|S,M\rangle=\frac{1}{2}\left(S^2+S-\frac{3}{2}\right)|S,M\rangle$$

$$\hat{S}_3\otimes\hat{S}_3|0,0\rangle=\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)|0,0\rangle=-\frac{1}{4}|0,0\rangle$$

$$\hat{S}_3\otimes\hat{S}_3|1,1\rangle=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)|1,1\rangle=\frac{1}{4}|1,1\rangle$$

$$\hat{S}_3\otimes\hat{S}_3|1,0\rangle=\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)|1,0\rangle=\frac{1}{4}|1,0\rangle$$

$$\hat{S}_3\otimes\hat{S}_3|1,-1\rangle=\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)|1,-1\rangle=\frac{1}{4}|1,-1\rangle$$

$$\hat{H}|0,0\rangle=-\frac{\gamma^2}{4\pi\alpha^3}\left(3\left(-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)\right)|0,0\rangle=0$$

$$\hat{H}|1,-1\rangle=-\frac{\gamma^2}{4\pi\alpha^3}\left(3\cdot\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\left(1+1-\frac{3}{2}\right)\right)|1,-1\rangle=-\frac{1}{2}\frac{\gamma^2}{4\pi\alpha^3}|1,-1\rangle$$

$$\hat{H}|1,0\rangle=-\frac{\gamma^2}{4\pi\alpha^3}\left(3\left(-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{2}\left(1+1-\frac{3}{2}\right)\right)|1,0\rangle=\frac{\gamma^2}{4\pi\alpha^3}|1,0\rangle$$

$$\hat{H}|1,1\rangle=-\frac{\gamma^2}{4\pi\alpha^3}\left(3\cdot\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\left(1+1-\frac{3}{2}\right)\right)|1,1\rangle=-\frac{1}{2}\frac{\gamma^2}{4\pi\alpha^3}|1,1\rangle$$

(4) Διαλέγουμε $\vec{B} = (0,0,B)$ οπότε

$$\hat{H} = -\gamma B \hat{S}_z \otimes I - \gamma B\, I \otimes \hat{S}_z + \alpha\, \hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2$$

Στη βάση $|0,0\rangle$, $|1,1\rangle$, $|1,0\rangle$, $|1,-1\rangle$ $|S,M\rangle$ έχουμε

ιδιοτιμές $\frac{1}{2}\left(S(S+1) - \frac{1}{2}\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(S(S+1) - \frac{3}{2}\right)$

$$\hat{H}|0,0\rangle = \left[-\gamma B\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\frac{2}{\sqrt{2}} + \alpha \frac{1}{2}\left(0\cdot 1 - \frac{3}{2}\right)\right] = -\frac{3}{4}\alpha$$

$$\hat{H}|1,1\rangle = \left[-\gamma B\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) + \alpha\frac{1}{2}\left(1\cdot 2 - \frac{3}{2}\right)\right] = -\gamma B + \frac{\alpha}{4}$$

$$\hat{H}|1,0\rangle = \left[-\gamma B\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{\alpha}{2}\left(1\cdot 2 - \frac{3}{2}\right)\right] = \frac{\alpha}{4}$$

$$\hat{H}|1,-1\rangle = \left[-\gamma B\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right) + \frac{\alpha}{2}\left(1\cdot 2 - \frac{3}{2}\right)\right] = \gamma B + \alpha/4$$

Ιδιοδιανύσματα είναι τα $|0,0\rangle$, $|1,1\rangle$, $|1,0\rangle$, $|1,-1\rangle$

~~η θεμελιώδης είναι~~ αν $\alpha > 0$ η θεμελιώδης είναι

η $|0,0\rangle$ αν $-\frac{3}{4}\alpha < -\gamma B + \frac{\alpha}{4} \rightarrow \alpha > \gamma B$

η $|1,1\rangle$ αν $\alpha < \gamma B$

αν $\alpha < 0$, η θεμελιώδης είναι η $|1,1\rangle$

Άρα για $\alpha > \gamma B$, $Prob(s=1) = 0$

για $\alpha < \gamma B$, $Prob(s=1) = 1$

(5) ο τελεστής $\hat{S}_p \cdot \hat{S}_n$ έχει ιδιοτιμές $\frac{1}{2}\left(S(S+1) - \frac{1}{2}\,\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(S^2+S-\frac{3}{2}\right)$

Στον ιδιόχωρο $S=0$, το δυναμικό είναι $V_0(r) + \lambda\cdot\left(-\frac{3}{4}\right) V_0(r) =$

$$= \left(1-\frac{3}{4}\lambda\right) V_0(\hat{r})$$

$S=1$, το δυναμικό είναι $V_0(r) + \lambda\left(2-\frac{3}{2}\right) V_0(r)$

$$= \left(1+\frac{1}{2}\lambda\right) V_0(r)$$

Άρα το ζητούμενο είναι να βρούμε πως αλλάζουν οι ιδιοτιμές E_{nl} αν πολλαπλασιάσουμε το δυναμικό με μία σταθερά

$$H' = \frac{p^2}{2m} + aV(r) = a\left(\frac{p^2}{2ma} + V(r)\right) = a\left(\frac{p^2}{2m'} + V(r)\right), \text{ όπου } m' = ma$$

Αν $E_{nl}(m)$ είναι οι ιδιοτιμές του $\hat{H}$ ως συνάρτηση του m, τότε οι ιδιοτιμές του H' είναι $a\,E_{nl}(am)$

Άρα στον ιδιόχωρο $S=0$, οι ιδιοτιμές είναι $\left(1-\frac{3}{4}\lambda\right) E_{nl}\left(\left(1-\frac{3}{4}\lambda\right)m\right)$

$S=1$ 〃 $\left(1+\frac{1}{2}\lambda\right) E_{nl}\left(\left(1+\frac{1}{2}\lambda\right)m\right)$