Κεφ. 6

(1) $\sigma_+ \begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}c_2\\0\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix} \to \begin{matrix}c_2=\lambda c_1\\ 0=\lambda c_2\end{matrix}$

$\to$ αν $\begin{matrix}\lambda\neq 0,\ c_1=c_2=0\\ \lambda=0 \to c_2=0\end{matrix}$ $\to$ άρα ο σ_+ έχει ένα ιδιοδιάνυσμα, το $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ με ιδιοτιμή 0.

ομοίως, ο σ_- έχει ένα ιδιοδιάνυσμα, το $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ με ιδιοτιμή 0.

---

(2) αν $\hat{A}$ αυτοσυζυγής, $\hat{A} = \begin{pmatrix}a_0+a_3 & a_1-ia_2\\ a_1+ia_2 & a_0-a_3\end{pmatrix}$. Για να είναι μοναδιαίος, $AA^\dagger = I \to$

$\to \hat{A}^2 = \hat{I}$: $\hat{A}^2 = \begin{pmatrix}a_0+a_3 & a_1-ia_2\\ a_1+ia_2 & a_0-a_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0+a_3 & a_1-ia_2\\ a_1+ia_2 & a_0-a_3\end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix}a_0^2+2a_0a_3+|\vec{a}|^2 & 2a_0(a_1-ia_2)\\ 2a_0(a_1+ia_2) & a_0^2-2a_0a_3+|\vec{a}|^2\end{pmatrix}$

Άρα, αν $\hat{A}^2=\hat{I} \to$
$a_0^2+2a_0+a_3+|\vec{a}|^2=1$ (1)
$a_0^2-2a_0a_3+|\vec{a}|^2=1$ (2)
$2a_0(a_1-ia_2)=0$ (3)

(3) $\to$ $a_0=0$ ή $a_1=a_2=0$.

αν $a_0=0$, (1),(2) $\to |\vec{a}|^2=1 \to \hat{A}=\vec{a}\cdot\vec{\sigma}$ για $|\vec{a}|=1$

αν $a_1=a_2=0$, $\left.\begin{matrix}(1)\to(a_0+a_3)^2=1\\(2)\to(a_0-a_3)^2=1\end{matrix}\right\}$ $2a_0a_3=0 \to \begin{cases}a_0=0 \to |a_3|=1\\ \text{ή}\\ a_3=0,\ \text{άρα } |a_0|=1\end{cases}$

$\hat{A} = \pm I,\ \pm\hat{\sigma_3}$

Άρα οι τελεστές που είναι και αυτοσυζυγείς και μοναδιαίοι είναι οι $\pm I$, $\vec{a}\cdot\vec{\sigma}$ με $|\vec{a}|=1$

---

(3) Έστω $\hat{A}=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\ \gamma&\delta\end{pmatrix} \to \sigma_1 A\sigma_1+\sigma_2 A\sigma_2+\sigma_3 A\sigma_3=$

$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\ \gamma&\delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\ \gamma&\delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\ \gamma&\delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}\gamma&\delta\\ \alpha&\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-i\gamma&-i\delta\\ i\alpha&i\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\ -\gamma&-\delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}\delta&\gamma\\ \beta&\alpha\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\delta&-\gamma\\ -\beta&\alpha\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha&-\beta\\ -\gamma&\delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\delta+\alpha&-\beta\\ -\gamma&2\alpha+\delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\delta+2\alpha&0\\ 0&2\delta+2\alpha\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\ \gamma&\delta\end{pmatrix}$

$=2(\delta+\alpha)\hat{I}-\hat{A}=2(\mathrm{Tr}\hat{A})\cdot I-\hat{A}$

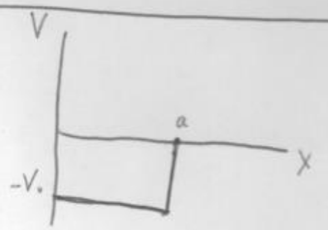
(14) Οι ιδιοσυναρτήσεις του αρμονικού ταλαντωτή είναι $\psi_n(x) = C_n e^{-\frac{m\omega}{2}x^2} H_n(\sqrt{m\omega}\, x)$

Η απαίτηση $\psi_n(0) = 0 \to H_n(0) = 0 \to n$ περιττός, $n = 2k+1$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Άρα ιδιοτιμές ενέργειας $E_k = \omega(2k+1+\frac{1}{2}) = \omega(2k+\frac{3}{2})$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

---

(15)



Θεωρούμε

για $E<0$

Για $0<x<a$, $\psi'' + 2m(E+V_0)\psi = 0 \to \psi_0'' + 2m(V_0 - |E|) = 0 \to \psi = A\sin kx$, $k = \sqrt{2m(V_0 - |E|)}$

Για $x>0$, $\psi'' - 2m|E|\psi = 0 \to \psi = C e^{\pm\sqrt{2m|E|}}$, μόνο η $(-)$ είναι αποδεκτό για να είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη

$$\psi(x) = \begin{cases} A\sin kx & 0 \le x < a \\ C e^{-\lambda x} & x \geq a \end{cases}$$

$\lambda = \sqrt{2m|E|}$

$$\psi'(x) = \begin{cases} Ak\cos kx & 0 \le x < a \\ -\lambda C e^{-\lambda} & x > a \end{cases}$$

$\psi(a)$ συνεχής $\to A\sin ka = Ce^{-\lambda a}$

$\psi'(a)$ συνεχής $\to Ak\cos ka = -\lambda Ce^{-\lambda a}$

διαιρώντας κατά μέλη $\frac{1}{k}\tan ka = -\frac{1}{\lambda} \to \lambda \tan ka = -k$ (3)

$ak = \sqrt{2m(V_0 - |E|)}\, a = \sqrt{2mV_0}\, a \sqrt{1 - \frac{|E|}{V_0}} = b\sqrt{1-x}$, $x = \frac{|E|}{V_0}$, $b = \sqrt{2mV_0}\, a$

$a\lambda = a\sqrt{2m|E|} = b\sqrt{x}$

(3) $\longrightarrow \sqrt{x}\tan(b\sqrt{1-y}) = -\sqrt{1-x}$

Για b κοντά στο, $\tan(b\sqrt{1-x}) \simeq b\sqrt{1-x}$, άρα $\sqrt{x}\, b\sqrt{1-x} = -\sqrt{1-y} \to b\sqrt{x} = -1$

αδύνατο

(16) Γράφουμε $S = \frac{T^2}{1+R} - \bar{R} \to |S|^2 = \frac{|T|^4}{|1+R|^2} + |\bar{R}|^2 - \frac{T^2\bar{R}^*}{1+R} - \frac{T^{*2}\bar{R}}{1+R^*}$

καθώς $|R| = |\bar{R}|$ και $T\bar{R}^* = -T^*R$ παίρνουμε

$$|S|^2 = \frac{|T|^4}{|1+R|^2} + |R|^2 + |T|^2\left(\frac{R}{1+R} + \frac{R^*}{1+R^*}\right) = \frac{|T|^4}{|1+R|^2} + |R|^2 + \frac{|T|^2}{|1+R|^2}\left(2|R|^2 + R + R^*\right)$$

$$= |R|^2 + \frac{|T|^2\left(|T|^2 + 2|R|^2 + R + R^*\right)}{|1+R|^2}$$

$$= |R|^2 + \frac{|T|^2\left(1 + |R|^2 + R + R^*\right)}{|1+R|^2} = |R|^2 + |T|^2 = 1 \longrightarrow S = e^{i\theta}$$

Για $V(x) = \eta\,\delta(x)$, $T = \frac{1}{1+\frac{im\eta}{k}}$, $R = -\frac{1}{1-\frac{ik}{m\eta}} = \bar{R}$

θ:

$$1+R = 1 - \frac{1}{1-\frac{ik}{m\eta}} = \frac{-\frac{ik}{m\eta}}{1-\frac{ik}{m\eta}} = \frac{1}{1+\frac{im\eta}{k}} = T \;\longrightarrow\; e^{i\theta} = \frac{T^2}{T} - R = T - R = \frac{1}{1+\frac{im\eta}{k}} + \frac{\frac{im\eta}{k}}{1+\frac{im\eta}{k}} = 1 \to \theta = 0$$

---

(17) α) $\int_0^\infty \phi^*(x)\,Q\psi(x)\,dx = \int_0^\infty \phi^*(x)\left(-ix\frac{\partial\psi}{\partial x} - i\frac{\psi}{2}\right)dx = \phi^*(x)(-ix\psi)\Big|_0^\infty + \int_0^\infty dx\left(i\frac{\partial}{\partial x}(x\phi^*)\psi - \frac{i\phi^*\psi}{2}\right)$

$= \int_0^\infty dx\left(i\phi^*\psi + ix\left(\frac{\partial}{\partial x}\phi^*\right)\psi - \frac{i}{2}\phi^*\psi\right) = \int_0^\infty\left(-ix\frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{i}{2}\right)^*\psi\,dx = \int_0^\infty dx\,(\hat{Q}\phi)^*\psi \longrightarrow \hat{Q}$ αυτοσυζυγής

β) $\hat{Q}f_q(x) = -ix\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}x^{-\frac{1}{2}+iq}\right) - \frac{i}{2}f_q(x) = -i\left(-\frac{1}{2}+iq\right)f_q(x) - \frac{i}{2}f_q(x) = q\,f_q(x)$

άρα $f_q(x)$ ιδιοσυνάρτηση του q.

$$\int_0^\infty f_q(x)\,f^*_{q'}(x)\,dx = \int_0^\infty \frac{dx}{2\pi x}\,x^{i(q-q')} \overset{x=e^y}{=} \int_{-\infty}^\infty \frac{dy}{2\pi}\,e^{i(q-q')y} = \delta(q-q')$$

γ) Υπολογίζουμε $[\hat{Q},\hat{x}]$: $\hat{Q}\hat{x}\psi(x) = -ix\frac{\partial}{\partial x}(x\psi) - \frac{i}{2}x\psi = -ix^2\frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{3i}{2}x\psi$,

$\hat{x}\hat{Q}\psi = -ix^2\frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{i}{2}x\psi \rightarrow [\hat{Q},\hat{x}]\psi(x) = -ix\psi(x) \rightarrow [\hat{Q},\hat{x}] = -i\hat{x}$

$$e^{is\hat{Q}}\hat{x}e^{-is\hat{Q}} = \hat{x} + [is\hat{Q},\hat{x}] + \frac{1}{2!}[is\hat{Q},[is\hat{Q},x]] + \ldots$$

$$= \hat{x} + s\hat{x} + \frac{1}{2!}[is\hat{Q}, s\hat{x}] + \ldots = \hat{x} + s\hat{x} + \frac{s^2}{2}\hat{x} + \ldots = e^s\hat{x}$$

Ο $\hat{Q}$ γεννά μετασχηματισμούς ανακλιμάκωσης

---

(19) Εκτός από το $x=0$, η εξ. ιδιοτιμών $\psi'' + k^2\psi = 0$ $(k = \sqrt{2mE})$ ~~έχει~~ έχει λύσεις

$$\psi(x) = Ae^{\frac{2i n\pi}{L}x} + Be^{-\frac{2i n\pi}{L}x} \qquad \left(\text{λόγω περιοδικότητας } k = \frac{2n\pi}{L},\ n = 0, \pm1, \pm2, \ldots\right)$$

Για δυναμικό δέλτα: η συνθήκη συνέχειας ~~είναι~~ ικανοποιείται ταυτοτικά.

Η συνθήκη για την παράγωγο δίνει: $\underbrace{\psi'(0^+) - \psi'(0^-)}_{\text{ίσα}} = 2m\eta\,\psi(0) \longrightarrow \psi(0) = 0$

Άρα $A + B = 0$, λύσεις $\psi(x) = C\sin\frac{2n\pi}{L}x$

Το δυναμικό δέλτα μετατρέπει τις περιοδικές συνοριακές συνθήκες σε Dirichlet.

---

(20) αν πάρω ως μεταβλητή τη γωνία $\theta = \frac{2\pi}{L}x$, η συνθήκη $\psi(L) = e^{2\pi i\alpha}\psi(0)$ γίνεται $\psi(2\pi) = e^{2\pi i\alpha}\psi(0)$ (1)

Έστω $\hat{\ell}\psi(\theta) = b\,\psi(\theta) \rightarrow -i\psi' = b\psi \rightarrow \psi = Ce^{ib\theta}$.

Η (1) δίνει $Ce^{ib2\pi} = e^{2\pi i\alpha} \longrightarrow e^{2i\pi(b-\alpha)} = 1 \longrightarrow b = \alpha + n$, για $n \in \mathbb{Z}$

Άρα ιδιοδιανύσματα $\psi_n(\theta) = Ce^{i(\alpha+n)\theta}$ με ιδιοτιμές $(n+\alpha)$, $n \in \mathbb{Z}$

Ο ℓ^2 έχει ιδιοτιμές $(n+\alpha)^2$, η ελάχιστη τιμή είναι είτε η α^2 είτε η $(-1+\alpha)^2$ ανάλογα με το ποια είναι η μικρότερη.

(21) Διόρθωση 1ης τάξης:

$$E_1^{(1)} = g\langle n|\hat{x}^3|n\rangle = \frac{g}{(2m\omega)^{3/2}} \langle n|(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)^3|n\rangle = 0$$

μόνο όροι με άρτιο αριθμό $a, a^\dagger$ μπορεί να συνεισφέρουν

$$V_{kn} = g\langle k|\hat{x}^3|n\rangle = \frac{g}{(2m\omega)^{3/2}} \langle k|(\hat{a}+a^\dagger)^3|n\rangle$$

Για να το υπολογίσουμε, $(a+a^\dagger)^3 = (a+a^\dagger)^2(a+a^\dagger) = (a^2+a^{\dagger 2}+aa^\dagger+a^\dagger a)(a+a^\dagger) =$

$$= (a^2+a^{\dagger 2}+2\hat{N}+\hat{I})(a+a^\dagger) = a^3+a^2a^\dagger+a^{\dagger 2}a+a^{\dagger 3}+(2N+I)(a+a^\dagger) =$$

$$= a^3+a^{\dagger 3}+a(N+I)+a^\dagger N+(2N+I)(a+a^\dagger)$$

Άρα $\langle k|(a+a^\dagger)^3|n\rangle = \langle k|a^3|n\rangle + \langle k|a^{\dagger 3}|n\rangle + \langle k|a(N+I)|n\rangle + \langle k|a^\dagger N|n\rangle$
$+ \langle k|(2N+1)(a+a^\dagger)|n\rangle =$

$$= \sqrt{n(n-1)(n-2)}\ \langle k|n-3\rangle + \sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}\ \langle k|n+3\rangle + (n+1)\langle k|a|n\rangle + n\langle k|a^\dagger|n\rangle$$

$$+ (2k+1)\langle k|a|n\rangle + (2k+1)\langle k|a^\dagger|n\rangle =$$

$$= \sqrt{n(n-1)(n-2)}\ \delta_{k,n-3} + \sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}\ \delta_{k,n+3} + (n+1)\sqrt{n}\ \delta_{k,n-1}$$

$$+ n\sqrt{n+1}\ \delta_{k,n+1} + (2k+1)\sqrt{n}\ \delta_{k,n-1} + (2k+1)\sqrt{n+1}\ \delta_{k,n+1}$$

$$= \sqrt{n(n-1)(n-2)}\ \delta_{k,n-3} + \sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}\ \delta_{k,n+3} + 3n^{3/2}\delta_{k,n-1} + 3(n+1)^{3/2}\delta_{k,n+1}$$

Στον υπολογισμό του $|V_{kn}|^2$ κάθε όρος υψώνεται ξεχωριστό στο ~~τετρά~~ τετράγωνο γιατί ποτέ δεν μπορούν δύο όροι να είναι διάφοροι του μηδενός ταυτόχρονα.

$$|V_{kn}|^2 = \left[n(n-1)(n-2)\delta_{k,n-3} + (n+1)(n+2)(n+3)\delta_{k,n+3} + 9n^3\delta_{k,n-1} + 9(n+1)^3\delta_{n,k+1}\right]\frac{g}{(2m\omega)^3}$$

$$E_n^{(2)} = \sum_{k\neq n} \frac{|V_{kn}|^2}{E_n^{(0)}-E_k^{(0)}} = \frac{g^2}{(2m\omega)^3}\left[\frac{n(n-1)(n-2)}{E_n^{(0)}-E_{n-3}^{(0)}} + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{E_n^{(0)}-E_{n+3}^{(0)}} + \frac{9n^3}{E_n^{(0)}-E_{n-1}^{(0)}}\right.$$

$$\left. + \frac{9(n+1)^3}{E_n^{(0)}-E_{n+1}^{(0)}}\right) = \frac{g^2}{8m^3\omega^3}\left[\frac{n(n-1)(n-2)}{3\omega} - \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3\omega} + \frac{9n^3}{\omega} - \frac{9(n+1)^3}{\omega}\right]$$

$$= -\frac{5g^2}{4m^3\omega^4}\left(3n^2+3n+\frac{11}{10}\right)$$

(22) Παρατηρούμε ότι $\hat{V}\sin\frac{n\pi}{L}x = V_0 \cos\frac{\pi x}{L}\sin\frac{n\pi}{L}x = V_0\frac{1}{2}\left(\sin\frac{(n+1)\pi}{L}x + \sin\frac{(n-1)\pi}{L}x\right)$

Άρα $\hat{V}|n\rangle = \frac{1}{2}V_0\left(|n+1\rangle + |n-1\rangle\right)$ για $n>1$ και $V|1\rangle = \frac{1}{2}V_0|2\rangle$ για $n=1$

α) $E_n^{(1)} = \langle n|\hat{V}|n\rangle = \frac{V_0}{2}\left(\langle n|n+1\rangle + \langle n|n-1\rangle\right) = 0$

β) $V_{kn} = \langle k|\hat{V}|n\rangle = \frac{V_0}{2}\left(\langle k|n+1\rangle + \langle k|n-1\rangle\right) = \frac{V_0}{2}\left(\delta_{k,n+1} + \delta_{k,n-1}\right)$

Για $n=1$ $\quad V_{k1} = \frac{V_0}{2}\delta_{k2}$

$$|1\rangle_{(1)} = \sum_{k\neq n}\frac{V_{k,1}}{E_1^{(0)}-E_k^{(0)}}|k\rangle = \frac{\frac{1}{2}V_0\ |2\rangle}{\frac{\pi^2}{2mL^2}-\frac{4\pi^2}{2mL^2}} = -\frac{mL^2V_0}{3\pi^2}|2\rangle$$

γ) $$E_1^{(2)} = \sum_{k\neq 1}\frac{|V_{k1}|^2}{E_1^{(0)}-E_k^{(0)}} = \frac{\frac{1}{4}V_0^2}{\frac{\pi^2}{2mL^2}-\frac{4\pi^2}{2mL^2}} = -\frac{mL^2V_0^2}{6\pi^2}$$

$V_{k2} = \frac{V_0}{2}\left(\delta_{k3} + \delta_{k1}\right)$

$$E_2^{(2)} = \sum_{k\neq 2}\frac{|V_{k2}|^2}{E_2^{(0)}-E_k^{(0)}} = \frac{\frac{1}{4}V_0^2}{\frac{4\pi^2}{2mL^2}-\frac{9\pi^2}{2mL^2}} + \frac{\frac{1}{4}V_0^2}{\frac{4\pi^2}{2mL^2}-\frac{\pi^2}{2mL^2}} = -\frac{mL^2V_0^2}{10\pi^2} + \frac{mL^2V_0^2}{6\pi^2} = \frac{mL^2V_0^2}{15\pi^2}$$

---

(23) Γράφουμε στον ιδιόχωρο των $|a\rangle, |b\rangle$, $E_a = \bar{E} + \frac{\Delta}{2}$, $E_b = \bar{E} - \frac{\Delta}{2}$

$$V' = V + \frac{\Delta}{2}|a\rangle\langle a| - \frac{\Delta}{2}|b\rangle\langle b| \rightarrow V' = \begin{pmatrix} V_{aa}+\frac{\Delta}{2} & V_{ab} \\ V_{ab}^{*} & V_{bb}-\frac{\Delta}{2}\end{pmatrix}$$

ο πίνακας V' γράφεται ως $V' = a_0 I + \vec{a}\cdot\vec{\sigma}$, όπου

$a_0 = \frac{V_{aa}+V_{bb}}{2}$, $\quad \vec{a} = \left(\mathrm{Re}\,V_{ab}, -\mathrm{Im}\,V_{ab}, \Delta + \frac{V_{aa}-V_{bb}}{2}\right)$

ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα βγαίνουν από την ανάλυση για κιούμπιτ. Π.χ.

$$E_{\pm}^{(1)} = a_0 \pm |\vec{a}| = \frac{V_{aa}+V_{bb}}{2} \pm \sqrt{|V_{ab}|^2 + \left(\Delta + \frac{V_{aa}-V_{bb}}{2}\right)^2}$$

(24) $H_0 = \frac{1}{2m}\hat{p}^2$ με ιδιοτιμές $E_n = \frac{1}{2mR^2}n^2$ και ιδιοδιανύσματα $\frac{1}{\sqrt{L}}e^{in\theta}$ $n = 0, \pm 1, \pm 2$

Για $n=0$ δεν έχουμε εκφυλισμό $E_0 = 0$

$$E_0^{(1)} = \langle 0|\hat{V}|0\rangle = \frac{R}{L}\int_0^{\alpha} V_0 \theta d\theta = \frac{V_0}{2\pi}\frac{\alpha^2}{2} = \frac{V_0\alpha^2}{4\pi}$$

Για $n>0$ έχουμε εκφυλισμό 2. ~~Υπολογίζουμε~~ αφού έχουμε ίδιες ιδιοτιμές για $\pm n$

$$V_{++} = \langle n|\hat{V}|n\rangle = \frac{R}{L}V_0\int_0^{\alpha}\theta d\theta = \frac{V_0\alpha^2}{4\pi}$$

$$V_{--} = \langle n|\hat{V}|n\rangle = \frac{V_0\alpha^2}{4\pi}$$

$$V_{+-} = \langle n|\hat{V}|-n\rangle = \frac{R}{L}V_0\int_0^{\alpha}\theta e^{-2in\theta}d\theta = \frac{V_0}{8\pi n^2}\left(-1+e^{-2i\alpha n}(1+2i\alpha n)\right)$$

$$= \frac{V_0\alpha^2}{4\pi^2}Z_n \quad \text{όπου} \quad Z_n = \frac{1}{2\alpha^2 n^2}\left(-1+e^{-2i\alpha n}(1+2i\alpha n)\right)$$

$$V_{-+} = V_{+-}^*$$

Άρα στον ιδιόχωρο ~~για~~ εκφυλισμού

$$V = \frac{V_0\alpha^2}{4\pi}\begin{pmatrix} 1 & Z_n \\ Z_n^* & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{ιδιοτιμές} \quad E_\pm = \frac{V_0\alpha^2}{4\pi}\left(1 \pm |Z_n|\right)$$