Κεφ. 4

1. α) $\psi(x)=\frac{\sin x}{x}$ παντού συνεχής ($\psi(x)\to 1$ για $x\to 0$). Άρα $\int_{-\infty}^{\infty} dx|\psi(x)|^2=\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\frac{\sin^2 x}{x^2}$

$=2\int_0^{\infty} dx\,\frac{\sin^2 x}{x^2}=2\int_0^1 dx\,\frac{\sin^2 x}{x^2}+2\int_1^{\infty} dx\,\frac{\sin^2 x}{x^2}$. Το πρώτο ολοκλήρωμα είναι

πεπερασμένο, το δεύτερο $\int_1^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx<\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}=2\left(-\frac{1}{x}\right)_1^{\infty}=2<\infty$

Άρα $\int_{-\infty}^{\infty} dx\,|\psi(x)|^2<\infty$

β) $\psi(x)=\frac{1-\cos x}{x}$, παντού συνεχής $\left(\lim_{x\to 0}\psi(x)=0\right)$. Βρίσκουμε $\int_{-\infty}^{\infty} dx|\psi(x)|^2=$

$=\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\frac{(1-\cos x)^2}{x^2}=2\int_0^{\infty} dx\,\frac{(1-\cos x)^2}{x^2}=2\int_0^1 dx\,\frac{(1-\cos x)^2}{x^2}+2\int_1^{\infty}\frac{(1-\cos x)^2}{x^2}dx$.

$1-\cos x<2$

Το πρώτο ολοκλήρωμα είναι πεπερασμένο, το δεύτερο $\int_1^{\infty}\frac{(1-\cos x)^2}{x^2}dx<\int_1^{\infty}\frac{2^2}{x^2}dx=$

$=4\left(-\frac{1}{x}\right)_1^{\infty}=4<\infty$. Άρα $\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x)|^2dx<\infty$

γ) $\psi(x)=\frac{x}{\sinh x}$, παντού συνεχής $\left(\lim_{x\to 0}\psi(x)=1\right)$. Βρίσκουμε $\int_{-\infty}^{\infty} dx\,|\psi(x)|^2=$

$=\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\frac{x^2}{\sinh^2 x}=2\int_0^{\infty} dx\,\frac{x^2}{\sinh^2 x}=2\int_0^1 dx\,\frac{x^2}{\sinh^2 x}+2\int_1^{\infty} dx\,\frac{x^2}{\sinh^2 x}$. Ο πρώτος όρος είναι

πεπερασμένος. Για το δεύτερο χρησιμοποιούμε ότι $\sinh x=$ $\geq\frac{1}{3}e^x$, $x\geq 1$

Άρα $\int_1^{\infty} dx\,\frac{x^2}{\sinh^2 x}\leq\int_1^{\infty} dx\,\frac{x^2}{\frac{1}{9}e^{2x}}=9\int_1^{\infty}x^2e^{-2x}dx<9\int_0^{\infty}dx\,x^2e^{-2x}=9/4$. Άρα $\int_{-\infty}^{\infty}dx\,|\psi(x)|^2<\infty$

δ) $\psi(x)=\frac{1}{|x|^{1/4}(1+x^2)}$, παντού συνεχής εκτός από το $x=0$

$\int_{-\infty}^{\infty} dx\,|\psi(x)|^2=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{|x|}\,(x^2+1)^2}=2\int_0^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}\,(x^2+1)^2}=2\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}(x^2+1)^2}+2\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}\,(x^2+1)^2}$

ο πρώτος όρος: $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}(x^2+1)^2}<\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}=(2\sqrt{x})\Big|_0^1=2<\infty$

ο δεύτερος όρος: $\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}\,(x^2+1)^2}<\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}\,x^4}=\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{9/2}}=\frac{2}{7}<\infty$

Άρα $\int_{-\infty}^{\infty}dx\,|\psi(x)|^2<\infty$

$\boxed{2}$ α) $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, |\psi(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4} = 2\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4} = 2\int_0^1 \frac{dx}{x^4} + 2\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^4}$

δεύτερος όρος: $2\left(-\frac{1}{3x^3}\right)\Big|_1^{\infty} = \frac{2}{3} < \infty$. Πρώτος όρος $\int_0^1 \frac{dx}{x^4} = 2\left(-\frac{1}{3x^3}\right)\Big|_0^1 = -\frac{2}{3} + \infty = \infty$

Άρα $\int |\psi(x)|^2 dx \to \infty$

β) $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, |\psi(x)|^2 = 2\int_0^{\infty} \frac{dx}{(\sqrt{x}+1)^2} = 2\int_0^{1} \frac{dx}{(\sqrt{x}+1)^2} + 2\int_1^{\infty} \frac{dx}{(\sqrt{x}+1)^2}$

πρώτο ολοκλήρωμα πεπερασμένο. Δεύτερο ολοκλήρωμα $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(\sqrt{x}+1)^2} > \int_1^{\infty} \frac{dx}{(\sqrt{x}+\sqrt{x})^2} =$
$= \frac{1}{4}\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \frac{1}{4} \log x \Big|_1^{\infty} = \infty$. Άρα $\int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi(x)|^2 \to \infty$

$\boxed{3}$ Η συνθήκη $\|\psi+\phi\|^2 = \|\psi\|^2 + \|\phi\|^2$ δίνει $(\psi,\phi) + (\phi,\psi) = 0 \to Re(\phi,\psi) = 0$.
Η συνθήκη μπορεί να ισχύει για ~~...~~ μη ορθογώνια διανύσματα π.χ $\phi = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, $\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{5}$ Αν $\|\phi\| \le \|\phi + \lambda\psi\| \to \|\phi\|^2 \le \|\phi + \lambda\psi\|^2 \to (\phi,\phi) \le (\phi+\lambda\psi, \phi+\lambda\psi) \longrightarrow$

$(\phi,\phi) \le (\phi,\phi) + |\lambda|^2 (\psi,\psi) + \lambda(\psi,\phi) + \lambda^*(\phi,\psi) \to |\lambda|^2 (\psi,\psi) + \lambda(\psi,\phi) + \lambda^*(\phi,\psi) \ge 0 \quad (1)$

Αν η (1) ισχύει για κάθε λ, ισχύει και για $\lambda = -\frac{(\phi,\psi)}{\|\psi\|^2}$, οπότε γίνεται

$-\frac{1}{\|\psi\|^2} |(\psi,\phi)|^2 \ge 0$, που ικανοποιείται μόνο αν $(\psi,\phi) = 0$

Αντίστροφα, αν $(\phi,\psi) = 0$, η (1) ικανοποιείται για κάθε λ.

$\|\phi+\lambda\psi\| = \|\phi - \lambda\psi\| \to (\phi+\lambda\psi, \phi+\lambda\psi) = (\phi-\lambda\psi, \phi-\lambda\psi) \longrightarrow (\phi,\phi) + |\lambda|^2 (\psi,\psi) +$
$+ \lambda(\psi,\phi) + \lambda^*(\phi,\psi) = (\phi,\phi) + |\lambda|^2 (\psi,\psi) - \lambda(\psi,\phi) - \lambda^*(\phi,\psi) \longrightarrow \lambda(\psi,\phi) + \lambda^*(\phi,\psi) = 0 \quad (2)$

Αν $(\phi,\psi) = 0$, η (2) ισχύει πάντα.

Αν η (2) ισχύει για κάθε λ, ισχύει για ~~κάθε~~ $\lambda = (\phi,\psi)$ οπότε
$2\,|(\phi,\psi)|^2 = 0 \to (\phi,\psi) = 0$

(7) Σύμφωνα με την ανάλυση Φουριέ, εφόσον $\phi(0) = \phi(1) = 0$

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi x) \longrightarrow \|\phi\|^2 = \int_0^1 dx\, |\phi(x)|^2 = \sum_{n,m} c_n c_m^* \left(\sin n\pi x, \sin m\pi x\right)$$

$$\left(\sin(n\pi x), \sin(m\pi x)\right) = \int_0^1 dx\, \sin(n\pi x)\sin(m\pi x) = \frac{1}{2}\int_0^1 dx\, \left(\cos(n-m)\pi x - \cos(n+m)\pi x\right)$$

Καθώς $\int_0^1 \cos(N\pi x)\,dx = \begin{cases} 1, & \text{αν } N=0 \\ 0, & \text{αν } N\neq 0 \end{cases}$, $\left(\sin(n\pi x), \sin(m\pi x)\right) = \frac{1}{2}\delta_{nm}$

Άρα $\|\phi\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$

$$\|\phi'\|^2 = \int_0^1 dx\, |\phi'|^2 = \phi^*(x)\phi'(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 dx\, \phi^*(x)\phi''(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} c_n c_m^* n^2\pi^2 \times\left(\sin(n\pi x), \sin(m\pi x)\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} c_n c_m^* n^2\pi^2 \frac{1}{2}\delta_{nm} = \frac{\pi^2}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n^2|c_n|^2 \geq \frac{1}{2}\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2 \quad \longleftarrow \text{αφού } n\geq 1$$

$$= \pi^2\|\phi\|^2 > \|\phi\|^2$$

$\boxed{8}$ $\|\psi-\phi\|^2 = \|\psi\|^2+\|\phi\|^2 - (\psi,\phi) - (\phi,\psi) = 2-(\psi,\phi)-(\phi,\psi)$

Γράφουμε $(\psi,\phi)=|(\psi,\phi)|e^{i\gamma} \to \|\psi-\phi\|^2 = 2-2\cos\gamma\,|(\psi,\phi)|$. Μέγιστη τιμή αν $\gamma=\pi$, $|(\psi,\phi)|=1$ και ελάχιστη για $\gamma=0$, $|(\psi,\phi)|=1$, οπότε $0\le\|\psi-\phi\|^2\le 4$

$\to 0\le\|\psi-\phi\|\le 2$

$$\|\psi-e^{i\theta}\phi\|^2 = \|\psi\|^2+\|\phi\|^2 - e^{i\theta}(\psi,\phi) - e^{-i\theta}(\phi,\psi) = 2-2\,\mathrm{Re}\, e^{i\theta}(\phi,\psi) =$$

$$= 2-2\left(\mathrm{Re}\, e^{i(\theta+\gamma)}\right)|(\phi,\psi)| = 2\left(1-|(\phi,\psi)|\cos(\theta+\gamma)\right)$$ Το ελάχιστο επιτυγχάνεται για $\cos(\theta+\gamma)=0$ οπότε $\|\psi-e^{i\theta}\phi\|_{min} = 2(1-|(\phi,\psi)|)$.

$\boxed{9}$ α) $$\int_{-1}^{1} dx\, P_\ell(x) P_{\ell'}(x) = \frac{1}{2^{\ell+\ell'}\ell!\,\ell'!}\int_{-1} dx\, \frac{d^{\ell'}}{dx^{\ell'}}(x^2-1)^{\ell'} \frac{d^\ell}{dx^\ell}(x^2-1)^\ell$$

Παρατηρούμε ότι με ολοκλήρωση κατά παράγοντες οι συνοριακοί όροι πάντα μηδενίζονται. ~~οπότε~~ Για $\ell'\ge\ell$ κάνουμε ℓ' παραγοντικές ολοκληρώσεις

οπότε $$\int_{-1}^{1} dx\, P_\ell(x) P_{\ell'}(x) = \frac{(-1)^{\ell'}}{2^{\ell+\ell'}\ell!\,\ell'!}\int_{-1}^{1} dx\, (x^2-1)^{\ell'}\frac{d^{\ell+\ell'}}{dx^{\ell+\ell'}}(x^2-1)^\ell$$

Το $(x^2-1)^\ell$ είναι πολυώνυμο βαθμού 2ℓ. Αφού $\ell+\ell'\ge 2\ell$, οι παραγωγίσεις πάντα το μηδενίζουν, άρα μόνο η περίπτωση $\ell=\ell'$ είναι μη μηδενική.

Βρίσκουμε $$\int_{-1}^{1} dx\, [P_\ell(x)]^2 = \frac{(-1)^\ell}{2^{2\ell}(\ell!)^2}\int_{-1}^{1} dx\,(x^2-1)^\ell \frac{d^{2\ell}}{dx^{2\ell}}(x^2-1)^\ell$$

Η παραγώγιση δίνει μη μηδενικό όρο το $\frac{d^{2\ell}}{dx^{2\ell}}x^{2\ell}=(2\ell)!$, οπότε

$$\int_{-1}^{1} dx\,[P_\ell(x)]^2 = \frac{(-1)^\ell(2\ell)!}{2^{2\ell}(\ell!)^2}\int_{-1}^{1} dx\,(x^2-1)^\ell = \frac{(-1)^\ell(2\ell)!}{2^{2\ell-1}(\ell!)^2}\int_0^1 dx\,(x^2-1)^\ell$$

Από πίνακα ολοκληρωμάτων $\int_0^1 dx\,(x^2-1)^\ell = \frac{2^\ell(\ell!)^2}{(2\ell)!(2\ell+1)}$

Οπότε $\int_{-1}^{1} dx\,[P_\ell(x)]^2 = \frac{2}{2\ell+1}$

β) Αφού τα πολυώνυμα που προκύπτουν από τον τύπο του Ροντρίγκες ορίζουν ορθοκανονική βάση στο $L^2([-1,1])$, όπως δείξαμε, και αφού η μοναδική τέτοια βάση είναι τα πολυώνυμα Λεζάντρ (από κατασκευής), ισχύει ο τύπος του Ροντρίγκες ως έκφραση για τα πολυώνυμα Λεζάντρ.

$\boxed{9}$ α). Είναι βολικό να επιλέξουμε μια σύμβαση για την κλίμακα των πολυωνύμων, αντί να θεωρήσουμε κανονικοποίηση στη μονάδα. Η πιο απλή είναι να θεωρήσουμε ότι ο συντελεστής της υψηλότερης δύναμης στο πολυώνυμο είναι $\underline{1}$.

Έτσι έχουμε: • $\psi_0(x) = 1$

• $\psi_1(x) = x + a$ με $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2} \psi_1(x)\psi_0(x) = 0 \to \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2}(x+a) = 0 \to a\sqrt{\pi} = 0 \to a = 0$

άρα $\psi_1(x) = x$

Παρατηρούμε ότι άρτια n σημαίνει άρτια πολυώνυμα και περιττό n περιττά πολυώνυμα.

• $\psi_2(x) = x^2 + a$, $\int dx\, e^{-x^2}(x^2+a)\cdot 1 = 0 \to \sqrt{\pi}\left(\frac{1}{2} + a\right) = 0 \to a = -\frac{1}{2}$

άρα $\psi_2(x) = x^2 - \frac{1}{2}$

• $\psi_3(x) = x^3 + ax \to \int dx\, e^{-x^2}\psi_3(x)\psi_1(x) = 0 \to \int dx\, e^{-x^2}(x^4 + ax^2) = 0 \to$

$\sqrt{\pi}\left(\frac{3}{4} + \frac{a}{2}\right) = 0 \to a = -\frac{3}{2}$ άρα $\psi_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x$

• $\psi_4(x) = x^4 + ax^2 + b \to \int dx\, e^{-x^2}\psi_4(x)\psi_0(x) = 0 \to \int dx\, e^{-x^2}(x^4 + ax^2 + b) = 0$

$\to \sqrt{\pi}\left(\frac{3}{4} + \frac{a}{2} + b\right) = 0$ (i)

$\int dx\, e^{-x^2}\psi_4(x)\psi_2(x) = 0 \to \int dx\, e^{-x^2}\left(x^6 + ax^4 + bx^2 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{2}b\right) = 0$

$\to \sqrt{\pi}\left(\frac{15}{8} + a\frac{3}{4} + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} - \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b\right) = 0 \to \sqrt{\pi}\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}a\right) = 0 \to a = -3$

η (i) δίνει $b = -\frac{3}{4} + \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$ άρα $\psi_4(x) = x^4 - 3x^2 + \frac{3}{4}$

(β) Σ' αυτήν την περίπτωση, η συνήθης σύμβαση κλίμακας είναι να $\psi_n(0) = 1$

Οπότε $\psi_0(x)=1$

$\psi_1(x)=ax+1$

απαιτούμε $\int_0^\infty e^{-x}(ax+1)\cdot 1=0 \to (a+1)=0 \to a=-1$, άρα

$\psi_1(x)=-x+1$

$\psi_2(x)=ax^2+bx+1$: Απαιτούμε $\int_0^\infty dx\, e^{-x}(ax^2+bx+1)\cdot 1=0 \to$

$\to (2a+b+1)=0$ (1)

Επίσης $\int_0^\infty dx\, e^{-x}(ax^2+bx+1)(-x+1)=0 \to \int_0^\infty dx\, e^{-x}(-ax^3-bx^2+ax^2+bx+1)=0$

$\to(-6a-2b-1+2a+b+1)=0 \to -4a-b=0 \to b=-4a$

Αντικαθιστώντας στην (1) παίρνουμε $a=\frac{1}{2} \to b=-2$

Άρα $\psi_2(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+1$

---

(10) Θέλουμε να κατασκευάσουμε ορθοκανονική βάση στο V. Διαλέγουμε

$e_1=\frac{\phi_2}{\|\phi_2\|}=\frac{(3,4,0,0)}{5}=\frac{1}{5}(3,4,0,0)$.

Ψάχνουμε ένα διάνυσμα $\phi'=\phi_1+a\phi_2$ κάθετο στο e_1, άρα στο ϕ_2: $(\phi_1+a\phi_2,\phi_2)=0 \to$

$(\phi_1,\phi_2)+a\|\phi_2\|^2=0 \to a=-\frac{(\phi_1,\phi_2)}{\|\phi_2\|^2}=-\frac{4}{25}$

$\phi'=\left(-\frac{12}{25},\frac{9}{25},2,2\right)$ άρα $\|\psi'\|=\frac{1}{25}\sqrt{5225}=\frac{1}{5}\sqrt{209}$

$e_2=\frac{\phi'}{\|\phi'\|}=\frac{1}{\sqrt{209}}\left(-\frac{12}{5},\frac{9}{5},10,10\right)$

$(\psi,e_1)=\frac{3}{5}$ $(\psi,e_2)=\frac{9}{5\sqrt{209}}$

Άρα $\psi_V=\frac{3}{5}e_1+\frac{9}{5\sqrt{209}}e_2$

(11) Θα κατασκευάσουμε πολυωνυμική βάση στο $L^2([0,1], dx)$.

Για ευκολία κατασκευάζουμε πρώτα μη-κανονικοποιημένα διανύσματα με $\psi_n(0)=1$

$\psi_0(x)=1$

$\psi_1(x)=ax+1 \to \int_0^1 dx\, \psi_0(x)\psi_1(x)=0 \to \int_0^1 dx\,(ax+1)=0 \to \frac{a}{2}+1=0 \to a=-2$

$\psi_1(x)=-2x+1$, $\|\psi_1\|^2=\int_0^1 dx\,(4x^2-4x+1)=\frac{4}{3}-\frac{4}{2}+1=\frac{1}{3}$

$\psi_2(x)=ax^2+bx+1 \to \int_0^1 dx\, \psi_0(x)\psi_2(x)=0 \to \frac{a}{3}+\frac{b}{2}+1=0$ (1)

$\int_0^1 dx\, \psi_1(x)\psi_2(x)=0 \to \int_0^1 dx\,(-2ax^3-2bx^2-2x+ax^2+bx+1)=0$

$\to -\frac{a}{2}-\frac{2b}{3}-1+\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+1=0 \to -\frac{a}{6}-\frac{b}{6}=0 \to a=b$, η (1) δίνει $\frac{5a}{6}+1=0 \to a=-\frac{6}{5}$

άρα $\psi_2(x)=-\frac{6}{5}x^2-\frac{6}{5}x+1$, $\|\psi_2\|^2=\int_0^1 dx\left(\frac{36}{25}x^4+\frac{36}{25}x^2+1+\frac{72}{25}x^3-\frac{12}{5}x^2-\frac{12}{5}x\right)$

$=\frac{36}{125}+\frac{36}{75}+1+\frac{72}{100}-\frac{12}{15}-\frac{6}{5}=\frac{61}{125}$

$e_0(x)=\frac{\psi_0(x)}{\|\psi_0\|}=1$

$e_1(x)=\frac{\psi_1(x)}{\|\psi_1\|}=(-2x+1)\sqrt{3}$

$e_2(x)=\frac{\psi_2(x)}{\|\psi_2\|}=\left(-\frac{6}{5}x^2-\frac{6}{5}x+1\right)\frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{61}}=-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{61}}\left(6x^2+6x-5\right)$

$\cancel{(f,e_0)=\int_0^1 dx \log x}$

$(f,f)=\int_0^1 dx\,(\log x)^2=\int_0^1 dx\, \log x\,(x\log x-x)'$

$=\log x\,(x\log x-x)\Big|_0^1-\int_0^1 dx\,\frac{1}{x}(x\log x-x)=1-\int_0^1 dx\log x=1-(x\log x-x)\Big|_0^1=2<\infty$

άρα f τετραγωνικά ολοκληρώσιμη

$(f,e_0)=\int_0^1 dx\, \log x=(x\log x-x)\Big|_0^1=-1$

$\cancel{(f,e_1)=\int dx \log x\,(-2x+1)\sqrt{3}=-2\sqrt{3}\int_0^1 dx\, x\log x+\sqrt{3}\int dx \log x}$

Για να υπολογίσουμε τα (f,e_1), (f,e_2), βρίσκουμε τα

$$a = \int_0^1 dx \log x \cdot x = \int_0^1 dx\, x\,(x\log x - x)' = (x^2\log x - x^2)\Big|_0^1 - \int_0^1 dx\,(x\log x - x) = -1 - a + \int_0^1 dx\, x = -1 - a + \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

$$b = \int_0^1 dx \log x \cdot x^2 = \int_0^1 dx\, x^2 (x\log x - x)' = (x^3\log x - x^3)\Big|_0^1 - 2\int_0^1 dx\, x\,(x\log x - x) = -1 - 2b + 2\int_0^1 dx\, x^2$$

$$= -1 - 2b + \frac{2}{3} \rightarrow b = -\frac{1}{9}$$

Άρα
$$(f,e_1) = -2\sqrt{3}\int_0^1 dx \log x \cdot x + \sqrt{3}\int_0^1 dx \log x = -2\sqrt{3}\left(-\frac{1}{4}\right) + \sqrt{3}\cdot(-1) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(f,e_2) = -\frac{6\sqrt{5}}{\sqrt{61}}\int_0^1 dx \log x\, x^2 - \frac{6\sqrt{5}}{\sqrt{61}}\int_0^1 dx \log x \cdot x + \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{61}}\int_0^1 dx \log x$$

$$= -\frac{6\sqrt{5}}{\sqrt{61}}\left(-\frac{1}{9}\right) - \frac{6\sqrt{5}}{\sqrt{61}}\left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{61}}(-1) = -\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{61}}$$

Οπότε $f_v = -e_0 - \frac{1}{9}e_1 - \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{61}}\, e_1$