

Εξετάσεις Κβαντική Φυσική 2

Ιούνιος 2018

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες

Όνοματεπώνυμο:

Εξάμηνο:

Αριθμός μητρώου:

Μέρος Α

Απαντήστε στα παρακάτω ερωτήματα πολλαπλής επιλογής. Κάθε ορθή απάντηση είναι +0,4 μονάδες, μέχρι δύο λάθος απαντήσεις δεν αφαιρείται βαθμός, για κάθε λανθασμένη πάνω από δύο αφαιρούνται 0,15 μονάδες, δεν προσθαφαιρείται βαθμός για μη απάντηση.

1. $\int_0^{\infty} dx \delta(x^2 - 1) f(x) =$

(α') $\frac{1}{2} f(1)$

(β') $\frac{1}{2} [f(1) + f(-1)]$

(γ') $\frac{1}{2} [f(1) - f(-1)]$

(δ') $\frac{1}{2} f(1) f(-1)$

(ε') $f(1)^2$

Η ολοκλήρωση από 0 ως ∞ σημαίνει ότι κρατάμε μόνο θετική ρίζα.

2. Ποια από τις παρακάτω κυματοσυναρτήσεις δεν είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη στο \mathbf{R} ;

(α') $\psi(x) = e^{-x^2}$

(β') $\psi(x) = \frac{1}{x^2+1}$

(γ') $\psi(x) = \frac{1}{\cosh x}$

(δ') $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|+1}}$

(ε') $\psi(x) = \frac{\tanh x}{x}$

3. Δίνεται η μήτρα πυκνότητας $\hat{\rho} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} a & -i & 2 \\ i & 1 & 2i \\ 2 & -2i & b \end{pmatrix}$. Για ποιες τιμές των a και b περιγράφει καθαρή κατάσταση;

(α') $a = 1, b = 2$.

(β') $a = 2, b = 3$.

(γ') $a = 0, b = 4$.

(δ') $a = 1, b = 4$

(ε') $a = 3, b = 2$.

βλ. άσκηση 7.2

4. Σύστημα δύο κιούμπιτ προετοιμάζεται σε κατάσταση $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} (|0,0\rangle + 2i|1,1\rangle)$. Στο πρώτο κιούμπιτ γίνεται μέτρηση του $\hat{\sigma}_1$ και στο δεύτερο μέτρηση του $\hat{\sigma}_2$. Ποια η πιθανότητα να δώσουν και οι δύο μετρήσεις τιμή +1;

- (α') 0
- (β') $\frac{1}{20}$
- (γ') $\frac{1}{4}$
- (δ') $\frac{9}{20}$
- (ε') $-\frac{1}{2}$

5. Κιούμπιτ προετοιμάζεται σε κατάσταση $|1\rangle$. Αρχικά του γίνεται μέτρηση του τελεστή $\hat{A} = \mathbf{n} \cdot \hat{\sigma}$, για $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)$ και μετά μέτρηση του $\hat{\sigma}_3$. Ποια η πιθανότητα και οι δύο μετρήσεις να δώσουν τιμή -1 ;

- (α') 0
- (β') $\frac{1}{24}$
- (γ') $\frac{1}{12}$
- (δ') $\frac{1}{6}$
- (ε') $\frac{5}{24}$

6. Για σύνθεση στροφορμών, $\underline{2} \otimes \underline{3} \otimes \underline{4} =$

- (α') $\underline{2} \oplus \underline{3} \oplus \underline{3} \oplus \underline{4} \oplus \underline{6} \oplus \underline{6}$.
- (β') $\underline{1} \oplus \underline{3} \oplus \underline{3} \oplus \underline{5} \oplus \underline{5} \oplus \underline{7}$.
- (γ') $\underline{1} \oplus \underline{1} \oplus \underline{3} \oplus \underline{5} \oplus \underline{5} \oplus \underline{9}$.
- (δ') $\underline{2} \oplus \underline{4} \oplus \underline{4} \oplus \underline{6} \oplus \underline{8}$.
- (ε') $\underline{4} \oplus \underline{6} \oplus \underline{6} \oplus \underline{8}$.

7. Ο τελεστής περιστροφής κατά γωνία π γύρω από τον άξονα 3 σε σωματίο με ολική στροφορμή $j = 3/2$ είναι

- (α') $\text{diag}(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$
- (β') $\text{diag}(-1, 1, -1, 1)$
- (γ') $\text{diag}(-1, 1, 1, -1)$
- (δ') $\text{diag}(-i, i, -i, i)$
- (ε') $\text{diag}(-i, i, i, -i)$

Ός diag συμβολίζουμε το διαγώνιο πίνακα, με διαγώνια στοιχεία όπως δίνονται από τους αριθμούς που ακολουθούν.

8. Έστω \hat{T} ο τελεστής αντιστροφής χρόνου και $|j, m\rangle$ ιδιοδιανύσματα της στροφορμής. Ποιο από τα παρακάτω διανύσματα είναι ιδιοδιάνυσμα του \hat{T} ;

- (α') $\frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 0\rangle + i|2, 1\rangle)$
- (β') $\frac{1}{\sqrt{2}} (|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle - |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle)$
- (γ') $-\frac{1}{\sqrt{2}} (|2, 0\rangle + |3, 0\rangle)$
- (δ') $\frac{1}{\sqrt{2}} (|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle + i|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle)$
- (ε') $\frac{1}{\sqrt{2}} (|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle - i|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle)$

↓
 $T|\psi\rangle \sim |\psi\rangle$

9. Στην προσέγγιση κεντρικού πεδίου για το άτομο του υδραργύρου (Hg, $Z = 80$), η εξώτατη στιβάδα αντιστοιχεί σε ποια ενεργειακή στάθμη $E_{n,\ell}$;

(α') $E_{5,2}$

(β') $E_{5,3}$

(γ') $E_{5,4}$

(δ') $E_{6,0}$

(ε') $E_{6,1}$

Το άτομο δεν αποτελεί εξαίρεση του κανόνα δόμησης.

10. Σύστημα αποτελείται από 4 φερμιονικούς αρμονικούς ταλαντωτές συχνότητας ω και σπιν $s = \frac{1}{2}$. Η 4η ενεργειακή στάθμη έχει εκφυλισμό $g =$

(α') 9

(β') 12

(γ') 16

(δ') 24

(ε') 25

11. Ένα σωματίο με σπιν $s = \frac{1}{2}$ που κινείται σε δύο διαστάσεις έχει ιδιοτιμές της ενέργειας $\epsilon_n = an_1 + n_2^2$ (σε αδιάστατες μονάδες), όπου $a > 0$ και $n_1, n_2 = 0, 1, 2, \dots$. Η συνάρτηση αριθμού καταστάσεων $\Omega(\epsilon)$ στο όριο του συνεχούς είναι

(α') $\frac{4\sqrt{\epsilon}}{a}$

(β') $\frac{2\epsilon}{3a}$

(γ') $\frac{4\epsilon^{3/2}}{3a}$

(δ') $\frac{\epsilon^2}{a}$

(ε') $\frac{4\epsilon^{5/2}}{5a}$

12. Έστω ότι έχουμε ένα σύστημα από $N \gg 1$ φερμιόνια όπως αυτό που περιγράφεται στο παραπάνω ερώτημα. Η ενέργεια E_0 της θεμελιώδους κατάστασης του συστήματος είναι ανάλογη του

(α') N

(β') $N^{3/2}$

(γ') N^2

(δ') $N^{5/3}$

(ε') $N^{5/2}$

Μέρος Β'

1. Σωματίο σε μία διάσταση βρίσκεται εντός δυναμικού $V(x) = -\frac{a}{|x|}$, όπου $a > 0$. Ο τελεστής Σρέντινγκερ

...Έχει... διακριτό φάσμα με εκφυλισμό ... $g=1$

...Έχει..... συνεχές φάσμα με εκφυλισμό ... $g=?$

Αν το σωματίο υποχρεούται να κινείται στην ημιευθεία, ο τελεστής Σρέντινγκερ

...Έχει... διακριτό φάσμα με εκφυλισμό ... $g=1$

...Έχει..... συνεχές φάσμα με εκφυλισμό ... $g=1$

Συμπληρώστε τα σωστά ή / και διαγράψτε από τις παραπάνω προτάσεις. (0,4)

2. Συμπληρώστε ορθά τις παρακάτω προτάσεις. (3x0,2)

(α') Το γινόμενο δύο αυτοσυζυγών τελεστών ...είναι αυτοσυζυγής μόνο αν οι τελεστές μετατίθενται

(β') Το γινόμενο ενός γραμμικού και ενός αντιγραμμικού τελεστή ...είναι αντιγραμμικός

(γ') Αν το ηλεκτρόνιο είχε σπιν $\frac{3}{2}$ και όλα τα άλλα ήταν ίδια, τα άτομα θα ήταν ...μικρότερα..., επειδή ...θα χάραν την ζγκία ηλεκτρόνια σε κάθε ελαιοί.

3. Αν ο τελεστής \hat{A} δεν έχει εκφυλισμένες ιδιοτιμές, τότε και οποιοσδήποτε τελεστής $f(\hat{A})$ δεν έχει εκφυλισμένες ιδιοτιμές. Σωστό ή λάθος; Τεκμηριώστε συνοπτικά. (0,3)

Λάθος: Για παράδειγμα τελεστής $f(x) = x^2$ ιδιοτιμές ± 1 με εκφυλισμένες και $f(x) = x^2$, τότε η f έχει δυο εκφυλισμό για τον $f(\hat{A})$.

Ή μπορείτε να δώσετε γενική απόδειξη.

4. Η μαγνητική ροπή του ηλεκτρονίου είναι ανάλογη της ολικής του στροφορμής. Σωστό ή λάθος; Τεκμηριώστε συνοπτικά. (0,3)

όχι $\vec{\mu} = \frac{q}{2m} (\vec{L} + g \vec{S})$. Αν ήταν ανάλογη της

ολικά στροφορμής θα ήταν ανάδοχη του $L + \bar{L}$

5. Ο τελεστής Σρέντινγκερ στις 3 διαστάσεις με δυναμικό δέλτα $V(\mathbf{r}) = V_0 \delta^3(\mathbf{r})$ είναι φραγμένος από κάτω. Σωστό ή λάθος; Τεκμηριώστε. (0,6)

Το δυναμικό $V_0 \delta^3(\mathbf{r})$ είναι φραγμένο από κάτω (για $V_0 \geq 0$)
άρα είναι φραγμένος και ο τελεστής Σρέντινγκερ.
(αυτή η ασφάλεια είναι φουλ βαθμούς, υπάρχουν σταλακτικές.)

Μέρος Γ'

1. (α) Έστω \hat{H}_λ μία Χαμιλτονιανή που εξαρτάται από μία παράμετρο λ και $|\psi_\lambda\rangle$ ιδιοδιάνυσμα της Χαμιλτονιανής με ιδιοτιμή E_λ . Αποδείξτε την ταυτότητα Φάυνμαν-Χέλμαν:

$$\frac{\partial E_\lambda}{\partial \lambda} = \langle \psi_\lambda | \frac{\partial \hat{H}_\lambda}{\partial \lambda} | \psi_\lambda \rangle.$$

- (β) Χρησιμοποιείστε την παραπάνω ταυτότητα για τον τελεστή Σρέντινγκερ \hat{H} σωματιδίου μάζας m σε δυναμικό Κουλόμπ $V(r) = -a/r$ ($E_n = -\frac{a^2 m}{2n^2}$, $n = 1, 2, \dots$), για να δείξετε ότι

$$\langle n, \ell, m_\ell | \hat{r}^{-1} | n, \ell, m_\ell \rangle = \frac{am}{n^2}$$

όπου $|n, \ell, m_\ell\rangle$ τα ιδιοδιανύσματα του \hat{H} . (1)

Άσκηση 13.11

2. Χρησιμοποιείστε τη θεωρία μεταβολών για να εκτιμήσετε την ενέργεια της θεμελιώδους κατάστασης ενός σωματιδίου στην ημικυβική $x > 0$ κάτω από δυναμικό $V(x) = ax^3$, όπου $a > 0$. (1)

Παραλλαγή άσκησης 16.9

3. Η Χαμιλτονιανή ενός σωματιδίου με φορτίο q και μάζα m που κινείται στο επίπεδο κάτω από εξωτερικό ομογενές μαγνητικό πεδίο B γράφεται (ύστερα από επιλογή βαθμίδας) ως

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2) - \frac{qB}{m}\hat{x}_1\hat{p}_2 + \frac{q^2}{2m}B^2\hat{x}_1^2$$

(α) Βρείτε τις ιδιοτιμές της Χαμιλτονιανής. (β) Θεωρώντας περιοδικές συνθήκες στο επίπεδο με περίοδο L (σε μικροσκοπική κλίμακα), δείξτε ότι ο βαθμός εκφυλισμού των επιπέδων Λαντάου είναι $\frac{qB}{2\pi}\frac{L^2}{\hbar}$. (2)

Καφ 13.4.3