1.

α) Σ, $|\psi(x)|^2 = \frac{|x|}{(x^2+1)^2}$, δεν απειρίζεται κάπου και $\lim_{x\to\pm\infty} |\psi(x)|^2 \sim \frac{|x|}{x^4} = \frac{1}{x^3}$, άρα είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη.

β) Λ: ~~δ(x⁴-1)~~ $x^4-1=0 \rightarrow x=\pm 1$ οπότε $\delta(x^4-1) = \frac{1}{4}\delta(x-1) + \frac{1}{4}\delta(x+1)$

γ) Λ: αν P_1, P_2 προβολικοί $(P_1P_2)^2 = P_1P_2P_1P_2 \neq P_1P_2$ εκτός αν $[P_1, P_2]=0$

δ) Λ: η διέγερση εσωτερικών βαθμών ελευθερίας μεταβάλλει το s μόνο κατά ακέραιες τιμές.

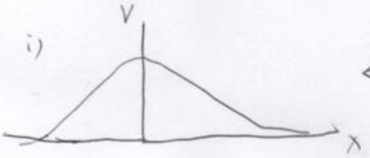
ε) Λ: Υπάρχουν $\frac{100!}{99!\,1!} = 100$ τρόποι κατανομής 99 φερμιονίων σε 100 καταστάσεις.

στ) Σ: Για $s=0$, η κυματοσυνάρτηση του σπιν είναι αντισυμμετρική. Άρα για να είναι η συνολική κατάσταση αντισυμμετρική, η χωρική κυματοσυνάρτηση πρέπει να είναι συμμετρική.

ζ) Λ: η μέση απόσταση δε χαρακτηρίζεται από περιοδικότητα (γενικά ελαττώνεται με το Z), καθώς η περιοδικότητα αφορά ιδιότητες της εξώτερης στιβάδας.

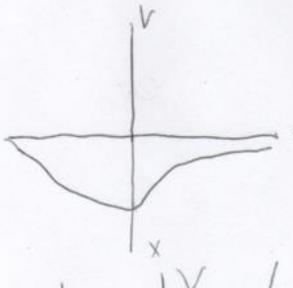
2.

α) i)



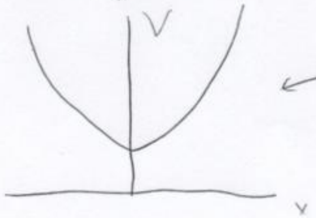
← έχει μόνο συνεχές φάσμα, $E>0$

ii)



← έχει συνεχές για $E>0$ και διάκριτο για $E<0$

iii)



← έχει μόνο διακριτό φάσμα.

β) $r_1 = T_r(\rho\sigma_1) = \frac{1}{3} T_r \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} T_r \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 2 & i \end{pmatrix} = 0$

$r_2 = T_r(\rho\sigma_2) = \frac{1}{3} T_r \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} T_r \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 2i & 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}$

$r_3 = T_r(\rho\sigma_3) = \frac{1}{3} T_r \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} T_r \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}$

$\vec{r} = (0, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$

γ) $Y_{22}(\theta,\phi) \sim \sin^2\theta \, e^{2i\phi}$

$Y_{21}(\theta,\phi) \sim \hat{L}_- Y_{22}(\theta,\phi) = e^{-i\phi}\left(-\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta \frac{\partial}{\partial\phi}\right)\left(\sin^2\theta e^{2i\phi}\right) =$
$= -e^{i\phi} 2\sin\theta\cos\theta - 2\cot\theta \sin^2\theta e^{i\phi} = -4\sin\theta\cos\theta e^{i\phi}$

άρα $Y_{21}(\theta,\phi) = C\sin\theta\cos\theta e^{i\phi}$, όρα $\int \sin\theta \, d\theta d\phi \, |Y_{21}|^2 = 1 \to |C|^2 \, 2\pi \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \, \sin^2\theta \cos\theta = 1$

$\to |C|^2 \frac{8\pi}{15} = 1 \to C = \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \to Y_{21} = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin\theta\cos\theta e^{i\phi}$

δ) Έστω μια κατάσταση επαλληλίας $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle_1\rangle + \beta|j_2\rangle$, όπου j_1 ακέραιο και j_2 ημιακέραιο. Για τελεστή αντιστροφής χρόνου $\hat{T}$, ισχύει $\hat{T}^2|j_1\rangle = |j_1\rangle$, $\hat{T}^2|j_2\rangle = -|j_2\rangle$

οπότε $T^2|\psi\rangle = \alpha|j_1\rangle + \beta|j_2\rangle = \alpha|j_1\rangle - \beta|j_2\rangle \neq |\psi\rangle$. Αλλά ~~[illegible]~~ περιμένουμε $T^2|\psi\rangle \sim |\psi\rangle$ καθώς δεν ξέρουμε φυσικό μέγεθος που να αλλάζει κάτω από το T^2 (διπλή αντιστροφή χρόνου). Άρα δεν υπάρχει η κατάσταση επαλληλίας $|\psi\rangle$.

ε)

στάθμη	κετ	ενέργεια	εκφυλισμός
1η	$\lvert 0+, 0-, 1+, 1-\rangle$	2ω	1
2η	$\lvert 0+, 0-, 1\pm, 2\pm\rangle$ (4)	3ω	4
3η	$\lvert 0+, 0-, 1\pm, 3\pm\rangle$ (4) $\lvert 0\pm, 1+, 1-, 2\pm\rangle$ (4)	4ω	8

στ) ηλεκτρονιακή δομή T_c: $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10} 4p^6 5s^2 4d^5$.

Το εξώτερο ηλεκτρόνιο είναι το $5s^2$, με ενέργεια ιονισμού $E_{5,0}$.

η ενέργεια Φέρμι αντιστοιχεί στο $4d^5$ δηλ $E_{4,2}$

3) α) ο προβολικός για $\hat{\sigma}_1 = -1$ είναι $\hat{P}_- = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ άρα

$$Prob(-1,-1) = \langle\psi| P_- \otimes P_- |\psi\rangle = \left(\frac{1}{2}\langle 1,1| - i\frac{\sqrt{3}}{2}\langle 0,0|\right) P_- \otimes P_- \left(\frac{1}{2}|1,1\rangle + i\frac{\sqrt{3}}{2}|0,0\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{4}\langle 1,1|P_-\otimes P_-|1,1\rangle + \frac{3}{4}\langle 0,0|P_-\otimes P_-|0,0\rangle - i\frac{\sqrt{3}}{4}\langle 0,0|P_-\otimes P_-|1,1\rangle + i\frac{\sqrt{3}}{4}\langle 1,1|P_-\otimes P_-|0,0\rangle$$

$$= \frac{1}{4}\left(\langle 1|P_-|1\rangle\right)^2 + \frac{3}{4}\left(\langle 0|P_-|0\rangle\right)^2 - i\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\langle 0|P_-|1\rangle\right)^2 + i\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\langle 1|P_-|0\rangle\right)^2$$

$$\langle 1|P_-|1\rangle = \frac{1}{2}(1\ \ 0)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}$$

$$\langle 0|P_-|0\rangle = \frac{1}{2}(0\ \ 1)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}$$

$$\langle 1|P_-|0\rangle = \frac{1}{2}(1\ \ 0)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} = \langle 0|P_-|1\rangle$$

Άρα $Prob(-1,-1) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} - \frac{i\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

β) (i) Αν $|\psi\rangle = \lambda\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$, $\hat{T}|\psi\rangle = T\begin{pmatrix} \lambda c_1 + d_1 \\ \lambda c_2 + d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda^* c_2^* - d_2^* \\ \lambda^* c_1^* + d_1^* \end{pmatrix} =$

$= \lambda^*\begin{pmatrix} -c_2^* \\ c_1^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -d_2^* \\ d_1^* \end{pmatrix} = \lambda^* \hat{T}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \hat{T}\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \rightarrow$ αντιγραμμικός

(ii) Εξ' ορισμού $\langle\phi|T|\psi\rangle = \langle\psi|T^\dagger|\phi\rangle$. Θέτουμε $|\phi\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$

$$\langle\phi|T|\psi\rangle = (c_1^*\ \ c_2^*)\begin{pmatrix} -d_2^* \\ d_1^* \end{pmatrix} = -c_1^* d_2^* + c_2^* d_1^* = (d_1^*\ \ d_2^*)\begin{pmatrix} c_2^* \\ -c_1^* \end{pmatrix}.$$

άρα $T^\dagger|\phi\rangle = \begin{pmatrix} c_2^* \\ -c_1^* \end{pmatrix} = -T|\phi\rangle \rightarrow \hat{T}^\dagger = -\hat{T}$

(iii) $T^2\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} -c_2^* \\ c_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_1 \\ -c_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \hat{T}^2 = -\hat{1}$

(iv) $\hat{T}^\dagger\sigma_1\hat{T}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = -\hat{T}\hat{\sigma}_1\hat{T}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = -\hat{T}\hat{\sigma}_1\begin{pmatrix} -c_2^* \\ c_1^* \end{pmatrix} = -\hat{T}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -c_2^* \\ c_1^* \end{pmatrix} =$

$= -\hat{T}\begin{pmatrix} c_1^* \\ -c_2^* \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} c_2 \\ c_1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = -\hat{\sigma}_1\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \hat{T}^\dagger\hat{\sigma}_1 T = -\hat{\sigma}_1$

γ) Το σύστημα είναι στην κατάσταση $|\psi\rangle = |3,-3\rangle \otimes |\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\rangle$ και θέλουμε να υπολογίσουμε το $|\langle j, m_j|\psi\rangle|^2$ για $j=\frac{7}{2}$, $m_j = -3+\frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$

$$|\tfrac{7}{2},-\tfrac{7}{2}\rangle = |3,-3\rangle \otimes |\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$J_+|\tfrac{7}{2},-\tfrac{7}{2}\rangle = \sqrt{7}\,|\tfrac{7}{2},-\tfrac{5}{2}\rangle$$

$$J_+|\tfrac{7}{2},-\tfrac{7}{2}\rangle = L_+|3,-3\rangle \otimes |\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle + |3,-3\rangle \otimes S_+|\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle =$$

$$= \sqrt{6}\,|3,-2\rangle \otimes |\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle + |3,-3\rangle \otimes |\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\rangle$$

άρα $$|\tfrac{7}{2},-\tfrac{5}{2}\rangle = \sqrt{\tfrac{6}{7}}\,|3,-2\rangle \otimes |\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle + \tfrac{1}{\sqrt{7}}\,\underbrace{|3,-3\rangle \otimes |\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\rangle}_{|\psi\rangle}$$

όρα $$|\langle\psi|\tfrac{7}{2},-\tfrac{5}{2}\rangle|^2 = \tfrac{1}{7}$$

δ) Λυμένη άσκηση 13.1

4) α) $$\Omega(\varepsilon) = \sum_{n<Z/\sqrt{|\varepsilon|}} g_n = \sum_{n<\frac{Z}{\sqrt{|\varepsilon|}}} 2n^2$$. Στο όριο συνεχούς

$$\Omega(\varepsilon) = \int_0^{Z/\sqrt{|\varepsilon|}} dn\, 2n^2 = \frac{2}{3}\left(\frac{Z}{\sqrt{|\varepsilon|}}\right)^3 = \frac{2Z^3}{3|\varepsilon|^{3/2}}$$

β) $$\Omega(\varepsilon_F) = Z \rightarrow \frac{2Z^3}{3|\varepsilon_F|^{3/2}} = Z \longrightarrow |\varepsilon_F|^{3/2} = \frac{2Z^2}{3} \rightarrow |\varepsilon_F| = \left(\frac{2Z^2}{3}\right)^{2/3}$$

$$\longrightarrow \varepsilon_F = -\left(\frac{2Z^2}{3}\right)^{2/3}$$

γ) $$g(\varepsilon) = \frac{d\Omega}{d\varepsilon} = -\frac{d\Omega}{d|\varepsilon|} = \frac{Z^3}{|\varepsilon|^{5/2}}$$

$$E_0 = \int_0^{\varepsilon_F} g(\varepsilon)\,\varepsilon\, d\varepsilon = -2|\varepsilon_F|^{-1/2} =$$

$$= -2\left(\frac{3Z^2}{2}\right)^{1/3} = -(12Z)^{1/3}$$