1) α) Σ $\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{\cosh^2 x} = 2\int_0^{\infty} dx \frac{1}{\cosh^2 x} < 2\int_0^{\infty} dx \frac{1}{\frac{e^{2x}}{4}} = 8\int_0^{\infty} dx\, e^{-2x} < \infty$

επίσης $\frac{1}{\cosh x}$ παντού συνεχής, άρα τετραγωνικά ολοκληρώσιμη

β) Σ: $\sinh x = 0 \to x = 0$ $\quad \delta(\sinh x) = \frac{\delta(x)}{\cosh 0} = \delta(x)$

γ) Σ Για κάθε $|\psi\rangle$ $\quad \langle\psi|A^{+}A|\psi\rangle = \langle\phi|\phi\rangle \geq 0$ όπου $|\phi\rangle = \hat{A}|\psi\rangle$

δ) Λ $\quad T_r[\hat{A},\hat{B}] = T_r\hat{A}\hat{B} - T_r\hat{B}\hat{A} = T_r\hat{A}\hat{B} - T_r\hat{A}\hat{B} = 0$

ε) Λ Η ορθοκανονική βάση αποτελείται από 2^7 διανύσματα.

στ) Λ Δεν υπάρχει γενική έκφραση για το γυρομαγνητικό λόγο.

ζ) Λ Αφού ο # φερμιονίων > # καταστάσεων, υπάρχουν 0 τρόποι.

η) Σ: Η ολική είναι αντισυμμετρική, για $s=1$ η κατάσταση των σπιν είναι συμμετρική, άρα η χωρική είναι αντισυμμετρική.

θ) Λ: Η $(n,l)=(4,3)$ είναι η $4f$, η $(n,l)=(5,1)$ είναι η $5p$. Η σειρά συμπλήρωσης φλοιών έχει την $5p$ πριν την $4f$, άρα $E_{5,1} < E_{4,3}$

ι) Λ: Αυξάνει σαν $Z^{4/3}$ σύμφωνα με τη θεωρία ΤΦ.

2) α)

$$r_1 = T_r\hat{\rho}\hat{\sigma}_1 = \frac{1}{6} T_r \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} T_r \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}$$

$$r_2 = T_r\hat{\rho}\hat{\sigma}_2 = \frac{1}{6} T_r \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} T_r \begin{pmatrix} i & -2i \\ 4i & -i \end{pmatrix} = 0$$

$$r_3 = T_r\hat{\rho}\hat{\sigma}_3 = \frac{1}{6} T_r \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} T_r \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}$$

$$\vec{r} = \left(\frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{3}\right)$$

β) για το σύνθετο των 1,2 έχουμε $\quad \frac{1}{2} \leq j_{12} \leq \frac{3}{2} \to j_{12} = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$

για $j_{12} = \frac{1}{2}$ έχουμε $\quad 1 \leq j_{o\lambda} \leq 2 \to j_{o\lambda} = 1, 2$

$j_{12} = \frac{3}{2}$ έχουμε $\quad 0 \leq j_{o\lambda} \leq 3 \to j_{o\lambda} = 0,1,2,3$

άρα $\quad j_{o\lambda} = 0,1,2,3$

γ) Ο προβολικός τελεστής που αντιστοιχεί στο $\sigma_1 = 1$ είναι $P_+ = \frac{1}{2}(\hat{1}+\hat{\sigma}_1) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

" " " $\sigma_3 = 1$ είναι $Q_+ = \frac{1}{2}(1+\sigma_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} \sqrt{2}i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Prob(+,+) = \langle\psi|P_+Q_+P_+|\psi\rangle =$$

$$= \frac{1}{12}\begin{pmatrix} -\sqrt{2}i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2}i \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} -\sqrt{2}i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2}i \\ 1+\sqrt{2}i \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{12}\begin{pmatrix} -\sqrt{2}i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2}i \\ 1+\sqrt{2}i \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\left(-\sqrt{2}i + 2 + 1 + \sqrt{2}i\right) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

δ) Αφού $j=1$ είναι πίνακας 3×3

$$e^{i\theta J_3} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \xrightarrow{\theta=\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} e^{i\pi/2} & & \\ & 1 & \\ & & e^{-i\pi/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & & \\ & 0 & \\ & & -i \end{pmatrix}$$

ε) $\langle\psi|\sigma_1\otimes\sigma_3|\psi\rangle = \frac{1}{4}\Big(\langle 0,1|\sigma_1\otimes\sigma_3|0,1\rangle + 3\langle 1,0|\sigma_1\otimes\sigma_3|1,0\rangle + \sqrt{3}i\langle 0,1|\sigma_1\otimes\sigma_3|1,0\rangle$

$- \sqrt{3}i\langle 1,0|\sigma_1\otimes\sigma_3|0,1\rangle\Big) = \frac{1}{4}\Big(\underbrace{\langle 0|\sigma_1|0\rangle}_{0}\langle 1|\sigma_3|1\rangle + 3\underbrace{\langle 1|\sigma_1|1\rangle}_{0}\langle 0|\sigma_3|0\rangle$

$+\sqrt{3}i\langle 0|\sigma_1|1\rangle\underbrace{\langle 1|\sigma_3|0\rangle}_{0} - \sqrt{3}i\langle 1|\sigma_1|0\rangle\underbrace{\langle 0|\sigma_3|1\rangle}_{0}\Big) = 0$

στ.

στάθμη	κετ	g
1η	$\|0,0,0\rangle$	1
2η	$\|0,0,1\rangle$	1
3η	$\|0,1,1\rangle$ $\|0,0,2\rangle$	2
4η	$\|0,1,2\rangle$ $\|1,1,1\rangle$ $\|0,0,3\rangle$	3
5η	$\|1,1,2\rangle$ $\|0,2,2\rangle$ $\|0,1,3\rangle$ $\|0,0,4\rangle$	4 $\longrightarrow g=4$

3. Βλ. σημ. για μετάπτωση Λαρμορ, κεφ. 11.4.3

4. αν $\vec{n}=(n_1,n_2) \rightarrow E = \frac{2\pi^2}{mL^2}\vec{n}^2 \rightarrow |\vec{n}| = \sqrt{\frac{mL^2E}{2\pi^2}}$

α) $\Omega(\varepsilon) = (2\cdot\frac{1}{2}+1)\sum_{|\vec n|,\, E_n<\varepsilon} 1 = 2\cdot\int_{|n|<\sqrt{\frac{mL^2\varepsilon}{2\pi^2}}} d^2n = 2\cdot\pi\frac{mL^2\varepsilon}{2\pi^2} = \frac{mL^2\varepsilon}{\pi}$

$\rightarrow g(\varepsilon) = \frac{d\Omega}{d\varepsilon} = \frac{mL^2}{\pi}$

β) η ε_F βρίσκεται ως $\Omega(\varepsilon_F) = N \rightarrow \frac{mL^2}{\pi}\varepsilon_F = N \rightarrow \varepsilon_F = \frac{\pi}{m}\frac{N}{L^2}$

γ) $E_0 = \int_0^{\varepsilon_F}\varepsilon\, g(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{mL^2}{\pi}\int_0^{\varepsilon_F}\varepsilon\, d\varepsilon = \frac{mL^2}{2\pi}\varepsilon_F^2 = \frac{mL^2}{2\pi}\frac{\pi^2}{m^2}\frac{N^2}{L^4} = \frac{\pi N^2}{2mL^2}$

5) Θέλουμε να βρούμε τη $|J,M\rangle = |\frac{7}{2}, -\frac{7}{2}\rangle$

$$|\tfrac{9}{2},-\tfrac{9}{2}\rangle_J = |4,-4\rangle_\ell \otimes |\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle_s$$

$$J_+ |\tfrac{9}{2},-\tfrac{9}{2}\rangle = \sqrt{\tfrac{9}{2}\cdot\tfrac{11}{2} - \tfrac{9}{2}\cdot\tfrac{7}{2}}\, |\tfrac{9}{2},-\tfrac{7}{2}\rangle_J = 3\,|\tfrac{9}{2},-\tfrac{7}{2}\rangle_J$$

$$\hat{J}_+ |\tfrac{9}{2},-\tfrac{9}{2}\rangle = \ell_+|4,-4\rangle_\ell \otimes |\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle_s + |4,-4\rangle_\ell \otimes \hat{S}_+|\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle_s = \sqrt{8}\,|4,-3\rangle_\ell \otimes |\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle_s + |4,-4\rangle \otimes |\tfrac{1}{2},+\tfrac{1}{2}\rangle_s$$

άρα $|\frac{9}{2},-\frac{7}{3}\rangle = \frac{1}{3}\left(\sqrt{8}\,|4,-3\rangle_\ell \otimes |\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle_s + |4,-4\rangle_\ell \otimes |\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\rangle_s\right)$

έστω $|\frac{7}{2},-\frac{7}{2}\rangle = \alpha\,|4,-3\rangle_\ell \otimes |\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle + \beta\,|4,-4\rangle_\ell \otimes |\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\rangle_s$, $|\alpha|^2+|\beta|^2=1$

$$\langle \tfrac{9}{2},-\tfrac{7}{2}|\tfrac{7}{2},-\tfrac{7}{2}\rangle = 0 \rightarrow \sqrt{8}\,\alpha + \beta = 0 \rightarrow \beta = -\sqrt{8}\,\alpha \rightarrow \alpha = \tfrac{1}{3},\quad \beta = -\tfrac{\sqrt{8}}{3}$$

$$|\tfrac{7}{2},-\tfrac{7}{2}\rangle = \tfrac{1}{3}\left(|4,-3\rangle_\ell \otimes |\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle_s - \sqrt{8}\,|4,-4\rangle_\ell \otimes |\tfrac{1}{2},+\tfrac{1}{2}\rangle_s\right)$$

αν $|\psi_0\rangle = |4,-4\rangle_\ell \otimes |\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\rangle_s$, η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\left|\langle \tfrac{7}{2},-\tfrac{7}{2}|\psi_0\rangle\right|^2 = \tfrac{8}{9}$$

6) Υπολογίζουμε $\langle b|\hat{H}|b\rangle = \frac{1}{2m}\langle b|\hat{p}^2|b\rangle + \lambda\,\langle b|x^4|b\rangle$

$$\langle b|\hat{p}^2|b\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi b^2}} \int dx \left(\frac{1}{b^2} - \frac{x^2}{b^4}\right) e^{-\frac{x^2}{b^2}} = \frac{1}{b^2}\cdot 1 - \frac{1}{b^4}\,\frac{b^2}{2} = \frac{1}{2b^2}$$

$$\langle b|x^4|b\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi b^2}} \int dx\, x^4 e^{-\frac{x^2}{b^2}} = \frac{3b^4}{4}$$

άρα

$$\langle \hat{H}\rangle = \frac{1}{4mb^2} + \frac{3\lambda}{4} b^4 \rightarrow \frac{1}{4my} + \frac{3\lambda}{4} y^2 \quad \rightarrow y = b^2$$

ελάχιστο : $\frac{\partial \langle H\rangle}{\partial y} = 0 \rightarrow -\frac{1}{4my^2} + \frac{6\lambda}{4} y = 0 \rightarrow y^3 = \frac{1}{6\lambda m} \rightarrow y = \frac{1}{(6\lambda m)^{1/3}}$

άρα

$$E_0 = \frac{1\,(6\lambda m)^{1/3}}{4m} + \frac{3\lambda}{4}\,\frac{1}{(6\lambda m)^{2/3}} = \frac{6^{1/3}}{4}\left(\frac{\lambda}{m^2}\right)^{1/3} + \frac{3}{4\,6^{2/3}}\left(\frac{\lambda}{m^2}\right)^{1/3} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(6^{1/3} + \frac{6^{1/3}\cdot 3}{6}\right)\left(\frac{\lambda}{m^2}\right)^{1/3} = \frac{3}{8}\left(\frac{6\lambda}{m^2}\right)^{1/3}$$

Προσοχή, σε λάθος τύπο στην εκφώνηση της 6