1.

(α) Λάθος, γιατί $(AB)^{\dagger} = B^{\dagger}A^{\dagger} = BA \neq AB$ γενικά

(β) Λάθος, γιατί $|\psi(x)|^2 = \dfrac{1}{|x|+1}$, το ολοκλήρωμα της οποίας αποκλίνει λογαριθμικά στο άπειρο.

(γ) Σωστό, γιατί $(e^{i\hat{A}})^{\dagger} e^{i\hat{A}} = e^{-i\hat{A}^{\dagger}} e^{i\hat{A}} = e^{-i\hat{A}} e^{i\hat{A}} = \hat{1}$

(δ) Λάθος, γιατί για να υπάρχει εκφυλισμός πρέπει ο λόγος των συχνοτήτων να είναι ρητός.

(ε) Λάθος, $\delta(e^x+1) = 0$, γιατί $e^x + 1 \neq 0$ για κάθε x.

(στ) Λάθος, οι έννοιες φερμιόνιο, μποζόνιο αναφέρονται σε σωμάτια ανεξάρτητα τύπου

(ζ) Λάθος, γιατί αν οι ιδιοτιμές της μήτρας πυκνότητας είναι εκφυλισμένες δεν υπάρχει μοναδική ανάλυση σε ιδιοδιανύσματα.

(η) Λάθος, γιατί δεν είναι ταυτοτικά και τα 6 σωμάτια που αποτελούν το He.

(θ) Λάθος, αυτό που συμβαίνει είναι ότι οι πιθανότητες που αντιστοιχούν στο $\hat{Q}$ δεν εξαρτώνται από το χρόνο

2.

(α) $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

$r_1 = \langle\sigma_1\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = -1$

$r_2 = \langle\sigma_2\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -i\\i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}i & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = 0$

$r_3 = \langle\sigma_3\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = 0$

άρα $\vec{r} = (-1, 0, 0)$

(β) $\rho = \begin{pmatrix}2/3 & 0\\0 & 1/3\end{pmatrix}$, $r_1 = \langle\sigma_1\rangle = \frac{1}{3}\,Tr\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\,Tr\begin{pmatrix}0 & \\ & 0\end{pmatrix} = 0$

$r_2 = \langle\sigma_2\rangle = \frac{1}{3}\,Tr\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -i\\i & 0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\,Tr\begin{pmatrix}0 & \\ & 0\end{pmatrix} = 0$

$r_3 = \langle\sigma_3\rangle = \frac{1}{3}\,Tr\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\,Tr\begin{pmatrix}2 & \\ & -1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}$

άρα $\vec{r} = (0, 0, \frac{1}{3})$

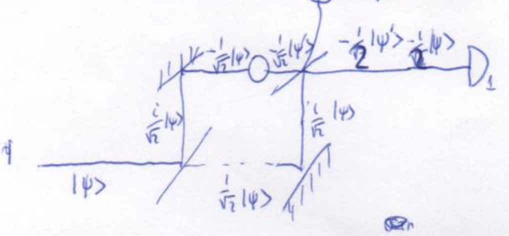
(γ)

1η στάθμη	$\lvert 0,1,2,3\rangle$	$E = 6\omega$	$g = 1$
2η "	$\lvert 0,1,2,4\rangle$	$E = 7\omega$	$g = 1$
3η "	$\lvert 0,1,2,5\rangle$		
	$\lvert 0,1,3,4\rangle$	$E = 8\omega$	$g = 2$

(δ) $\langle k|\hat{x}\hat{p}|x\rangle = \langle k|\hat{p}\hat{x} + i\hat{1}|x\rangle = \langle k|\hat{p}\hat{x}|x\rangle + i\langle k|x\rangle$

$= kx\langle k|x\rangle + i\langle k|x\rangle = (kx+i)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ikx}$

(ε)



$|\psi\rangle = |0\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$|\psi'\rangle = \hat{\sigma}_2|0\rangle = \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-i\\0\end{pmatrix} = -i|1\rangle$

στην έξοδο D_1 έχουμε $-\frac{1}{2}(|\psi\rangle + |\psi'\rangle) = -\frac{1}{2}(|0\rangle - i|1\rangle)$

στην έξοδο D_2 έχουμε $\frac{i}{2}(|\psi\rangle - |\psi\rangle) = \frac{i}{2}(|0\rangle + i|1\rangle)$

$\boxed{3}$

για το πρώτο κιούμπιτ οι προβολικοί του $\hat{\sigma}_1$ είναι $\hat{P}_\pm = \frac{1}{2}(\hat{1} \pm \hat{\sigma}_1) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & \pm1\\ \pm1 & 1\end{pmatrix}$

για το δεύτερο κιούμπιτ " σ_3 είναι $\hat{Q}_+ = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $\hat{Q}_- = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$\text{Prob}(+,+) = \langle\psi|P_+ \otimes Q_+|\psi\rangle = \frac{1}{5}\langle 1,1|P_+ \otimes Q_+|1,1\rangle$

$+ \frac{4}{5}\langle 0,0|P_+ \otimes Q_+|0,0\rangle - \frac{2i}{5}\langle 1,1|P_+ \otimes Q_+|0,0\rangle + \frac{2i}{5}\langle 0,0|P_+ \otimes Q_+|1,1\rangle$

$= \frac{1}{5}\langle 1|P_+|1\rangle\langle 1|Q_+|1\rangle + \frac{4}{5}\langle 0|P_+|0\rangle\langle 0|Q_+|0\rangle - \frac{2i}{5}\langle 1|P_+|0\rangle\langle 1|Q_+|0\rangle + \frac{2i}{5}\langle 0|P_+|1\rangle\langle 0|Q_+|1\rangle$

$= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot 0 - \frac{2i}{5}\frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{2i}{5}\frac{1}{2}\cdot 0 = \frac{1}{10}$

$\text{Prob}(+,-) = \langle\psi|P_+ \otimes Q_-|\psi\rangle = \ldots =$

$= \frac{1}{5}\langle 1|\hat{P}_+|1\rangle\langle 1|\hat{Q}_-|1\rangle + \frac{4}{5}\langle 0|\hat{P}_+|0\rangle\langle 0|\hat{Q}_-|0\rangle - \frac{2i}{5}\langle 1|P_+|0\rangle\langle 1|Q_-|0\rangle + \frac{2i}{5}\langle 0|\hat{P}_+|1\rangle\langle 0|Q_-|1\rangle$

$= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}\, 1 - \frac{2i}{5}\frac{1}{2}\, 0 + \frac{2i}{5}\frac{1}{2}\, 0 = \frac{2}{5}$

$$\mathrm{Prob}(-,+) = \langle\psi| P_- \otimes Q_+ |\psi\rangle = \dots$$

$$= \frac{1}{5}\langle 1|P_-|1\rangle\langle 1|Q_+|1\rangle + \frac{4}{5}\langle 0|\hat{P}_-|0\rangle\langle 0|\hat{Q}_+|0\rangle - \frac{2i}{5}\langle 1|\hat{P}_-|0\rangle\langle 1|Q_+|0\rangle + \frac{2i}{5}\langle 0|P_-|1\rangle\langle 0|Q_+|1\rangle$$

$$= \frac{1}{5}\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}\, 0 - \frac{2i}{5}(-1)\cdot 0 + \frac{2i}{5}(-1)\cdot 0 = \frac{1}{10}$$

$$\mathrm{Prob}(-,-) = 1 - \frac{1}{10} - \frac{2}{5} - \frac{1}{10} = \frac{2}{5}$$

$\boxed{4}$

Τα διανύσματα ολικής στροφορμής με $m_\ell = 0$ και $m_s = \frac{1}{2}$ είναι τα

$$|J, M\rangle = |\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle$$

$$|J, M\rangle = |\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}\rangle$$

Με τη μεθοδολογία του φυλλαδίου (Κεφ. 10.7.4) βρίσκουμε ότι

$$|\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\, |1,0\rangle \otimes |\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} |1,1\rangle \otimes |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$|\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{3}}\, |1,0\rangle \otimes |\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle - \sqrt{\tfrac{2}{3}}\, |1,1\rangle \otimes |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle$$

Το ~~εσωτερικό γινόμενο~~ $\cancel{\langle \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2} | (|1}$ από την εκφώνηση το σύστημα βρίσκεται στην $|\psi\rangle = |1,0\rangle \otimes |\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle$

άρα $\langle \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2} | \psi\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{3}}$ άρα $P = |\langle \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2} | \psi\rangle|^2 = \frac{1}{3}$