1.

α. Δυο προβολικοί τελεστές: P_1, P_2. Ισχύει $(P_1+P_2)^2 = P_1^2 + P_2^2 + P_1P_2 + P_2P_1 =$
$= P_1 + P_2 + P_1P_2 + P_2P_1 \neq P_1 + P_2$ εν γένει

Άρα λάθος.

β. Έστω δύο αυτοσυζυγείς A και B: $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger = BA \neq AB$ εν γένει
άρα λάθος

γ. λάθος: έχει ιδιοτιμές μόνο 0 και 1.

δ. λάθος: το $|\psi(x,t)|^2$ είναι πυκνότητα πιθανότητας προς τη θέση x, όχι το χρόνο t.

ε. Οι ιδιοτιμές z ενός μοναδιαίου τελεστή ικανοποιούν $|z|=1$, ενώ $|i\frac{\pi}{2}| \neq 1$.
άρα σωστό

στ. λάθος. Το e και το p που αποτελούν το άτομο του υδρογόνου είναι διακρίσιμα σωμάτια.

ζ. σωστό. Ο χώρος Χίλμπερτ των 5 qubit είναι ο $\mathbb{C}^{2^5} = \mathbb{C}^{32}$

η. λάθος, γιατί $[J_+, J_-] \neq 0$

θ. σωστό. Το $^4He^+$ αποτελείται από 2p, 2n, και 1e, 5 σωμάτια με σπιν $\frac{1}{2}$, άρα έχει ημιακέραιο σπιν, άρα είναι φερμιόνιο.

2) α) η λύση της $x^3+1=0$ είναι $x=-1$. Οπότε

$$\delta(x^3+1) = \frac{\delta(x+1)}{3x^2} = \frac{\delta(x+1)}{3(-1)^2} = \frac{\delta(x+1)}{3}$$

β) Διάκριτο φάσμα αν $r\psi(r)\to 0$ για $r\to\infty$

συνεχές φάσμα $\psi(r)\sim \frac{e^{ipr}}{r}$ για $r\to\infty$

από ανισότητα Schwartz

γ) Αφού $\langle\phi|\psi\rangle = |e^{i\pi/4}| = 1 \to |\psi\rangle = \lambda|\phi\rangle$ άρα αντιστοιχούν στο ίδιο διάνυσμα στη σφαίρα του Bloch άρα η μεταξύ τους γωνία είναι 0.

δ) Διαλέγουμε τον τυχαίο άξονα να είναι ο άξονας 3. Οπότε

$$S_3 = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad e^{i\theta S_3} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{3}{2}\theta} & & & \\ & e^{i\frac{1}{2}\theta} & & \\ & & e^{-i\frac{1}{2}\theta} & \\ & & & e^{-i\frac{3}{2}\theta} \end{pmatrix}$$

οπότε για $\theta = 2\pi$

$$e^{i2\pi S_3} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} = -1 \quad \text{άρα}$$

το $|\psi\rangle$ πάει στο $-|\psi\rangle$

ε. Η θεμελιώδης είναι κατάσταση με κβαντικούς αριθμούς 0 1 2 ... 15 συνολικά $(0+1+2+\dots 15)\omega = 15\cdot 8\omega = 120\omega$

η 1η διεγερμένη είναι 0 1 2 ... 16 συνολικά 121ω

3)

α) Ο προβολικός τελεστής που αντιστοιχεί σε ιδιοτιμή +1 για το $\hat{\sigma}_2$ είναι ο

$$P_{2+} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

και αυτός που αντιστοιχεί σε ιδιοτιμή −1 για το σ_2 είναι ο

$$P_{2-} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

Ο προβολικός τελεστής που αντιστοιχεί σε ιδιοτιμή −1 για το σ_2 είναι ο

$$P_{1-} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Prob}(\overset{1m}{+1}, \overset{2n}{-1}) = \langle 1 | P_{2+} P_{1-} P_{2+} | 1 \rangle =$$

$$= (1 \quad 0)\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{8}(1 \quad -i)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{8}(1 \quad -i)(1-i \quad -1+i)$$

$$= \frac{1}{8}(1-i+i+1) = \frac{1}{4}$$

$$\mathrm{Prob}(-1,-1) = \langle 1 | P_{2-} P_{1-} P_{2-} | 1 \rangle =$$

$$= (1 \quad 0)\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{8}(1 \quad i)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \frac{1}{8}(1 \quad i)(1+i \quad -1-i)$$

$$= \frac{1}{8}(1+i-i+1) = \frac{1}{4}$$

Άρα $\underset{2n}{\mathrm{Prob}}(-1) = \mathrm{Prob}(+1,-1) + \mathrm{Prob}(-1,-1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

3β) ο προβολικός τελεστής που αντιστοιχεί σε ιδιοτιμή +1 για το $\hat{\sigma}_1$ είναι ο

$$P_{1+} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ο προβολικός τελεστής που αντιστοιχεί σε ιδιοτιμή −1 για το $\hat{\sigma}_2$ είναι ο

$$P_{2-} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

$$Prob(+1,-1) = \langle \phi | P_{1+} \otimes P_{2-} | \phi \rangle =$$

$$= \frac{1}{3}\langle 1,1| P_{1+} \otimes P_{2-} |1,1\rangle + \frac{2}{3}\langle 0,0| P_{1+} \otimes P_{2-} |0,0\rangle$$
$$- \frac{\sqrt{2}}{3}\langle 1,1| P_{1+} \otimes P_{2-} |0,0\rangle - \frac{\sqrt{2}}{3}\langle 0,0| P_{1+} \otimes P_{2-} |1,1\rangle$$

υπολογίζουμε τους όρους

$$\langle 1,1| P_{1+} \otimes P_{2-} |1,1\rangle = \langle 1|P_{1+}|1\rangle \cdot \langle 1|P_{2-}|1\rangle = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\langle 0,0| P_{1+} \otimes P_{2-} |0,0\rangle = \langle 0|P_{1+}|0\rangle \langle 0|P_{2-}|0\rangle = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\langle 1,1| P_{1+} \otimes P_{2-} |0,0\rangle = \langle 1|P_{1+}|0\rangle \langle 1|P_{2-}|0\rangle = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}i = \frac{1}{4}i$$

$$\langle 0,0| P_{1+} \otimes P_{2-} |1,1\rangle = \langle 0|P_{1+}|1\rangle \langle 0|P_{2-}|1\rangle = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}i\right) = -\frac{1}{4}i$$

άρα

$$Prob(+1,-1) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{4}i - \frac{\sqrt{2}}{3}\left(-\frac{1}{4}i\right)$$
$$= \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

4. ~~(i) Αν $m_s = \frac{1}{2}$, έχουμε κάτω~~

οι επιτρεπτές τιμές του j είναι $5-\frac{1}{2} \le j \le 5+\frac{1}{2} \rightarrow \frac{9}{2} \le j \le \frac{11}{2}$

$\rightarrow j = 9/2,\ 11/2$

i) για $|\frac{11}{2}, \frac{11}{2}\rangle = |5,5\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$

οπότε μόνο τιμή $j = \frac{11}{2}$ αντιστοιχεί σε $m_\ell = 5$ και $m_s = \frac{1}{2}$

άρα $\mathrm{Prob}(9/2) = 0$.

ii) Δρούμε με το $J_- = L_- \otimes 1 + 1 \otimes S_-$ στο $|\frac{11}{2}, \frac{11}{2}\rangle$

$J_-|\frac{11}{2}, \frac{11}{2}\rangle = \sqrt{\frac{11}{2}\frac{13}{2} - \frac{11}{2}\cdot\frac{9}{2}}\ |\frac{11}{2}, \frac{9}{2}\rangle = \sqrt{11}\ |\frac{11}{2}, 9/2\rangle$ (α)

$J_-|\frac{11}{2}, \frac{11}{2}\rangle = L_-|5,5\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + |5,5\rangle \otimes S_-|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$

$= \sqrt{5\cdot 6 - 5\cdot 4}\ |5,4\rangle \otimes |1/2, 1/2\rangle + |5,5\rangle \otimes |1/2, -\frac{1}{2}\rangle$

$= \sqrt{10}\ |5,4\rangle \otimes |1/2, 1/2\rangle + |5,5\rangle \otimes |1/2, -1/2\rangle$ (β)

οι (α) + (β) δίνουν

$|\frac{11}{2}, 9/2\rangle = \sqrt{\frac{10}{11}}\ |5,4\rangle \otimes |1/2, 1/2\rangle + \frac{1}{\sqrt{11}}\ |5,5\rangle \otimes |1/2, -1/2\rangle$ (γ)

γράφουμε $|9/2, 9/2\rangle = c_1 |5,4\rangle \otimes |1/2, 1/2\rangle + c_2 |5,5\rangle \otimes |1/2, -1/2\rangle$

η απαίτηση $\langle \frac{11}{2}, 9/2 | 9/2, 9/2\rangle = 0 \rightarrow \sqrt{10}\, c_1 + c_2 = 0$

μαζί με τη σχέση $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$ παίρνουμε $c_2 = \sqrt{\frac{10}{11}}$, $c_1 = -\frac{1}{\sqrt{11}}$

οπότε

$|9/2, 9/2\rangle = -\frac{1}{\sqrt{11}}\ |5,4\rangle \otimes |1/2, 1/2\rangle + \sqrt{\frac{10}{11}}\ |5,5\rangle \otimes |1/2, -1/2\rangle$ (δ)

από τις (γ) και (δ) λύνουμε για $|5,5\rangle \otimes |1/2, -1/2\rangle$

$|5,5\rangle \otimes |1/2, -1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{11}}\ |\frac{11}{2}, 9/2\rangle + \sqrt{\frac{10}{11}}\ |\frac{9}{2}, 9/2\rangle$

άρα η πιθανότητα να βρεθεί $j = 9/2$ είναι ίση με $\frac{10}{11}$.