Τίτλος Μαθήματος: Μαθηματική Ανάλυση

Ενότητα Α. Ανασκόπηση Βασικών Εννοιών

Όνομα Καθηγητή: Γεώργιος Ν. Μπροδήμας

Τμήμα Φυσικής

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Πίνακας Περιεχομένων

Α. Ανασκόπηση Βασικών Εννοιών

Α.1 Σταθερές και μεταβλητές ποσότητες

Ονομάζεται *σταθερή ποσότητα* μία ποσότητα που αντιπροσωπεύεται από *έναν αριθμό*. Αυτή μπορεί να συμβολίζεται με κάποιο γράμμα ή σύμβολο, το οποίο εκπροσωπεί τον αριθμό.

Ονομάζεται *μεταβλητή ποσότητα* μία ποσότητα, η οποία αντιπροσωπεύεται από *έναν οποιονδήποτε αριθμό* ενός συνόλου αριθμών. Το σύνολο των αριθμών που εκπροσωπεί μία μεταβλητή λέγεται *περιοχή*

Α.1.1 Παράδειγμα

Στον ορισμό του διαστήματος $\alpha\langle x\langle\beta$:

1. τα σύμβολα α και β αντιπροσωπεύουν έναν αριθμό το καθένα και λέγονται σταθερές.
2. το σύμβολο x εκπροσωπεί οποιονδήποτε αριθμό από ένα σύνολο αριθμών που βρίσκονται στο διάστημα (α,β) και λέγεται μεταβλητή.

Έτσι λοιπόν αν με x συμβολίζουμε ένα μήνα του χρόνου, τότε η περιοχή του x είναι $\{1,2,3,\cdots,12\}$

Α.2 Ανισότητες

Α.2.1 Εισαγωγή

Για τους πραγματικούς αριθμούς υπάρχει μία φυσική διάταξη. Εάν το β βρίσκεται στα δεξιά του α στον άξονα των πραγματικών αριθμών τότε λέμε ότι το β είναι μεγαλύτερο του α και γράφουμε $\beta\rangle\alpha$

Α.2.2 Ορισμός

Η ανισότητα $\alpha\langle\beta$ σημαίνει ότι β-α είναι θετικό. Η ανισότητα $\alpha\leq\beta$ σημαίνει είτε α=β είτε $\alpha\langle\beta$

Α.2.3 Ιδιότητες

Έστω x, y, z και c πραγματικοί αριθμοί. Τότε:

1. Ισχύει ένα από $x=y$, $x\langle y$, $x\rangle y$ *(τριχοτομία)*
2. Εάν $x\langle y$ και $y\langle z$ τότε $x\langle z$ *(μεταβατικότητα)*
3. Εάν $x\langle y$ τότε $x+c\langle y+c$
4. Εάν $x\langle y$ και $c\rangle 0$ τότε $x\cdot c\langle y\cdot c$
5. Εάν $x\langle y$ και $c\langle 0$ τότε $x\cdot c\rangle y\cdot c$

Πολλές φορές οι ιδιότητες αυτές αναφέρονται και ως θεωρήματα. Η απόδειξή τους έχει ως εξής:

Α.2.4 Παρατήρηση

Οι παραπάνω ιδιότητες χρησιμοποιούνται ευρέως κατά την επίλυση ανισοτήτων δηλαδή κατά την εύρεση εκείνων των αριθμών για τους οποίους ικανοποιούνται οι ανισότητες. Για παράδειγμα η ιδιότητα 3 μας λέει ότι ένας αριθμός μπορεί να προστεθεί στα δύο μέρη μιας ανισότητας χωρίς αυτή να αλλάξει. Οι ιδιότητες 4 και 5 μας λένε ότι αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον αριθμό c τότε η ανισότητα παραμένει αμετάβλητη αν $c\rangle 0$ ενώ αντιστρέφεται αν $c\langle 0$.

A.2.5 Παρατήρηση

Για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει:

$$|\alpha| = \begin{cases} +\alpha & \text{εαν} \quad \alpha \ge 0 \\ -\alpha & \text{εαν} \quad \alpha \le 0 \end{cases}, \qquad |\alpha| = \max\{\alpha, -\alpha\}, \qquad |\alpha| = \sqrt{\alpha}$$

A.3 Ανισότητες συναρτήσεων (Κάκκουλος)

A.3.1 Άσκηση

Δοθέντος ότι $x\rangle 1$ να διαταχθούν οι αριθμοί 1, x, $\sqrt{x}$, $1/\sqrt{x}$

A.3.2 Άσκηση

Δοθέντος ότι $x\rangle 0$ να συγκριθούν τα

$$\sqrt{\frac{x}{x+1}} \qquad \sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$$

A.3.3 Άσκηση

Να δειχθεί ότι $2ab \le a^2 + b^2$

A.3.4 Άσκηση

Εάν a και b μη αρνητικοί αριθμοί να δειχθεί ότι

$$\text{εάν} \quad a^2 \le b^2 \quad \text{τότε} \quad a \le b$$

A.3.5 Άσκηση

Έστω a και b μη αρνητικοί αριθμοί. Να δειχθεί ότι:

$$\text{Εάν } a \le b \text{ τότε } \sqrt{a} \le \sqrt{b}$$

A.3.6 Άσκηση

Έστω a και b μη αρνητικοί αριθμοί. Να δειχθεί ότι ο γεωμετρικός μέσος αυτών $\sqrt{ab}$ δεν μπορεί να ξεπεράσει τον αριθμητικό μέσο $(a+b)/2$.

A.3.7 Άσκηση

Να δειχθεί ότι εάν $0 \le a \le b$ τότε $\dfrac{a}{1+a} \le \dfrac{b}{1+b}$

A.3.8 Άσκηση

Εάν a, b, c μη αρνητικοί αριθμοί να δειχθεί ότι

$$\text{εάν} \quad a \le b + c \quad \text{τότε} \quad \frac{1}{1+a} \le \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}$$

A.4 Προβλήματα

A.4.1 Πρόβλημα

Ένα ορθογώνιο R έχει μήκος x και πλάτος y

1. Γράψτε την συνθήκη ώστε το R να έχει εμβαδόν μικρότερο του 10.

2. Γράψτε την ανισότητα που εκφράζει την συνθήκη ώστε η περίμετρος του R να είναι μικρότερη του 47.

A.4.2 Πρόβλημα

Να δειχθεί ότι εάν $a \langle b$ τότε $a \langle \dfrac{a+b}{2} \langle b$. Πώς συνδέεται το $(a+b)/2$ με τα a και b στον πραγματικό άξονα;

(ο αριθμός $(a+b)/2$ ονομάζεται αριθμητικός μέσος των a και b),

A.4.3 Πρόβλημα

Να δειχθεί ότι εάν $a \langle b$ τότε $a \langle \sqrt{ab} \langle (a+b)/2$. (ο αριθμός $\sqrt{ab}$ ονομάζεται γεωμετρικός μέσος των a και b).

A.4.4 Πρόβλημα

Έστω $0 \langle a \langle b$ και έστω h οριζόμενο από την σχέση

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

Να δειχθεί ότι $a \langle h \langle b$. (ο αριθμός h ονομάζεται αρμονικός μέσος των a και b)

A.4.5 Πρόβλημα

Δείξτε ότι ένα ορθογώνιο έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν από όλα τα ορθογώνια που έχουν δεδομένη περίμετρο.

A.4.6 Πρόβλημα

Δείξτε ότι αν ένα τετράγωνο και ένας κύκλος έχουν ίσες περιμέτρους τότε ο κύκλος έχει μεγαλύτερο εμβαδόν από το τετράγωνο

A.4.7 Πρόβλημα

Να δειχθεί ότι ένας κύκλος έχει μεγαλύτερο εμβαδόν από κάθε ορθογώνιο με την ίδια περίμετρο.

A.4.8 Πρόβλημα

Να γραφεί μία ανισότητα της οποίας η λύση να είναι το σύνολο των αριθμών που βρίσκονται σε απόσταση μεγαλύτερη από το 4 από τον αριθμό -5

Α.4.9 Πρόβλημα

Να γραφεί μία ανισότητα της οποίας η λύση είναι ο αριθμός του οποίου η απόσταση από το -2 είναι διπλάσια από την απόσταση από το 12

Α.5 Δυνάμεις αριθμών

Α.5.1 Εισαγωγή

Η έκφραση b^n όπου b είναι πραγματικός αριθμός που ονομάζεται *βάση* και n φυσικός αριθμός που ονομάζεται *εκθέτης*, ορίζεται ως το γινόμενο του b με τον εαυτό του n φορές, έχουμε δηλαδή

$$b^n = \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdots b}_{n}$$

Η διαδικασία ύψωσης αριθμού σε δύναμη ή εκθετοποίηση έχει τους παρακάτω νόμους που ονομάζονται νόμοι των δυνάμεων

Α.5.2 Νόμοι των δυνάμεων

Έχουμε:

1. $b^n b^m = b^{n+m}$
2. $\left(b^n\right)^m = b^{n \cdot m}$
3. $\left(b \cdot c\right)^n = b^n c^n$

Α.5.3 Αρνητικές δυνάμεις

Εάν b είναι πραγματικός αριθμός και n θετικός ακέραιος, ορίζουμε

$$b^{-n} = \frac{1}{b^n}$$

Οι νόμοι των δυνάμεων που αναφέρθηκαν προηγουμένως ισχύουν για ακέραιους n, m: θετικούς, αρνητικούς ή μηδέν.

Α.5.4 Ρητές δυνάμεις

Για να ορίσουμε το $b^{\frac{1}{n}}$ απαιτούμε $b^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} \cdots b^{\frac{1}{n}} = b^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}} = b^1 = b$ να ισχύει, δηλαδή το $\left(b^{1/n}\right)^n$ να ισούται με το b. Έτσι declare ότι $b^{1/n}$ ισούται με $\sqrt[n]{b}$ εκείνος δηλαδή ο θετικός αριθμός του οποίου η n-οστή δύναμη ισούται με το b ή με άλλα λόγια το $b^{1/n}$ ορίζεται από την εξίσωση $\left(b^{1/n}\right)^n = b$. Εάν ο n είναι περιττός τότε το $\sqrt[n]{b}$ μπορεί να ορισθεί ακόμη και αν το b είναι αρνητικό, όμως θα χρησιμοποιούμε την έκφραση $b^{1/n}$ για $b \rangle 0$.

Εάν τώρα $r = m/n$ είναι ρητός αριθμός, ορίζουμε $b^r = b^{m/n} = \left(b^m\right)^{1/n}$. Φυσικά δεν έχει καμία σημασία ο τρόπος με τον οποίο το r εκφράζεται ως πηλίκο δύο θετικών ακεραίων, ισχύει π.χ. $\left(b^4\right)^{1/6} = \left(b^6\right)^{1/9}$.

Έχοντας τώρα ορίσει το b^r για $b > 0$ και r ρητό, μπορούμε τώρα να αναζητήσουμε τους νόμους των εκθετών για αυτή την γενική περίπτωση.

Ας εξετάσουμε πρώτα ότι $(bc)^{1/n} = b^{1/n}c^{1/n}$. Το $(bc)^{1/n}$ είναι ο αριθμός αυτός του οποίου η n-οστή δύναμη είναι το bc. Αλλά $\left(b^{1/n}c^{1/n}\right)^n = \left(b^{1/n}\right)^n \left(c^{1/n}\right)^n = bc$ από τα προηγούμενα. Έτσι $\left(b^{1/n}c^{1/n}\right)^n = bc$ που σημαίνει $b^{1/n}c^{1/n} = (bc)^{1/n}$.

Με βάση αυτό μπορούμε να δείξουμε ότι $b^{p+q} = b^p b^q$ ως εξής:

$$b^{p+q} = b^{m/n+k/l} = b^{(ml+kn)/nl} = \left(b^{mi+kn}\right)^{1/nl}$$

$$= \left(b^{ml}b^{kn}\right)^{1/nl} = \left(b^{ml}\right)^{1/nl}\left(b^{kn}\right)^{1/nl} = b^{ml/nl}b^{kn/nl}$$

Με όμοιους τρόπους αποδεικνύονται και οι άλλες ιδιότητες. Έτσι έχουμε:

Ρητές δυνάμεις ορίζονται ως:

$$b^n = \underbrace{b \cdot b \cdots b}_{n}$$

$$b^{-n} = \frac{1}{b^n}$$

$$b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}, \text{ για } b > 0 \text{ και n φυσικό αριθμό}$$

$$b^{\frac{m}{n}} = \left(b^m\right)^{\frac{1}{n}}$$

Εάν $b,\ c > 0$ και $p,\ q$ ρητοί, τότε:

$$b^{p+q} = b^p b^q$$

$$b^{pq} = \left(b^p\right)^q$$

$$(bc)^p = b^p c^p$$

$$b^p < b^q \quad \text{εάν } b > 1 \text{ και } p < q$$

$$b^p > b^q \quad \text{εάν } b < 1 \text{ και } p < q$$

Α.6 Τριγωνομετρία

Οι συναρτήσεις αυτές προκύπτουν στην Γεωμετρία εφαρμόζονται όμως στην μελέτη του ήχου, την κίνηση του εκκρεμούς και σε πολλά άλλα φαινόμενα που περιέχουν στροφή ή ταλάντωση.

A.6.1 Μέτρηση σε ακτίνια

Θα κάνουμε μια μικρή αναφορά στην μέτρηση των γωνιών. Υπενθυμίζουμε ότι σε έναν κύκλο υπάρχουν 360 μοίρες (σχήμα EG51.164). Οπωσδήποτε όμως μία περισσότερο convenient μονάδα μέτρησης της γωνίας για το calculus είναι το **ακτίνιο,** το οποίο εκλέγεται έτσι ώστε ένας κύκλος να έχει 2π ακτίνια. Έτσι 2π ακτίνια = 360 μοίρες, έτσι ώστε 1 ακτίνιο να ισούται με $360/2\pi$ μοίρες ή $180/\pi$ μοίρες (κατά προσέγγιση 57.2958 μοίρες).

Είναι εύκολο να μετατρέψουμε ακτίνια σε βαθμούς και αντίστροφα

- Εάν f(x) είναι ο αριθμός των μοιρών για x ακτίνια, τότε $f(x) = \frac{180}{\pi} \cdot x$
- Εάν g(x) είναι ο αριθμός των ακτινίων για x μοίρες, τότε $g(x) = \frac{\pi}{180} \cdot x$

A.6.2 Ο τριγωνομετρικός κύκλος

Θεωρούμε έναν κύκλο με το κέντρο του στην αρχή των αξόνων και τυχούσα ακτίνα $r \rangle 0$. Στην συνέχεια τοποθετούμε μια γωνία θ ακτινίων έτσι ώστε η κορυφή της να ευρίσκεται στην αρχή και η αρχική της πλευρά να κείται στον θετικό άξονα των x. Η γωνία ανοίγει αντίστροφα από τους δείκτες του ωρολογίου εάν $\theta \geq 0$ και κατά την φορά των δεικτών του ωρολογίου εάν $\theta \langle 0$. (σχήματα EG51.1.65a, EG51.1.65b). Θεωρούμε ότι η θ μπορεί να γίνει μεγαλύτερη από 2π. Για παράδειγμα μια γωνία 3π ακτινίων προκύπτει αν στρέψουμε μια γραμμή κατά μια πλήρη περιστροφή (2π ακτίνια) και μια επί πλέον μισή περιστροφή. Έτσι μια γωνία 3π ακτινίων έχει την ίδια αρχική και τελική πλευρά με μια γωνία π ακτινίων. Το ίδιο ισχύει και για τις γωνίες $-7\pi/3$ και $-\pi/3$ καθόσον $-7\pi/3 = -\pi/3 - 2\pi$. Εφ' όσον ένας κύκλος έχει 2π ακτίνια και η περιφέρειά του είναι 2πr, μια γωνία ενός ακτινίου ένα τόξο μήκους r πάνω στον κύκλο. Έτσι αν $\theta \rangle 0$ μια γωνία θ ακτινίων τέμνει τόξο μήκους $\theta \cdot r$ πάνω στον κύκλο. Αν συμβολίσουμε με s αυτό το μήκος του τόξου έχουμε

$$s = r \cdot \theta$$

Για $\theta \langle 0$ η παραπάνω έκφραση ισχύει αν θεωρήσουμε το s ως αρνητικό του μήκους του τόξου που τέμνεται από τον κύκλο. (σχήμα EG51.1.65b)

A.6.3 Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Ορίζουμε τις συναρτήσεις ημίτονο (sine) και συνημίτονο (cosine) πάντα σε σχέση με έναν κύκλο ακτίνας r και με κέντρο στην αρχή των αξόνων και με μια γωνία θ, όπως φαίνονται στο σχήμα EG52.1.66. Η τελική πλευρά της γωνίας τέμνει τον κύκλο σε ένα μοναδικό σημείο (x, y). Ορίζουμε τις συναρτήσεις ημίτονο και συνημίτονο ως

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r}$$

Από τις ιδιότητες των ομοίων τριγώνων έπεται ότι sinθ και cosθ εξαρτώνται μόνο από την γωνία θ και όχι από την τιμή του r. Εάν r=1 τότε sinθ=y που είναι το μήκος της μισής χορδής[1] (σχήμα EG52.1.67).

---

[1] *Το γεγονός αυτό φαίνεται να επηρέασε την ετοιμολογία του όρου* "sine". *Τον πέμπτο μ.Χ. αιώνα ο Ινδός*

Το πεδίο ορισμού (domain) των συναρτήσεων ημίτονο και συνημίτονο είναι $(-\infty, \quad \infty)$. Σημειώνουμε ότι οι εκφράσεις sinθ και θ παριστούν αριθμούς. Γράφουμε sin1 αντί για sin(1 radian.

Εφ' όσον η γωνία θ ακτινίων και μία γωνία θ+2π ακτινίων έχουν την ίδια τελική πλευρά, μπορούμε να γράψουμε

$$\sin\theta = \sin(\theta + 2\pi) \qquad \text{και} \qquad \cos\theta = \cos(\theta + 2\pi)$$

που σημαίνει ότι οι συναρτήσεις ημίτονο και συνημίτονο είναι περιοδικές και μάλιστα με την ίδια περίοδο 2π. Συνεπώς για κάθε ακέραιο n και κάθε αριθμό θ έχουμε

$$\sin\theta = \sin(\theta + 2n\pi) \qquad \text{και} \qquad \cos\theta = \cos(\theta + 2n\pi)$$

Εφ' όσον συνηθίζεται να χρησιμοποιούμαι το x για να παριστάνουμε αριθμούς στο πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης, θα κάνουμε το ίδιο και για το ημίτονο και συνημίτονο. Έτσι πολλές φορές θα γράφουμε sinx αντί για sinθ και cosx αντί για cosθ.

Οι γραφικές παραστάσεις των sinx και cosx φαίνονται στα σχήματα (EG53.1.68a και EG53.1.68b).

Υπάρχουν άλλες τέσσαρες βασικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις που ορίζονται συναρτήσει του ημιτόνου και του συνημιτόνου. Είναι η εφαπτομένη (tangent), η συνεφαπτομένη (cotangent), η τέμνουσα (secant) και η συντέμνουσα (cosecant) που ορίζονται, αντίστοιχα, ως

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \text{ για } x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}, \text{ n τυχόν ακέραιος}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \text{ για } x \neq n\pi, \text{ n τυχόν ακέραιος}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \text{ για } x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}, \text{ n τυχόν ακέραιος}$$

$$\csc x = \frac{1}{\sin x}, \text{ για } x \neq n\pi, \text{ n τυχόν ακέραιος}$$

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων αυτών φαίνονται στα σχήματα (EG54.1.70a, EG54.1.70b, EG54.1.70c, EG54.1.70d).

A.6.4 Τριγωνομετρικές ταυτότητες

Υπάρχουν πολλές εξισώσεις, που ονομάζονται τριγωνομετρικές ταυτότητες, και οι οποίες περιγράφουν σχέσεις μεταξύ των διαφόρων τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Οι πιο σημαντικές είναι:

μαθηματικός Aryabbatta ονόμαζε το ημίτονο μιας γωνίας με τον όρο 'ardha-jya" *που σημαίνει* "μισή χορδή"*. Σύντομα όμως ο όρος συμπτύχθηκε στο* "jya" *ή* "χορδή"*. Όταν οι Άραβες μετέφρασαν τον όρο στην δική τους γραπτή γλώσσα την συνέπτυξαν στο "jb". Αργότερα το "jb με κάποιο τρόπο έγινε "jaib" το οποίο σημαίνει επίσης "καμπύλη" 'η "bosom". Γύρω στον 12^{o} αιώνα όταν οι μαθηματικοί μετέφρασαν στα Λατινικά, το Αραβικό "jaib" μεταφράστηκε σε "sinus" που είναι το Λατινικό ισοδύναμο του "bosom" από το οποίο προέρχεται η σημερινή λέξη "sinus".*

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \pm \sin x \cdot \sin y$$

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

Εκτός από αυτές υπάρχουν και άλλες που μπορούν να παραχθούν από αυτές. Δίνουμε παρακάτω έναν κατάλογο με τις σημαντικότερες από αυτές.

A.7 Προβλήματα

A.7.1 Πρόβλημα

Πόσες πλήρεις στροφές πραγματοποιεί ένας τροχός ποδηλάτου με ακτίνα 30 cm όταν το ποδήλατο ταξιδεύεις για 1Km;

A.7.2 Πρόβλημα

Ένας φάρος ευρίσκεται σε απόσταση 2Km από ευθύγραμμη ακτή. (σχήμα EG58.1.75). Να ευρεθεί η απόσταση του φάρου και του φωτιζόμενου σημείου x στην ακτή ως συνάρτηση της γωνίας θ.

A.7.3 Πρόβλημα

Να δειχθεί ότι το ημίτονο γωνίας εγγεγραμμένης σε κύκλο μοναδιαίας διαμέτρου ισούται με το μήκος της χορδής που υποτείνει.

A.7.4 Πρόβλημα

Ένα ορθογώνιο μεταλλικό φύλλο με πλάτος 18 και μήκος 30 διπλώνεται όπως στο σχήμα (σχήμα EG58.1.77). Να ευρεθεί έκφραση για τον όγκο συναρτήσει της γωνίας θ.

A.7.5 Πρόβλημα

Δείξτε ότι η περίμετρος $P_n(r)$ ενός κανονικού πολυγώνου n πλευρών όταν αυτό εγγράφεται σε κύκλο ακτίνας r δίδεται από την έκφραση

$$P_n(r) = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \sin\frac{\pi}{n}$$

Με βάση το αποτέλεσμα αυτό να ευρεθεί η ακτίνα του μικρότερου κύκλου που περιγράφει κανονικό πεντάγωνο πλευράς 921f.

Σημειώματα

Α) Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το υλικό της Μαθηματικής Ανάλυσης προέρχεται από τις σημειώσεις του Επίκουρου Καθηγητή κ. Γεωργίου Ν. Μπροδήμα για τις ανάγκες διδασκαλίας του ομώνυμου μαθήματος στο Τμήμα Φυσικής του Πανεπιστημίου Πατρών .

Β) Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Γεώργιος Ν. Μπροδήμας. «Μαθηματική Ανάλυση. Ενότητα Α: Ανασκόπηση Βασικών Εννοιών». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: **https://eclass.upatras.gr/courses /PHY1912/**

Γ) Σημείωμα Αδειοδότησης

Δ) Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- ✓ το Σημείωμα Αναφοράς
- ✓ το Σημείωμα Αδειοδότησης
- ✓ τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- ✓ το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφ' όσον υπάρχει).