



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΠΑΤΡΩΝ  
UNIVERSITY OF PATRAS

---

# Τίτλος Μαθήματος: Μαθηματική Ανάλυση

## Ενότητα Γ. Ολοκληρωτικός Λογισμός

### Κεφάλαιο Γ.02: Βασικά Θεωρήματα

Όνομα Καθηγητή: Γεώργιος Ν. Μπροδήμας

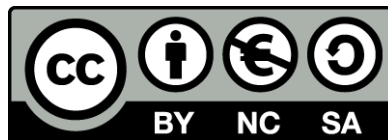
Τμήμα Φυσικής

---

**ΑΝΟΙΚΤΑ** ακαδημαϊκά **ΠΠ**  
μαθήματα

## Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



## Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

# Πίνακας Περιεχομένων

Γ.02	Βασικά Θεωρήματα.....	4
2.1	Θεωρήματα Μέσης Τιμής για τα Ολοκληρώματα .....	4
2.1.1	Πρώτο Θεώρημα της Μέσης Τιμής.....	4
2.1.2	Παρατήρηση.....	4
2.1.3	Γενικευμένο Θεώρημα της Μέσης Τιμής .....	4
2.1.4	Δεύτερο Θεώρημα της Μέσης Τιμής (Bonnet) .....	4
2.1.5	Γενικευμένο Δεύτερο Θεώρημα της Μέσης Τιμής.....	4
2.2	Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού .....	5
2.2.1	Εισαγωγή .....	5

## Γ.02 Βασικά Θεωρήματα

### 2.1 Θεωρήματα Μέσης Τιμής για τα Ολοκληρώματα

#### 2.1.1 Πρώτο Θεώρημα της Μέσης Τιμής

Αν η  $f(x)$  είναι συνεχής στο  $[a,b]$  τότε υπάρχει ένα σημείο  $\xi$  στο  $(a,b)$  τέτοιο ώστε

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a) \cdot f(\xi)$$

όπου ο αριθμός  $f(\xi)$  ονομάζεται μέση τιμή της  $f$  στο  $[a,b]$ .

#### 2.1.2 Παρατήρηση

Η τιμή της  $f$  στο διάστημα  $[a,b]$  είναι

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

#### 2.1.3 Γενικευμένο Θεώρημα της Μέσης Τιμής

Αν οι συναρτήσεις  $f(x)$  και  $g(x)$  είναι συνεχείς στο διάστημα  $[a,b]$  και η  $g(x)$  δεν αλλάζει πρόσημο στο διάστημα αυτό τότε υπάρχει ένα σημείο  $\xi$  στο  $(a,b)$  τέτοιο ώστε

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx$$

Το θεώρημα αυτό ανάγεται στο προηγούμενο αν  $g(x)=1$ .

#### 2.1.4 Δεύτερο Θεώρημα της Μέσης Τιμής (Bonnet)

Αν οι συναρτήσεις  $f(x)$  και  $g(x)$  είναι συνεχείς στο  $[a,b]$  τότε

1. αν η  $g(x)$  είναι θετική και μονότονα φθίνουσα συνάρτηση τότε υπάρχει σημείο  $\xi$  στο  $(a,b)$  τέτοιο ώστε

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)dx = g(a) \int_a^b f(x)dx$$

2. αν η  $g(x)$  είναι θετική και μονότονα αύξουσα τότε υπάρχει ένα σημείο  $\xi$  στο  $(a,b)$  τέτοιο ώστε

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)dx = g(b) \int_a^b f(x)dx$$

#### 2.1.5 Γενικευμένο Δεύτερο Θεώρημα της Μέσης Τιμής

Αν οι συναρτήσεις  $f(x)$  και  $g(x)$  είναι συνεχείς στο  $[a,b]$  και η  $g(x)$  είναι μονότονα αύξουσα ή μονότονα φθίνουσα και δεν είναι αναγκαστικά θετική τότε υπάρχει ένα σημείο  $\xi$  στο  $(a,b)$  τέτοιο ώστε

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = g(a) \int_a^c f(x) dx + g(b) \int_c^b f(x) dx$$

το συμπέρασμα ισχύει και αν αντικαταστήσουμε την συνέχεια με την ολοκληρωσιμότητα.

## 2.2 Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού

### 2.2.1 Εισαγωγή

Όπως και το όνομα δηλώνει το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού είναι το μόνο πλέον σημαντικό θεώρημα του Λογισμού. Συνδέει δύο φαινομενικά άσχετες έννοιες, την παράγωγο (ρυθμός μεταβολής) και το ολοκλήρωμα (μια γενικευμένη διαδικασία πρόσθεσης).

Θεωρητικά το Θεμελιώδες Θεώρημα είναι σημαντικό επειδή αιτιολογεί την χρήση του ολοκληρώματος ως μηχανισμό ορισμού συναρτήσεων. Υπολογιστικά αυτό είναι σημαντικό επειδή μας δίνει μια ισχυρή διαδικασία για τον υπολογισμό πολλών ορισμένων ολοκληρωμάτων. Στο κεφάλαιο αυτό θα συζητήσουμε κάποιες από τις συνέπειες του θεωρήματος.

Ξεκινάμε με μια συνάρτηση  $f$  που είναι συνεχής σε κάποιο διάστημα  $I$ , και ορίζουμε μια σχετική συνάρτηση  $A$  χρησιμοποιώντας το ορισμένο ολοκλήρωμα της  $f$  με άνω όριο ολοκλήρωσης ως την ανεξάρτητη μεταβλητή για την  $A$ .

Ακριβέστερα, υποθέτουμε ότι η  $f$  είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $I$ . Τότε επιλέγοντας ένα τυχαίο (σταθερό) αριθμό  $a$  στο  $I$ , ορίζουμε μια συνάρτηση  $A$  στο  $I$  με

$$A(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Δηλαδή η  $A(x)$  ισούται με το ορισμένο ολοκλήρωμα της  $f$  από το  $a$  έως το  $x$ .

ΑΝ  $f$  είναι μη αρνητική στο  $I$  η τιμή της  $A(x)$  είναι απλά το εμβαδό κάτω από την γραφική παράσταση της  $y = f(x)$  για  $a \leq t \leq x$ . Στην περίπτωση αυτή αναφερόμαστε στο  $A$  ως η συνάρτηση εμβαδό που προσδιορίζεται από την  $f$ .

## Σημειώματα

### A) Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το υλικό της Μαθηματικής Ανάλυσης προέρχεται από τις σημειώσεις του Επίκουρου Καθηγητή κ. Γεωργίου Ν. Μπροδήμα για τις ανάγκες διδασκαλίας του ομώνυμου μαθήματος στο Τμήμα Φυσικής του Πανεπιστημίου Πατρών .

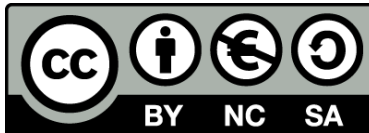
### B) Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Γεώργιος Ν. Μπροδήμας. «Μαθηματική Ανάλυση. Ενότητα Γ.02: Βασικά Θεωρήματα». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

<https://eclass.upatras.gr/courses/PHY1912/>

### Γ) Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/> Ως Μη Εμπορική ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφήμισεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

### Δ) Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- ✓ το Σημείωμα Αναφοράς
- ✓ το Σημείωμα Αδειοδότησης
- ✓ τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- ✓ το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφ' όσον υπάρχει).