Τίτλος Μαθήματος: Μαθηματική Ανάλυση

Ενότητα Γ. Ολοκληρωτικός Λογισμός

Κεφάλαιο Γ.01: Το Ολοκλήρωμα – Βασικές ιδιότητες

Όνομα Καθηγητή: Γεώργιος Ν. Μπροδήμας

Τμήμα Φυσικής

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Πίνακας Περιεχομένων

Γ.01 Το Ολοκλήρωμα

1.1 Βασικές Ιδιότητες του Ορισμένου Ολοκληρώματος

1.1.1 Εναλλαγή Ορίων Διαστήματος Ολοκλήρωσης

Όταν ορίσαμε το $\int_a^b f(x)dx$ ως το όριο των αθροισμάτων $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$ κινηθήκαμε από δεξιά προς αριστερά στο διάστημα $[a,b]$. Όμως τι θα συμβεί αν κινηθούμε από αριστερά προς δεξιά, ξεκινώντας από το $x_0 = b$ και τερματίζοντας στο $x_n = a$;

Κάθε Δx_k στο άθροισμα Riemann θα αλλάξει πρόσημο, το $x_k - x_{k-1}$ θα είναι τώρα αρνητικό αντί για θετικό. Με την ίδια επιλογή των c_k σε κάθε υποδιάστημα, το πρόσημο του κάθε αθροίσματος Riemann θα αλλάξει, όπως και το πρόσημο του ορίου, δηλαδή το ολοκλήρωμα $\int_b^a f(x)dx$.

Εφ' όσον δεν έχουμε ασχοληθεί προηγουμένως πε την ολοκλήρωση προς τα πίσω οδηγούμαστε να ορίσουμε

$$\int_b^a \mathbf{f(x)dx} = -\int_a^b \mathbf{f(x)dx}$$

1.1.2 Παρατήρηση

Παρατηρούμε ότι εάν $a \langle b$ το ολοκλήρωμα στο δεύτερο μέλος της προηγούμενης εξίσωσης είναι 'από αριστερά προς δεξιά'. Εφ' όσον το ολοκλήρωμα στο αριστερό μέλος της ίδιας εξίσωσης είναι κατά συνέπεια 'από δεξιά προς αριστερά' αυτό σημαίνει ότι αντιστρέφουμε την διεύθυνση με την οποία κινούμαστε κατά μήκος του άξονα προσθέτοντας όρους στο άθροισμα Riemann. Το αποτέλεσμα είναι να αλλάζει το πρόσημο κάθε όρου $\Delta x_j = \left(x_j - x_{j-1}\right)$, αφήνοντας το $f\left(t_j\right)$ αναλλοίωτο, και επομένως αλλάζει το πρόσημο των αθροισμάτων Riemann που αντιστοιχούν στο $\int_a^b f(x)dx$.

Πολύ απλά αυτό μπορούμε να το πούμε ως: *αντιστρέφοντας την διεύθυνση ολοκλήρωσης αλλάζουμε το πρόσημο του ολοκληρώματος.*

1.1.3 Μηδενικό διάστημα Ολοκλήρωσης

Μια άλλη επέκταση του ολοκληρώματος είναι σε ένα διάστημα μηδενικού εύρους, όταν δηλαδή a=b. Εφ' όσον $f(c_k)\Delta x_k$ είναι μηδέν όταν το εύρος $\Delta x_k = 0$, ορίζουμε

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

1.1.4 Γραμμικότητα

Εάν οι συναρτήσεις f και g είναι και οι δύο ολοκληρώσιμες στο διάστημα [a,b] το ίδιο θα συμβαίνει και με την συνάρτηση $c_1 f + c_2 g$ όπου c_1 και c_2 τυχούσες σταθερές. Ακόμη ισχύει

$$\int_a^b \left[c_1 f(x) + c_2 g(x)\right]dx = c_1\int_a^b f(x)dx + c_2\int_a^b g(x)dx$$

Το παραπάνω θεώρημα γενικεύεται.

Αν δηλαδή οι συναρτήσεις $f_1, f_2, f_3, ..., f_n$ είναι ολοκληρώσιμες στο [a,b] το ίδιο θα συμβαίνει και με την $c_1 f_1 + c_2 f_2 + ... + c_n f_n$ όπου $c_1, c_2, ..., c_n$ πραγματικοί αριθμοί. Ισχύει δηλαδή

$$\int_a^b \left[c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x)\right] \cdot dx = c_1\int_a^b f_1(x)dx + c_2\int_a^b f_2(x)dx + \cdots + c_n\int_a^b f_n(x)dx$$

ή, ποίο γενικά

$$\int_a^b \sum_{k=1}^n c_k f_k(x)dx = \sum_{k=1}^n c_k \int_a^b f_k(x)dx$$

1.1.5 Προσθετικότητα ως προς το διάστημα ολοκλήρωσης

Εάν η $f(x)$ είναι συνεχής στο [α,β] και ισχύει a<c<b τότε θα ισχύει

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

1.1.6 Το αναλλοίωτο κατά την μεταφορά

Αν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο [a,b] τότε θα ισχύει

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)dx$$

για κάθε πραγματικό *c*. Στο θεώρημα αυτό η ύπαρξη του ενός ολοκληρώματος συνεπάγεται την ύπαρξη του άλλου.

1.1.7 Επέκταση ή επιβράχυνση διαστήματος ολοκλήρωσης

Αν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο [a,b] τότε θα είναι

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{c}\int_{ca}^{cb} f\left(\frac{x}{c}\right)dx$$

για κάθε πραγματικό $c \neq 0$. Στο θεώρημα αυτό η ύπαρξη του ενός ολοκληρώματος συνεπάγεται την ύπαρξη του άλλου.

1.1.8 Ολοκλήρωμα αρτίων ή περιττών συναρτήσεων

Έχουμε

α. Εάν η f είναι περιττή συνάρτηση στο διάστημα [-a,a] ισχύει δηλαδή $f(-x) = -f(x) \forall x \in [-a,a]$ τότε θα ισχύει $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

b. Εάν η *f* είναι άρτια στο [-a,a], ισχύει δηλαδή $f(-x) = f(x) \forall x \in [-a,a]$ τότε ισχύει

$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$

1.1.9 Πολλαπλασιασμός με σταθερά

Η ιδιότητα αυτή, $\int_{a}^{b} cf(x)dx = c\int_{a}^{b} f(x)dx$, όπου c σταθερά, αποδεικνύεται εύκολα και μας λέει ότι το ολοκλήρωμα μιας σταθερά επί μια συνάρτηση ισούται με την σταθερά επί το ολοκλήρωμα της συνάρτησης. Με άλλα λόγια μια σταθερά (μόνον σταθερά) μπορεί να βγει έξω από το ολοκλήρωμα.

1.1.10 Θεώρημα της Σύγκρισης – Διατήρηση της Ανισότητας

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι και οι δύο ολοκληρώσιμες στο [a,b] και είναι $g(x) \leq f(x)$ για όλα τα x στο [a,b] θα έχουμε

$$\int_{a}^{b} g(x)dx \leq \int_{a}^{b} f(x)dx$$

1.2 Το Ολοκλήρωμα ως συνάρτηση του άνω ορίου.

Θεωρούμε μια συνάρτηση f ολοκληρώσιμη στο [a,b] και της οποίας το ολοκλήρωμα το συμβολίζουμε με $\int_{a}^{b} f(t)dt$ χρησιμοποιώντας την πλασματική μεταβλητή t αντί x.

1.2.1 Παρατήρηση

Αποδεικνύεται ότι η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε υποδιάστημα του [a,b]. Ιδιαίτερα αν *x* είναι τυχόν σημείο του [a,b] τότε το ολοκλήρωμα $\int_{a}^{x} f(t)dt$ υπάρχει.

1.2.2 Παρατήρηση

Επιθυμούμε να κρατήσουμε το a και την f σταθερά και να μελετήσουμε το ολοκλήρωμα ως συνάρτηση του x. Αν την συνάρτηση αυτή την συμβολίσουμε με A(x) θα έχουμε

$$A(x)=\int_a^x f(t)dt \qquad \text{γιά} \qquad a\le x\le b$$

1.2.3 Παρατήρηση

Με βάση τα προηγούμενα μπορούμε να κατασκευάσουμε μια νέα συνάρτηση A(x) από την δοσμένη συνάρτηση f και της οποίας η τιμή σε κάθε σημείο [a,b] να ορίζεται από την σχέση

$$A(x)=\int_a^x f(t)dt \qquad \text{αν} \qquad \alpha\le x\le b$$

Η συνάρτηση A(x) ονομάζεται *ένα αόριστο ολοκλήρωμα της f* και προκύπτει από την f με ολοκλήρωση. Λέμε δε ένα αόριστο ολοκλήρωμα και όχι *το* αόριστο ολοκλήρωμα γιατί η συνάρτηση A(x) εξαρτάται και από το κατώτερο όριο. Διαφορετικές τιμές του a μας δίνουν διαφορετικές συναρτήσεις A(x).

Αυτό φαίνεται καθαρά αν θεωρήσουμε ένα άλλο όριο c και ορίσουμε ένα άλλο αόριστο ολοκλήρωμα F από την εξίσωση

$$F(x)=\int_c^x f(t)dt$$

Με την βοήθεια της προσθετικής ιδιότητας έχουμε

$$A(x)-F(x)=\int_a^x f(t)dt-\int_c^x f(t)dt=\int_a^c f(t)dt$$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι η διαφορά A(x)-F(x) είναι ανεξάρτητη από το x. Συνεπώς δυο οποιαδήποτε αόριστα ολοκληρώματα της ίδιας συνάρτησης διαφέρουν μεταξύ τους κατά μία σταθερά ποσότητα που εξαρτάται από την εκλογή των αριθμών a και c.

1.2.4 Παρατήρηση

Όταν γνωρίζουμε ένα αόριστο ολοκλήρωμα της f, την τιμή του ολοκληρώματος $\int_a^b f(t)dt$ μπορούμε να έχουμε με μια απλή αφαίρεση. Π.χ. αν n είναι ένας ακέραιος μη αρνητικός, από τον τύπο

$$\int_0^x t^n dt=\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

και την προσθετική ιδιότητα βρίσκουμε

$$\int_a^b t^n dt = \int_0^b t^n dt - \int_o^a t^n dt = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$$

Γενικά, αν $F(x) = \int_c^x f(t)dt$, θα είναι

$$\int_a^b f(t)dt = \int_c^b f(t)dt - \int_c^a f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Διαφορετική εκλογή του c αλλάζει απλώς την F(x) κατά μία σταθερά και δεν έχει επίδραση στην διαφορά F(b)-F(a), αφού η σταθερά διαγράφεται κατά την αφαίρεση. Πολλές από τις συναρτήσεις που παίζουν σπουδαίο ρόλο σε διάφορους κλάδους της επιστήμης προκύπτουν με αυτόν ακριβώς τον τρόπο, ως αόριστα δηλαδή ολοκληρώματα άλλων συναρτήσεων. Για τον λόγο αυτό ένα μεγάλο μέρος της Ανάλυσης είναι αφιερωμένο στη σπουδή των συναρτήσεων αυτών.

1.3 Ασκήσεις

1.3.1 Ασκηση

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int \left(x^4 + 2x + \sin x\right)dx$

1.3.2 Ασκηση

Αν είναι γνωστό ότι $\int_0^{10} f(x)dx = 17$ και $\int_0^8 f(x)dx = 12$ να ευρεθεί το $\int_8^{10} f(x)dx$

1.3.3 Ασκηση

Αν $\int_1^5 f(x)dx = 12$ και $\int_4^5 f(x)dx = 3.6$ να ευρεθεί το $\int_1^4 f(x)dx$

1.3.4 Ασκηση

Δοθέντος ότι $\int_0^1 3x\sqrt{x^2+4}\,dx = 5\sqrt{5} - 8$ να ευρεθεί το $\int_0^1 3u\sqrt{u^2+4}\,du$

1.3.5 Ασκηση

Να γραφεί ως ένα απλό ολοκλήρωμα το $\int_{-2}^{2} f(x)dx + \int_2^5 f(x)dx - \int_{-2}^{-1} f(x)dx$

Σημειώματα

Α) Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το υλικό της Μαθηματικής Ανάλυσης προέρχεται από τις σημειώσεις του Επίκουρου Καθηγητή κ. Γεωργίου Ν. Μπροδήμα για τις ανάγκες διδασκαλίας του ομώνυμου μαθήματος στο Τμήμα Φυσικής του Πανεπιστημίου Πατρών .

Β) Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Γεώργιος Ν. Μπροδήμας. «Μαθηματική Ανάλυση. Ενότητα Γ.01: Το Ολοκλήρωμα – Βασικές Ιδιότητες». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: https://eclass.upatras.gr/courses /PHY1912/

Γ) Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».

[1] http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/ Ως Μη Εμπορική ορίζεται η χρήση:

•που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο

•που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο

•που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Δ) Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- ✓ το Σημείωμα Αναφοράς
- ✓ το Σημείωμα Αδειοδότησης
- ✓ τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- ✓ το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφ’ όσον υπάρχει).