Τίτλος Μαθήματος: Μαθηματική Ανάλυση

Ενότητα Β. Διαφορικός Λογισμός

Κεφάλαιο Β.05.1: Μελέτη Συνάρτησης

Όνομα Καθηγητή: Γεώργιος Ν. Μπροδήμας

Τμήμα Φυσικής

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Πίνακας Περιεχομένων

B.05.1 Μελέτη συνάρτησης

5.1.1 Όρια και Απόλυτα Ακρότατα

Για συναρτήσεις που ορίζονται σε ανοικτό διάστημα ή σε ένωση ανοικτών διαστημάτων τα *κρίσιμα σημεία* είναι αυτά που η παράγωγος είναι μηδέν ή δεν υπάρχει. Για συναρτήσεις που ορίζονται σε κλειστά ή ημίκλειστα διαστήματα π.χ.

[a,b], [a,b), (a,b], [a,∞), (-∞,b]

τα άκρα του πεδίου ορισμού (a και b για το [a,b], a για [a,b), b για (a,b], a για [a,∞), b για (-∞,b] ονομάζονται επίσης *κρίσιμα σημεία*.

Τα άκρα αυτά μπορεί να αποτελούν *μέγιστα ή ελάχιστα στα άκρα*.

5.1.1.1 Ορισμός

Έστω *c* ένα άκρο σημείο του πεδίου ορισμού της συνάρτησης f(x). Θα λέμε ότι η *f* έχει άκρο μέγιστο στο c εάν $f(c) \geq f(x)$ για όλα τα x αρκετά κοντά στο c, ενώ θα λέμε ότι η συνάρτηση f(x) έχει άκρο ελάχιστο στο c εάν $f(c) \leq f(x)$ για όλα τα x του πεδίου ορισμού αρκετά κοντά στο c.

5.1.1.2 Παρατήρηση

Τα άκρα ελέγχονται συνήθως με την βοήθεια του πρόσημου της παραγώγου σε γειτονικά σημεία. Για παράδειγμα έστω a το αριστερό άκρο και ότι η f είναι συνεχής από δεξιά σ' αυτό. Εάν $f'(x)<0$ για x κοντά στο a τότε η f(x) είναι φθίνουσα σε ένα διάστημα της μορφής [a, a+δ] και επομένως το f(a) πρέπει να είναι ένα ακραίο μέγιστο (σχήμα 4.4.1). Από την άλλη πλευρά εάν $f'(x)>0$ για x κοντά στο a τότε η f(x) είναι φθίνουσα σε ένα διάστημα της μορφής [a,a+δ] και επομένως το f(a) πρέπει να είναι ένα ακραίο ελάχιστο (σχήμα 4.4.2). Η ίδια λογική εφαρμόζεται και στις υπόλοιπες περιπτώσεις.

5.1.1.3 Παρατήρηση

Το εάν μια συνάρτηση f έχει ή όχι τοπικό ακραίο ακρότατο σε κάποιο σημείο εξαρτάται αποκλειστικά από την συμπεριφορά της για x πολύ κοντά στο σημείο αυτό. Τα απόλυτα ακρότατα εξαρτώνται από την συμπεριφορά της συνάρτησης σε όλο το πεδίο ορισμού.

5.1.1.4 Παρατήρηση

Τα σημεία ενός διαστήματος I που δεν είναι άκρα του ονομάζονται εσωτερικά σημεία του I. Για ένα εσωτερικό σημείο $x_0 \in I$ υπάρχει πάντα ένα δ>0 τέτοιο ώστε $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subset I$, όπου I=[α,β] και $x_0 \in (\alpha,\beta)$

5.1.1.5 Παράδειγμα

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=x^2-2|x|+2$, $x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$, για την οποία συμπεραίνουμε ότι το σημείο -1/2 είναι ακραίο ελάχιστο ενώ το 3/2 είναι ακραίο μέγιστο.

5.1.1.6 Παράδειγμα

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=x\sqrt{x}-6\sqrt{x}$. Το πεδίο ορισμού της είναι [0, ∞) και επομένως το 0 είναι κρίσιμο σημείο. Εργαζόμενοι ομοίως συμπεραίνουμε ότι το 0 είναι ακραίο μέγιστο.

5.1.1.7 Τοπικά Μέγιστα και ελάχιστα

Σε πολλά προβλήματα οικονομίας, τεχνολογίας και φυσικής είναι σημαντικό να προσδιορίσουμε το πόσο μεγάλη ή πόσο μικρή μπορεί να γίνει μία ποσότητα. Εάν το πρόβλημα επιδέχεται Μαθηματική διατύπωση, συχνά ανάγεται σε πρόβλημα εύρεσης μέγιστης ή ελάχιστης τιμής κάποιας συνάρτησης. Στην παράγραφο αυτή θα θεωρήσουμε μέγιστες και ελάχιστες τιμές για συναρτήσεις που ορίζονται σε ανοικτό διάστημα ή σε ένωση ανοικτών διαστημάτων.

5.1.1.8 Ορισμός

Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα διάστημα I θα λέμε ότι παρουσιάζει στο σημείο $x_0\in f$

- *τοπικό μέγιστο*, όταν υπάρχει δ>0 τέτοιο ώστε $\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap f\rightarrow\ f(x)\le f(x_0)$
- *τοπικό ελάχιστο,* όταν υπάρχει δ>0 τέτοιο, ώστε $\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap f\rightarrow f(x)\ge f(x_0)$

5.1.1.9 Παρατήρηση

Ένα τοπικό ελάχιστο μπορεί να είναι μεγαλύτερο από ένα τοπικό μέγιστο

5.1.1.10 Παρατήρηση

Τα σημεία α, β του διαστήματος I μπορεί να είναι σημεία τοπικών ακρότατων της f.

5.1.1.11 Θεώρημα

"Αν μία συνάρτηση $f:\Delta\rightarrow R$ παρουσιάζει στο εσωτερικό σημείο x_0 του διαστήματος Δ τοπικό ακρότατο και είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε $f'(x_0)=0$".

Το θεώρημα αυτό εκφράζει την αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι ένα εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού μια συνάρτησης f, σημείο τοπικού ακρότατου.

5.1.1.12 Παρατήρηση

Το αντίστροφο του προηγουμένου θεωρήματος δεν ισχύει, αφού για την συνάρτηση $f(x)=x^3$ ισχύει $f'(0)=0$ χωρίς αυτή να παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο εσωτερικό σημείο 0.

5.1.1.13 Παρατήρηση

Μία συνάρτηση είναι δυνατόν να παρουσιάζει ακρότατο σε ένα σημείο x_0 χωρίς να είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x)=|x|$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$, αλλά παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο αυτό.

Η προηγούμενη παρατήρηση συνδυαζόμενη με το Θεώρημα Fermat οδηγεί στο παρακάτω

5.1.1.14 Θεώρημα

" Εάν η f(x) έχει τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο στο σημείο c τότε θα ισχύει f'(c)=0 ή f'(c) δεν υπάρχει

Εάν f'(x)>0 ή f'(x)<0 τότε από το Θ. 4.1.2, S+H 184, πρέπει να υπάρχουν αριθμοί x_1 και x_2 όσο θέλουμε κοντά στο c και να ικανοποιούν

$$f(x_1)<f(c)<f(x_2)$$

αυτό καθιστά αδύνατη την ύπαρξη μεγίστου ή ελαχίστου στο c.

5.1.1.15 Παρατήρηση

Όταν το σημείο ακρότατου είναι άκρο του διαστήματος ορισμού της συνάρτησης τότε η παράγωγος μπορεί να μη μηδενίζεται σ' αυτό. Η συνάρτηση $f(x)=x^2+1,\quad x\geq -1$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο σημείο $x_0=-1$ ενώ $f'(-1)=-2\neq 0$.

5.1.1.16 Παρατήρηση

Για μία συνεχή συνάρτηση f τα εσωτερικά σημεία x του διαστήματος I όπου f'(x)=0 ονομάζονται *στάσιμα σημεία* της f. Τα στάσιμα σημεία καθώς και τα σημεία όπου η f δεν είναι παραγωγίσιμη ονομάζονται κρίσιμα σημεία της f. Επομένως όταν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (a,b) τότε τα σημεία τοπικών ακρότατων θα αναζητηθούν μεταξύ των στάσιμων σημείων της f δηλαδή μεταξύ των σημείων μηδενισμού της παραγώγου. Γίνεται δε φανερό ότι:

" Οι θέσεις των πιθανών τοπικών ακρότατων μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού I=[α,β] είναι τα κρίσιμα σημεία της και τα άκρα του I.

5.1.2 Μονοτονία Συναρτήσεων

5.1.2.1 Πρόταση

Για κάθε συνάρτηση f, συνεχή στο διάστημα [α,β] ισχύουν:

- αν f'(x)>0 για κάθε x∈(α,β) τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο [α,β]
- αν f'(x)<0 για κάθε x∈(α,β) τότε η *f* είναι γνησίως φθίνουσα στο [α,β].

5.1.2.2 Παρατήρηση

Η παραπάνω πρόταση ισχύει και στην περίπτωση που το διάστημα είναι της μορφής [α,β) ή (α,β] ή (α,β). Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ και για κάθε x$\in(0,+\infty)$ ισχύει $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}>0$. Επομένως, σύμφωνα με την πρόταση η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

5.1.2.3 Παρατήρηση

Το αντίστροφο της παραπάνω πρότασης δεν ισχύει γιατί για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x)=x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο [-1,1] χωρίς όμως να ισχύει f'(x)>0 στο (-1,1) αφού f'(0)=0.

5.1.3 Προσδιορισμός Ακρότατων Τιμών Συνάρτησης

5.1.3.1 Ορισμός

Θεωρούμε σημείο *d* του πεδίου ορισμού της *f* που μπορεί να είναι εσωτερικό ή ακραίο. Θα ονομάζουμε το *f(d) απόλυτο μέγιστο* της *f* εάν

$$f(d)\geq f(x)$$

για όλα τα x στο πεδίο ορισμού της f.

Θα ονομάζουμε το f(d) *απόλυτο ελάχιστο* της f εάν

$$f(d)\leq f(x)$$

για όλα τα x στο πεδίο ορισμού της f.

5.1.3.2 Πρόταση

Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη στο (α,β) και συνεχής στο $x_0 \in (‡,‰)$.

- αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,x_0) και γνησίως φθίνουσα στο (x_0,β), τότε το $f(x_0)$ είναι το μέγιστο της f στο (α,β).
- αν η *f* είναι γνησίως φθίνουσα στο (α,x_0) και γνησίως αύξουσα στο (x_0,β), τότε το $f(x_0)$ είναι ελάχιστο της f στο (α,β).

5.1.3.3 Θεώρημα (κριτήριο πρώτης παραγώγου)

Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$ και συνεχής στο x_0.

- αν f'(x)>0 για κάθε $x\in(\alpha,x_0)$ και f'(x)<0 για κάθε $x\in(x_0,\beta)$ τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο.
- αν f'(x)<0 για κάθε $x\in(\alpha,x_0)$ και f'(x)>0 για κάθε $x\in(x_0,\beta)$ τότε το $f(x_0)$ είναι

τοπικό ελάχιστο.

5.1.3.4 Παρατήρηση

Σύμφωνα με το παραπάνω κριτήριο, για μία συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής στο διάστημα (α,β) τα σημεία του (α,β) εκατέρωθεν των οποίων η παράγωγος f′ αλλάζει πρόσημο είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων.

5.1.3.5 Παρατήρηση

Αν η f'(x) διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0 τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο.

5.1.3.6 Θεώρημα (κριτήριο δεύτερης παραγώγου)

Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα I και x_0 εσωτερικό σημείο του *I* για το οποίο ισχύει $f(x_0)=0$ και υπάρχει η $f''(x_0)$

- αν $f''(x_0)<0$ τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο
- αν $f''(x_0)>0$ τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο

5.1.3.7 Παρατήρηση

Σε ένα στάσιμο σημείο x_0 όπου $f'(x_0)=0$ είναι δυνατόν να ισχύει και $f''(x_0)=0$ οπότε το κριτήριο της δεύτερης παραγώγου δεν μπορεί να εφαρμοσθεί. Στις περιπτώσεις αυτές μπορούμε να καταφύγουμε στο κριτήριο της 1ης παραγώγου. Για παράδειγμα για την συνάρτηση $f(x)=x^4$ είναι $f'(x)=4x^3$ $f''(x)=12x^2$ οπότε $f'(0)=f''(0)=0$. Επειδή f'(x)<0 για $x\in(-\infty,0)$ και f'(x)>0 για $x\in(0,+\infty)$ το f(0) είναι τοπικό ελάχιστο.

5.1.4 Κοίλα, Κυρτά και σημεία Καμπής

5.1.4.1 Ορισμός

Έστω μία συνάρτηση f συνεχής στο [α,β] και παραγωγίσιμη στο (α,β).

1. Λέμε ότι η *f* είναι *κοίλη ή στρέφει τα κοίλα προς τα άνω στο [α,β]* αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β)
2. Λέμε ότι η *f* είναι *κοίλη ή στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο [α,β]* αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο (α,β).

Για παράδειγμα η συνάρτηση sinx στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο διάστημα [0,π], ενώ στρέφει τα κοίλα προς τα άνω στο διάστημα [π,2π].

5.1.4.2 Πρόταση

Έστω μία συνάρτηση f συνεχής στο [α,β] και δυο φορές παραγωγίσιμη στο (α,β).

1. Αν f''(x)>0 στο (α,β) τότε η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω στο [α,β].

2. Αν f''(x)<0 στο (α,β) τότε η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο [α,β].

Για την συνάρτηση f(x)=sinx έχουμε f''(x)=-sinx επομένως

- στο διάστημα (0,π) είναι f''(x)=-sinx<0, οπότε η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο [0,π].
- στο διάστημα (π,2π) είναι f''(x)=-sinx>0 οπότε η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω στο [π,2π].

5.1.4.3 Ορισμός

Ένα σημείο $P\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f όταν

1. Η f είναι συνεχής στο x_0.

2. Υπάρχει η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο P.

3. Η *f* στρέφει τα κοίλα προς τα άνω αριστερά του x_0 και προς τα κάτω δεξιά του x_0, ή αντιστρόφως.

Όταν το $P\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f τότε λέμε ότι το x_0 είναι θέση σημείου καμπής της f. Ειδικότερα, Όταν το x_0 είναι και στάσιμο σημείο, δηλαδή f'(x_0)=0 τότε λέμε ότι έχουμε ένα σημείο καμπής με οριζόντια εφαπτομένη.

5.1.4.4 Πρόταση

Αν το $P\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$ είναι ένα σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f τότε

f''(x)=0 ή δεν υπάρχει f'' στο x_0

5.1.4.5 Παρατήρηση

1. Οι θέσεις των σημείων καμπής μια συνάρτησης αναζητούνται μεταξύ των ριζών της εξίσωσης f''(x)=0 και των σημείων του πεδίου ορισμού της f στα οποία δεν υπάρχει η f''.

2. Εάν το σημείο x_0 είναι ρίζα της f''(x)=0 και η f'' αλλάζει σημείο εκατέρωθεν του x_0 τότε το σημείο αυτό είναι θέση σημείου καμπής.

3. Αν δεν υπάρχει η f'' στο x_0 και η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 τότε το σημείο αυτό είναι θέση σημείου καμπής της f αν στο σημείο $P\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$ υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f.

4. Αν η f'' διατηρεί το ίδιο πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 τότε δεν αλλάζει η κυρτότητα της f εκατέρωθεν του x_0. Επομένως το x_0 δεν είναι θέση σημείου καμπής της f.

5.1.5 Ασύμπτωτες

Όταν μελετάμε μια συνάρτηση y=f(x) της οποίας το πεδίο ορισμού η το σύνολο τιμών ή και τα δύο δεν είναι φραγμένα, τότε είναι δύσκολο να κατανοηθεί η συμπεριφορά της για πολύ μεγάλες ή για πολύ μικρές τιμές των x και y. Στις περιπτώσεις αυτές αναζητούμε ευθείες οι οποίες, γι' αυτές τις τιμές των x και y, να προσεγγίζουν ικανοποιητικά τη γραφική παράσταση της f. Οι ευθείες αυτές ονομάζονται *ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.*

5.1.5.1 Ορισμός

Η ευθεία y=β είναι *οριζόντια ασύμπτωτη* της γραφικής παράστασης της f όταν

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\beta \quad \text{ή} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\beta$$

Η ευθεία x=α είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f Όταν ένα τουλάχιστον από τα όρια

$$\lim_{x\to\alpha^+} f(x),\quad \lim_{x\to\alpha^-} f(x) \quad \text{είναι } +\infty \text{ ή } -\infty$$

5.1.5.2 Ορισμός

Η ευθεία y=λx+μ είναι *ασύμπτωτη* της γραφικής παράστασης της f εάν

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-\lambda x-\mu\right)=0$$

5.1.5.3 Παρατήρηση

Η ασύμπτωτη y=λx+μ είναι οριζόντια αν λ=0 ενώ Όταν $\lambda\neq0$ ονομάζεται πλάγια ασύμπτωτη.

5.1.5.4 Πρόταση

Η ευθεία y=λx+μ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f όταν και μόνον όταν

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda\in R \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\lambda x\right)=\mu\in R$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda\in R \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-\lambda x\right)=\mu\in R$$

Σημειώματα

Α) Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το υλικό της Μαθηματικής Ανάλυσης προέρχεται από τις σημειώσεις του Επίκουρου Καθηγητή κ. Γεωργίου Ν. Μπροδήμα για τις ανάγκες διδασκαλίας του ομώνυμου μαθήματος στο Τμήμα Φυσικής του Πανεπιστημίου Πατρών .

Β) Σημείωμα Αναφοράς

Γ) Σημείωμα Αδειοδότησης

Δ) Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- ✓ το Σημείωμα Αναφοράς
- ✓ το Σημείωμα Αδειοδότησης
- ✓ τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- ✓ το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφ’ όσον υπάρχει).