Τίτλος Μαθήματος: Μαθηματική Ανάλυση

Ενότητα Β. Διαφορικός Λογισμός

Κεφάλαιο Β.07: Εκθετικές και Λογαριθμικές Συναρτήσεις

Όνομα Καθηγητή: Γεώργιος Ν. Μπροδήμας

Τμήμα Φυσικής

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Πίνακας Περιεχομένων

Β.07 Εκθετικές και Λογαριθμικές συναρτήσεις

7.1 Η έννοια του Λογαρίθμου

Εάν *B* είναι ένας θετικός αριθμός, διάφορος του *1*, τότε ο λογάριθμος ενός αριθμού *C* ως προς βάση τον αριθμό *B* ορίζεται, στα στοιχειώδη Μαθηματικά, ως

$$C = \log_B A \quad \varepsilon\alpha\nu \ B^C = A$$

Γενικά εκλέγουμε ως βάση τον αριθμό *10* και οι παραπάνω σχέσεις γράφονται

$$C = \log_{10} A \quad \varepsilon\alpha\nu \quad 10^C = A$$

Οι βασικές ιδιότητες του δεκαδικού λογαρίθμου $(\log_{10})$ συνοψίζονται στις παρακάτω. Θεωρούμε πάντα $x, y \rangle 0$.

$$\log_{10}(x \cdot y) = \log_{10} x + \log_{10} y \qquad \log_{10} 1 = 0$$

$$\log_{10}\left(\frac{1}{y}\right) = -\log_{10} y \qquad \log_{10}\left(\frac{x}{y}\right) = \log_{10} x - \log_{10} y$$

$$\log_{10}\left(x^y\right) = y \cdot \log_{10} x \qquad \log_{10} 10 = 1$$

Η στοιχειώδης αυτή έννοια του λογαρίθμου είναι ανεπαρκής για τον Απειροστικό Λογισμό.

Θα πρέπει επομένως να αναζητήσουμε μια τελείως διαφορετική προσέγιση στην έννοια του Λογαρίθμου. Αντί να ασχολούμαστε με τον στοιχειώδη ορισμό θα τον αγνοήσουμε τελείως. Απο την σκοπιά μας η θεμελιώδης ιδιότητα των λογαρίθμων είναι οτι μετασχηματίζουν τον πολλαπλασιασμό σε πρόσθεση, δηλαδή

Λογάριθμος Γινομένου = Αθροισμα Λογαρίθμων

Θεωρώντας αυτό ως κεντρική ιδέα οδηγούμαστε σε μια γενική έννοια του λογαρίθμου η οποία περιλαμβάνει την στοιχειώδη έννοια, οδηγεί Όμως απο μόνη της καλά στις μεθόδους του απειροστικού λογισμού, οδηγεί ακόμη με φυσικό τρόπο στην επιλογή μιας βάσης που απλοποιεί πολύ πολλούς υπολογισμούς.

7.1.1 Ορισμός

Λογαριθμική συνάρτηση είναι μια μη σταθερή διαφορίσιμη συνάρτηση f που ορίζεται σε ένα σύνολο θετικών αριθμών έτσι ώστε για όλα τα x>0 και y>0 να ισχύει

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

Ας θεωρήσουμε, προσωρινά οτι μια τέτοια συνάρτηση υπάρχει, και ας προσπαθήσουμε να δούμε τι μπορούμε να βρούμε γι' αυτήν. Κατ' αρχήν εάν υπάρχει μια τέτοια συνάρτηση θα πρέπει να ισχύουν:

1. Σχετικά με την τιμή της για x=1

$$f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1) = 2f(1) \quad \varepsilon\pi o\mu\acute{\varepsilon}\nu\omega\varsigma \quad f(1) = 0$$

2. Αν θεωρήσουμε y>0 θα έχουμε

$$0 = f(1) = f\left(y \cdot \frac{1}{y}\right) = f(y) + f\left(\frac{1}{y}\right)$$

και επομένως

$$f\left(\frac{1}{y}\right) = -f(y)$$

3. Αν θεωρήσουμε x>0 και y>0 θα έχουμε

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(y \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$$

αυτό, σε συνδυασμό με το προηγούμενο συμπέρασμα, σημαίνει

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$$

Μπορούμε τωρα να εξετάσουμε τι γίνεται με την παράγωγο. Σημειώνουμε οτι υποθέσαμε διαφορίσιμη συνάρτηση. Σχηματίζουμε το γνωστό πηλίκο

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Απο αυτά που έχουμε βρεί προηγουμένως προκύπτει

$$f(x+h) - f(x) = f\left(\frac{x+h}{x}\right) = f\left(1 + \frac{h}{x}\right)$$

και επομένως

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h}$$

Ενθυμούμενοι οτι *f(1)=0* και πολλαπλασιάζοντας τον παρονομαστή με *x/x* έχουμε

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{x}\left[\frac{f\left(1 + \frac{h}{x}\right) - f(1)}{\frac{h}{x}}\right]$$

Καθώς το *h* τείνει στο μηδέν το αριστερό μέρος τείνει στο $f'(x)$, και, επειδή το 1/x παραμένει σταθερό, το *h/x* τείνει στο μηδέν και η έκφραση στην αγκύλη τείνει στο f©(1). Τελικά έχουμε

$$f'(x) = \frac{1}{x} f'(1)$$

δείξαμε δηλαδή ότι Εάν η *f* είναι η συνάρτηση λογάριθμος, τότε θα ισχύει

$$f(1)=0 \quad \text{και} \quad f'(x)=\frac{1}{x}f'(x)$$

Δεν μπορούμε να έχουμε f©(1) = 0 και γι΄αυτό θεωρούμε την f σταθερή (???). Η Πιο φυσική εναλλακτική επιλογή είναι να θέσουμε f©(1) = 1. (???). Η παράγωγος τότε είναι 1/x.

Η συνάρτηση αυτή που έχει τιμή 0 στο x=1 και έχει παράγωγο 1/x για x>0, θα πρέπει, απο το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού να έχει την μορφή

$$\int_t^x \frac{dt}{t}$$

7.1.2 Ορισμός

Η συνάρτηση

$$L(x)=\int_t^x \frac{dt}{t}, \quad x\rangle 0$$

είναι η (**φυσική**) **Λογαριθμική Συνάρτηση.**

7.1.3 Παρατήρηση

1. Η λογαριθμική συνάρτηση L ορίζεται στο (0,∞) και έχει παράγωγο

$$L'(x)=\frac{1}{x} \quad \text{για ολα τα } x\rangle 0$$

2. Η L' είναι θετική στο (0,∞) και επομένως είναι αύξουσα συνάρτηση.

3. Η L είναι συνεχής στο (0,∞) και επομένως διαφορίσιμη στο ίδιο διάστημα.

4. Για x>1 η L μας δίδει το Εμβαδά της γραμμοσκιασμένης περιοχής του σχ. (...)

5. Η L είναι αρνητική Εάν 0<x<1, μηδέν στο x=1, θετική για x>1.

7.1.4 Θεώρημα

Εάν x>0 και y>0 τότε ισχύει

$$L(x\cdot y)=L(x)+L(y)$$

7.1.5 Θεώρημα

Το πεδίο τιμών της L είναι (-∞,∞).

7.1.6 Ο αριθμός e

Εφ' όσον το πεδίο τιμών της L είναι (-∝,∝) και η L είναι αύξουσα συνάρτηση θα παίρνει όλες τις τιμές και για μία φορά. Πιο συγκεκριμένα υπάρχει ένας και μόνον ένας αριθμός στον οποίο η συνάρτηση L παίρνει την τιμή 1. Ο μονοσήμαντος αυτός αριθμός συμβολίζεται με e προς τιμήν του Ελβετού Μαθηματικού Leonard Euler (1707 -

1783). Εφ' όσον

$$L(e)=\int_t^e \frac{dt}{t}=1$$

από το θεώρημα (???) θα έχουμε $L\left(e^{p/q}\right)=\frac{p}{q}$ για όλους τους ρητούς αριθμούς p/q. Λόγω ακριβώς της σχέσης αυτής ονομάζουμε την L τον **λογάριθμο ως προς την βάση e** και γράφουμε

$$L(x)=\log_e x$$

Ο αριθμός e εμφανίζεται, εκ των πραγμάτων, σε πολλές περιπτώσεις. Ονομάζουμε την L(x) φυσικό λογάριθμο και γράφουμε

$$L(x)=\ln x$$

7.1.7 Παρατήρηση

Οι βασικότερες ιδιότητες του φυσικού λογαρίθμου *lnx* είναι:

1. $\ln 1=0$
2. $\ln e=0$
3. $\ln(x\cdot y)=\ln x+\ln y$
4. $\ln\left(\frac{1}{x}\right)=-\ln y$
5. $\ln\left(\frac{x}{y}\right)=\ln x-\ln y$
6. $\ln x^r=r\ln x$

Σημειώνουμε το πόσο κοντά και παράλληλα πάνε οι νόμοι αυτοί με τους νόμους κοινού λογαρίθμου (με βάση το 10). Αργότερα θα δείξουμε οτι ο νόμος 6 ισχύει και για τους άρρητους αριθμούς.

7.1.8 Γραφική παράσταση της Λογαριθμικής συνάρτησης.

Είδαμε ότι η λογαριθμική συνάρτηση

$$\ln x=\int_t^x \frac{dt}{t}$$

έχει domain (0,$\propto$) και range (-$\propto$,$\propto$). Η παράγωγός της είναι

$$\frac{d}{dx}(\ln x)=\frac{1}{x}\rangle 0$$

αφού $x\in(0,\infty)$. Για μικρά x η παράγωγος παίρνει μεγάλες τιμές (κοντά στο 0 η καμπύλη γίνεται κατακόρυφη) ενώ για μεγάλα x η παράγωγος παίρνει μικρές τιμές. (για πολύ μεγάλα x η παράγωγος γίνεται επίπεδη ???). Στο σημείο x=1 ο λογάριθμος είναι 0 ενώ η παράγωγος, το 1/x είναι 1. Αυτό σημαίνει οτι η καμπύλη τέμνει τον άξονα των x στο σημείο (0,1) και ότι η εφαπτόμενη στο σημείο αυτό είναι μία παράλληλη προς την γραμμή y=x.

Η δεύτερη παράγωγος είναι

$$\frac{d^2}{dx^2}(\ln x)=-\frac{1}{x^2}$$

και είναι αρνητική στο (0,$\propto$) και η καμπύλη στρέφει τα κοίλα (???) προς τα κάτω παντού.

Ο άξονας των y είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη γιατί

$$x \to 0^+, \quad \ln x \to -\infty$$

7.1.9 Εφαρμογή

Να υπολογισθεί

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{dt}{t}$$

από την διαμέριση

$$P = \left\{1 = \frac{10}{10}, \frac{11}{10}, \frac{12}{10}, \frac{13}{10}, ..., \frac{20}{10} = 2\right\}$$

7.1.10 Διαφόριση Λογαριθμικής συνάρτησης

Γνωρίζουμε ότι για x>0

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

εάν u είναι μία θετική και διαφορίσιμη συνάρτηση του x, τότε από τον chain rule θα έχουμε

$$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{d}{du}(\ln u)\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx}$$

για παράδειγμα

$$\frac{d}{dx}\left[\ln\left(1+x^2\right)\right] = \frac{1}{1+x^2}\cdot 2x = \frac{2x}{1+x^2}$$

για όλα τα πραγματικά x. Επίσης

$$\frac{d}{dx}\left[\ln(1+3x)\right] = \frac{3}{1+3x}$$

για όλα τα x>-1/3.

7.1.11 Παράδειγμα

Να ευρεθεί το domain της f και η f'(x) εάν

$$f(x) = \ln\left(x \cdot \sqrt{1+3x}\right)$$

7.1.12 Παράδειγμα

Να γίνει η γραφική παράσταση της

$$f(x) = \ln|x|$$

7.1.13 Ασκηση

Δείξτε ότι

$$\frac{d}{dx}\left(\ln|x|\right)=\frac{1}{x} \quad \gamma\iota\alpha\ o\lambda\alpha\ \tau\alpha\ x\neq 0$$

7.1.14 Ασκηση

Να ευρεθεί το domain της f και η f'(x) δοθέντος ότι

$$f(x)=\left(\ln x^2\right)^3$$

7.1.15 Παράδειγμα

Δείξτε ότι εάν η u είναι διαφορίσιμη συνάρτηση του x, τότε, για u≠o

$$\frac{d}{dx}\left(\ln|u|\right)=\frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx}$$

7.1.16 Ασκηση

Έστω

$$f(x)=\ln\left(\frac{x^4}{x-1}\right)$$

Να προσδιορισθούν

α. το πεδίο ορισμού της f

β. σε ποιά διαστήματα η f(x) είναι αύξουσα και σε ποιά φθίνουσα;

γ. ποιές οι ακρότατες τιμές f

δ. τα κοίλα και τα κυρτά καθώς και τα σημεία καμπής της καμπύλης.

ε. η γραφική παράσταση της καμπύλης και οι ασύμπτωτοι, αν υπάρχουν

Σημειώματα

Α) Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το υλικό της Μαθηματικής Ανάλυσης προέρχεται από τις σημειώσεις του Επίκουρου Καθηγητή κ. Γεωργίου Ν. Μπροδήμα για τις ανάγκες διδασκαλίας του ομώνυμου μαθήματος στο Τμήμα Φυσικής του Πανεπιστημίου Πατρών .

Β) Σημείωμα Αναφοράς

Γ) Σημείωμα Αδειοδότησης

Δ) Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- ✓ το Σημείωμα Αναφοράς
- ✓ το Σημείωμα Αδειοδότησης
- ✓ τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- ✓ το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφ' όσον υπάρχει).