Τίτλος Μαθήματος: Μαθηματική Ανάλυση

Ενότητα Β. Διαφορικός Λογισμός

Κεφάλαιο Β.04: Βασικά Θεωρήματα Διαφορικού Λογισμού

Όνομα Καθηγητή: Γεώργιος Ν. Μπροδήμας

Τμήμα Φυσικής

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Πίνακας Περιεχομένων

B.04 Βασικά Θεωρήματα Διαφορικού Λογισμού

4.1 Εισαγωγή

Το Θεώρημα Μέσης Τιμής ανακοινώθηκε για πρώτη φορά απο τον Γάλλο Μαθηματικό Joseph Louis Lagrange (1736-1813) και ήρθε να επηρεάσει όλη την Θεωρητική δομή του Απειροστικού Λογισμού, και έχει ως εξής:

" Εάν η συνάρτηση f(x) είναι διαφορίσιμη στο (α,β) και συνεχής στο [α,β] τότε υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός c στο (α,β) για τον οποίο ισχύει

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Ο αριθμός

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

είναι η κλίση της γραμμής l η οποία διέρχεται από τα σημεία (a,f(a)) και (b,f(b)). Όταν λέμε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον αριθμός *c* για τον οποίο ισχύει

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

σημαίνει ότι η γραφική παράσταση της f έχει τουλάχιστον ένα σημείο (c,f(c)) στο οποίο η εφαπτόμενη είναι παράλληλη στην γραμμή l.

Θα αποδείξουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής σταδιακά. Πρώτα θα δείξουμε ότι εάν μία συνάρτηση f έχει μη μηδενική παράγωγο σε ένα σημείο x_0, τότε πολύ κοντά στο x_0 η f(x) είναι μεγαλύτερη του $f(x_0)$ από την μία πλευρά του x_0 και μικρότερη του $f(x_0)$ από την άλλη πλευρά του x_0

4.1.1 Θεώρημα

Έστω συνάρτηση f(x) *διαφορίσιμη* στο x_0.

- Εάν $f'(x_0)>0$ τότε $f(x_0-h)<f(x_0)<f(x_0+h)$
- Εάν $f'(x_0)<0$ τότε $f(x_0+h)<f(x_0)<f(x_0-h)$

για όλα τα θετικά και πολύ μικρά h.

Θα αποδείξουμε μόνο την περίπτωση $f(x_0)>0$, η άλλη αφίεται ως άσκηση στον αναγνώστη. Από τον ορισμό της παραγώγου

$$\lim_{k\to 0}\frac{f(x_0+k)-f(x_0)}{k}=f'(x_0)$$

Όταν $f'(x_0)>0$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την $f'(x_0)$ ως ε και να συμπεράνουμε ότι υπάρχει δ>0 τέτο-

ιο ώστε εάν $0<|k|<\delta$ *τότε* $\left|\dfrac{f(x_0+k)-f(x_0)}{k}-f'(x_0)\right|<f'(x_0)$

για αυτό το k θα έχουμε $\dfrac{f(x_0+k)-f(x_0)}{k}>0$

εάν τώρα 0<h<δ, τότε $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}>0$ *και* $\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}>0$

και επομένως $f(x_0)<f(x_0+h)$ *και* $f(x_0-h)<f(x_0)s$

Το επόμενο βήμα είναι να αποδείξουμε το Θεώρημα Rolle που αποτελεί ειδική περίπτωση του Θεωρήματος Μέσης Τιμής. Ανακοινώθηκε για πρώτη φορά το 1691 από τον Γάλλο Μαθηματικό Michel Rolle. Στο θεώρημα αυτό κάνουμε την επί πλέον υπόθεση ότι f(a)=f(b)=0. Αυτό σημαίνει ότι η γραμμή που ενώνει τα σημεία (a,f(a)) και (b,f(b)) είναι οριζόντια. Το συμπέρασμα του Θεωρήματος είναι ότι υπάρχει σημείο (c,f(c)) στο οποίο η ε-φαπτόμενη είναι οριζόντια.

4.1.2 Θεώρημα Rolle

Εάν μία συνάρτηση f είναι

- συνεχής στο κλειστό διάστημα [α,β]
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β)
- f(α)=f(β)

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε f'(ξ)=0.

Εάν η συνάρτηση f είναι σταθερά 0 στο διάστημα [a,b] το συμπέρασμα είναι προφανές. Εάν δεν είναι σταθερά 0 στο [a,b] τότε η f ή θα παίρνει κάποιες θετικές τιμές ή κάποιες αρνητικές. Υποθέτουμε μόνο θετικές τιμές. Την άλλη περίπτωση την αφήνουμε ως άσκηση.

Εφ' όσον η f είναι συνεχής στο [a,b] τότε σε κάποιο σημείο c του [a,b] θα παίρνει την μέγιστη τιμή σύμφωνα με το θεώρημα S+H, 2.6.2. Η μέγιστη αυτή τιμή f(c) πρέπει να είναι θετική. Εφ' όσον f(a)=f(b)=0 το c δεν μπορεί να ισούται ούτε με το a ούτε με το b. Αυτό σημαίνει ότι το c πρέπει να ανήκει στο (a,b) και επομένως η f'(c) υπάρχει. Τώρα η f'(c) δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη του μηδενός ούτε μικρότερη γιατί κάτι τέτοιο θα σήμαινε ότι η f παίρνει τιμές μεγαλύτερες του f(c). (από το Θ. S+H 4.1.2) Καταλήγουμε επομένως ότι f'(c)=0.

Όσα μέχρι τώρα αναφέραμε μας επιτρέπουν να αποδείξουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής

4.1.3 Θεώρημα Μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού

Εάν μία συνάρτηση f είναι

- συνεχής στο κλειστό διάστημα [α,β]
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β)

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστο σημείο $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε

$$f(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \quad ή \quad f(\beta)-f(\alpha)=f'(\xi)(\beta-\alpha)$$

Θα δημιουργήσουμε τώρα μια συνάρτηση g(x) η οποία να ικανοποιεί τις συνθήκες του Θεωρήματος Rolle και να σχετίζεται με την f(x) έτσι ώστε το συμπέρασμα g'(x)=0 να οδηγεί στο συμπέρασμα

$$f'(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι η συνάρτηση

$$g(x)=f(x)-\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\right]$$

είναι ακριβώς η συνάρτηση που ζητάμε. Η συνάρτηση *g(x)* παρίσταται γραφικά στο σχήμα (S+H, 4.1.3, 186). Η γραμμή που περνά από τα σημεία (a,f(a)) και (b,f(b)) έχει εξίσωση

$$y=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$

Η διαφορά τώρα g(x)=f(x)-y είναι απλά η κατακόρυφη διαφορά της γραφικής της f και της γραμμής.

Εάν η f(x) είναι διαφορίσιμη στο (a,b) και συνεχής στο [a,b] το ίδιο θα είναι και η g(x). Εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί ότι g(a)=g(b)=0. Επομένως σύμφωνα με το Θεώρημα Rolle θα υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο c του (a,b) που θα ισχύει g'(x)=0. Εφ' όσον γενικά ισχύει

$$g'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

και πιο ειδικά

$$g'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

η σχέση g'(c)=0 μας δίνει

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Το τελευταίο αυτό συμπέρασμα γράφεται και ως $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$

4.1.4 Πρόταση

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα I και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in f$ είναι $f'(x)=0$ τότε η f είναι σταθερή στο I.

4.1.5 Θεώρημα

Έστω δύο συναρτήσεις $f_1(x)$ και $f_2(x)$ συνεχείς στο [α,β] και διαφορίσιμες στο (a,b). Έστω ακόμη ότι ισχύει $f_1(a)=f_2(a)$ και $f_1(b)=f_2(b)$. Τότε θα υπάρχει ένα σημείο x_0 στο (a,b) έτσι ώστε $f_1'(x_0)=f_2'(x_0)$.

Έστω $f(x)=f_1(x)-f_2(x)$. Εφ' όσον $f_1(x)$ και $f_2(x)$ είναι διαφορίσιμες στο (a,b) και συνεχείς στο [a,b] το ίδιο θα ισχύει και για την f(x). Εξ υποθέσεως έχουμε f(a)=f(b)=0. Από το Θεώρημα (???) θα έχουμε $f'(x_0)=0$ για κάποιο x_0 στο (a,b). Επομένως $f_1'(x_0)=f_2'(x_0)$.

4.1.6 Παρατήρηση

Το προηγούμενο θεώρημα ονομάζεται "Θεώρημα των Ιπποδρομιών" και έχει την ακόλουθη ερμηνεία. Θεωρούμε δύο άλογα που τρέχουν σε μια ιπποδρομία. Ξεκινούν και τερματίζουν στο ίδιο σημείο. Εάν $s_1(t)$ και $s_2(t)$ είναι το διάστημα που διανύουν με δεδομένο ότι ξεκινούν ταυτόχρονα και έχουν κοινή αφετηρία και τέρμα θα ισχύει $s_1(0)=s_2(0)$ και $s_1(T)=s_2(T)$ Επομένως για κάποια χρονική στιγμή t_0 θα ισχύει $s_1'(t_0)=s_2'(t_0)$ ή $v_1(t_0)=v_2(t_0)$.

Το Θεώρημα αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την απόδειξη του Θεωρήματος Μέσης Τιμής Πράγματι αν εφαρμόσουμε το Θ. Rolle για την συνάρτηση

$$l(x)=f(\alpha)+(x-a)\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]$$

παρατηρούμε ότι l(a) =f(a) και l(b)=l(b) καθώς και $l'(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Το Θεώρημα Rolle μας δίνει $f'(x)=l'(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ για κάποιο σημείο $x_0\in(a,b)$. Αυτό αποτελεί απόδειξη του Θ.Μ.Τ.

4.1.7 Πόρισμα

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς σ' ένα διάστημα I και για κάθε εσωτερικό σημείο $x\in I$ ισχύει f'(x)=g'(x), τότε υπάρχει μια σταθερά *c* τέτοια ώστε f(x)=g(x)+c για κάθε $x\in I$. ♦

4.1.8 Παρατήρηση

Το θεώρημα μέσης τιμής είναι συμπέρασμα τεχνικού χαρακτήρα του οποίου όμως οι εφαρμογές είναι περισσότερο σημαντικές από αυτό το ίδιο. Όπως το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής και τα θεωρήματα για τα ακρότατα είναι θεωρήματα ύπαρξης. Assert την ύπαρξη ενός σημείου σε ένα διάστημα όπου η συνάρτηση έχει μια ειδική συμπεριφορά αλλά δεν λένε πως θα βρούμε το σημείο αυτό.

Από φυσική άποψη το θεώρημα μας λεει ότι η μέση ταχύτητα ενός κινητού σε ένα χρονικό διάστημα ισούται με την στιγμιαία ταχύτητα που έχει το κινητό σε κάποια στιγμή του χρονικού διαστήματος.

Γεωμετρικά το θεώρημα μας λεει ότι ένα ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο σημεία μιας ομαλής καμπύλης θα είναι παράλληλο με την εφαπτόμενη της καμπύλης σε κάποιο ενδιάμεσο σημείο. Τέτοια σημεία μπορεί να υπάρχουν περισσότερα του ενός.

4.1.9 Παρατήρηση (Γενίκευση του Θ. Μ. Τ.)

Η παρακάτω γενίκευση του Θεωρήματος της μέσης τιμής οφείλεται στον Cauchy.

" Αν οι συναρτήσεις f(x) και g(x) είναι συνεχείς στο [α,β] και έχουν παραγώγους στο (α,β) εκ των οποίων η g'(x) είναι πεπερασμένη και διάφορος του μηδενός για x∈(α,β) τότε υπάρχει μία τουλάχιστον θέση ξ∈(α,β) για την οποία ισχύει

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{g(\beta)-g(\alpha)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Για την απόδειξη εφαρμόζουμε το θεώρημα του Rolle για την συνάρτηση

$$y=f(x)+\text{“}g(x)$$

η οποία ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος αν βέβαια επιλέξουμε την σταθερά m έτσι ώστε οι τιμές της y να είναι ίσες στα άκρα α και β. Θα έχουμε

$$f(\alpha)+\mu g(\alpha)=f(\beta)+\mu g(\beta)$$

Επειδή

$$g(\beta)-g(\alpha)=(\beta-\alpha)g'(\xi)$$

μπορούμε να θεωρήσουμε

$$\mu=-\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{g(\beta)-g(\alpha)}$$

Έχουμε επίσης

$$\left(f(x)+\mu g(x)\right)'=f'(x)+\mu g'(x)$$

Επομένως για μία τουλάχιστον τιμή *ξ* ισχύει $f'(x)+\mu g'(x)=0$ και επειδή g'(ξ)≠0

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=-\mu=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{g(\beta)-g(\alpha)}$$

Τελειώνοντας πρέπει να παρατηρήσουμε ότι η πρόταση αυτή δεν προκύπτει με απλή εφαρμογή του θεωρήματος της μέσης τιμής χωριστά για τις δύο συναρτήσεις f(x) και g(x). Το θεώρημα της μέσης τιμής προκύπτει με εφαρμογή της πρότασης αυτής για g(x)=x.

4.1.10 Συνέπειες του Θεωρήματος Μέσης Τιμής

1. Έστω ότι υπάρχουν δύο αριθμοί A και B τέτοιοι ώστε να ισχύει $A \le f'(x) \le B \quad \forall x \in (a,b)$. Τότε για δύο τυχόντα σημεία x_1 και x_2 στο [a,b] θα ισχύει

$$A \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le B$$

Αν εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής για κάποιο x_0 μεταξύ των x_1 και x_2 θα έχουμε $\left[f(x_2)-f(x_1)\right]/\left[x_2-x_1\right]=f'(x_0)$. Εφ' όσον το x_0 ανήκει στο (a,b) το $f'(x_0)$ παίρνει τιμές μεταξύ των A και B. Επομένως μεταξύ A και B θα παίρνει τιμές και το πηλίκο που μελετάμε. Εάν f'(x)=0 μπορούμε να εκλέξουμε A=B=0 που σημαίνει $f(x_1)=f(x_2)$. Επομένως η συνάρτηση είναι σταθερή.

2. Εάν f'(x)=0 στο διάστημα (a,b) τότε η f είναι σταθερή στο [a,b].

3. Εάν F(x) και G(x) είναι δύο συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει F'(x)=G'(x) για όλα τα *x* στο ανοικτό διάστημα (a,b) τότε υπάρχει σταθερά C τέτοια ώστε F(x)=G(x)+C για όλα τα *x* στο (a,b).

4.1.11 Παράδειγμα

Δίδεται η συνάρτηση $f(x) = x \cdot \ln x$ ορισμένη στο $(0,+\infty)$ και οι αριθμοί α,β∈R με α<β. Να βρεθεί $x_0 \in$ (‡,‰) για το οποίο να ισχύει το Θεώρημα Μέσης Τιμής.

Επειδή η f(x) είναι συνεχής στο [α,β] και παραγωγίσιμη στο (α,β). Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. θα υπάρχει $x_0 \in$ (‡,‰) *τέτοιο ώστε*

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = f'(x_0)$$

Επειδή $\forall x \in (\alpha, \beta)$ *έχουμε* $f'(x) = 1 + \ln x$ *η προηγούμενη σχέση γράφεται*

$$\frac{\beta \ln \beta - \alpha \ln \alpha}{\beta - \alpha} = 1 + \ln x_0$$

από την οποία έχουμε

$$\ln x_0 = \frac{\beta \ln \beta - \alpha \ln \alpha - \beta + \alpha}{\beta - \alpha}$$

από όπου

$$x_0 = e^{\frac{\beta \ln \beta - \alpha \ln \alpha - \beta + \alpha}{\beta - \alpha}}$$

4.1.12 Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι $\sqrt{104} - 10 < 0.2$

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ *που έχει πεδίο ορισμού [0,+∞). Η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής στο [100,104], παραγωγίσιμη στο (100,104) και η παράγωγός της είναι*

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \forall x \in (100, 104)$$

Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. θα υπάρχει ξ∈(100,104) για το οποίο θα ισχύει

$$\frac{f(104) - f(100)}{104 - 100} = f'(\xi)$$

ή ότι θα υπάρχει ξ∈(100,104) για το οποίο θα ισχύει

$$\frac{\sqrt{104} - \sqrt{100}}{4} = \frac{1}{2\sqrt{\xi}}$$

από όπου $\sqrt{104}-10=\frac{2}{\sqrt{\xi}}$ *. Επειδή όμως 100<ξ<104 θα έχουμε* $\sqrt{\xi}>10$ *και* $\frac{1}{\sqrt{\xi}}<\frac{1}{10}$ *από όπου* $\frac{2}{\sqrt{\xi}}<0.2$ *και επομένως*

$$\sqrt{104}-10<0.2$$

4.1.13 Παράδειγμα

Να βρεθεί σημείο στο οποίο η εφαπτόμενη του διαγράμματος της συνάρτησης $f(x)=\frac{1}{x}$, που έχει πεδίο ορισμού R-{0}, είναι παράλληλη προς την χορδή που περνά από τα σημεία A(1,1) και B(1,1/2).

Το Θ.Μ.Τ. εξασφαλίζει την παραλληλία ευθείας που εφάπτεται στο σημείο (ξ,f(ξ))του διαγράμματος της f και χορδής που περνάει από τα σημεία (a,f(a)) και (β,f(β)).

Παρατηρούμε ότι οι συντεταγμένες των σημείων A και B επαληθεύουν την συνάρτηση και επομένως είναι σημεία του διαγράμματος.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [1,2] και παραγωγίσιμη στο (1,2). Μπορούμε επομένως να εφαρμόσουμε το Θ.Μ.Τ. στο διάστημα [1,2].

Θα έχουμε επομένως ότι θα υπάρχει $x_0\in(1,2)$ *για το οποίο θα ισχύει*

$$\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=-\frac{1}{2}=f'(x_0)=-\frac{1}{x_0^2}$$

από όπου $x_0=\sqrt{2}$. *Επομένως το ζητούμενο σημείο θα είναι* $M\left(\sqrt{2},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

4.1.14 Παράδειγμα

Παρατηρούμε δύο άλογα σε μία ιπποδρομία. Υπάρχει περίπτωση να έχουν κάποια στιγμή την ίδια ταχύτητα; Αν τα άλογα φθάνουν στην γραμμή τερματισμού με ίσες ταχύτητες υπάρχει περίπτωση να έχουν κάποια στιγμή την ίδια επιτάχυνση;

4.1.15 Παράδειγμα

Η ταχύτητα ενός κινητού κυμαίνεται μεταξύ 40 και 50 km/h κατά την διάρκεια διαδρομής 200 Km. Τι μπορούμε να πούμε για την διάρκεια της διαδρομής;

Σημειώματα

Α) Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το υλικό της Μαθηματικής Ανάλυσης προέρχεται από τις σημειώσεις του Επίκουρου Καθηγητή κ. Γεωργίου Ν. Μπροδήμα για τις ανάγκες διδασκαλίας του ομώνυμου μαθήματος στο Τμήμα Φυσικής του Πανεπιστημίου Πατρών .

Β) Σημείωμα Αναφοράς

Γ) Σημείωμα Αδειοδότησης

Δ) Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- ✓ το Σημείωμα Αναφοράς
- ✓ το Σημείωμα Αδειοδότησης
- ✓ τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- ✓ το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφ’ όσον υπάρχει).