Τίτλος Μαθήματος: Μαθηματική Ανάλυση

Ενότητα B. Διαφορικός Λογισμός

Κεφάλαιο B.03: Η Παράγωγος Συνάρτησης

Όνομα Καθηγητή: Γεώργιος Ν. Μπροδήμας

Τμήμα Φυσικής

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά μαθήματα ΠΠ

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Πίνακας Περιεχομένων

B.03 Η Παράγωγος Συνάρτησης

3.1 Βασικά

3.1.1 Ορισμός

Έστω η συνάρτηση f(x) ορισμένη στο διάστημα (a,b) και έστω σημείο $x_0 \in (a,b)$. Ονομάζουμε *παράγωγο* της συνάρτησης στο σημείο x_0, και την συμβολίσουμε με $f'(x_0)$, το όριο

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

όταν βέβαια υπάρχει.

Αν θέσω $x_0 + h = x$ τότε η έκφραση αυτή μπορεί να γραφεί

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

3.1.2 Παρατήρηση (συμβολισμός Leibniz)

Η παράγωγος της συνάρτησης *f(x)* στο σημείο x_0 συμβολίζεται και ως εξής

a. $f'(x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

b. $f'(x_0) = \dfrac{df(x)}{dx} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

3.1.3 Ορισμός (πλευρικές παράγωγοι)

α. Μια συνάρτηση θα λέγεται παραγωγίσιμη από δεξιά όταν το Όριο

$$f_+(x) = \lim_{h\to 0_+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

υπάρχει.

β. Μια συνάρτηση λέγεται παραγωγίσιμη από αριστερά όταν το όριο

$$f_-(x) = \lim_{h\to 0_-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

υπάρχει.

3.1.4 Ορισμός (παραγωγίσιμη συνάρτηση)

Μια συνάρτηση f(x) ορισμένη στο διάστημα I=(a,b) θα λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη όταν

$\forall x \in (a,b)$ υπάρχει η $f'(x)$ και υπάρχουν $f'_+(x)$ και $f'_-(x)$

3.1.5 **Ορισμός** (συνεχώς παραγωγίσιμη)

Εάν η παράγωγος μιας συνάρτησης είναι και αυτή συνεχής συνάρτηση τότε η *f* λέγεται συνεχώς παραγωγίσιμη.

3.1.6 **Θεώρημα**

Αν μία συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 τότε είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

Απόδειξη (S+H, pp. 112, M+W, pp.72)

Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

είναι ακριβώς το ίδιο με το

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) - f(x_0) \right) = 0$$

όπως προκύπτει με την βοήθεια του κανόνα αθροίσματος ορίων και του κανόνα σταθερής συνάρτησης που εφαρμόζουμε στην συνάρτηση $f(x_0)$.

Με

$$\Delta x = x - x_0 \quad \text{και} \quad \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

να είναι ακριβώς το ίδιο με το $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

Πολλαπλασιάζουμε τώρα αριθμητή και παρονομαστή με κατάλληλο παράγοντα και έχουμε

$$\lim_{\Delta y \to 0} \Delta y = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \Delta x \right) \quad \textit{(κανόνας αντικατάστασης)}$$

$$= \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \right) \left(\lim_{x \to 0} \Delta x \right) \quad \textit{(κανόνας γινομένου)}$$

$$= f'(x) \cdot 0 \quad \textit{(επειδή} \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0$$

=0

3.1.7 **Παρατήρηση**

Το αντίστροφο του προηγουμένου θεωρήματος δεν ισχύει. Αν μία συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα σημείο δεν συνεπάγεται ότι είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

3.2 Γεωμετρική Ερμηνεία

Θεωρούμε τα σημεία $\left(f\left(x_0\right), x_0\right)$ και $\left(f\left(x_0+h\right), x_o+h\right)$

Η ευθεία που περνά από την ευθεία και την τέμνει στα σημεία αυτά λέγεται *τέμνουσα***.** Αν θεωρήσουμε το όριο

$$\lim_{h \to 0} \frac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)}{h}$$

Παρατηρούμε ότι αυτό ισούται με την παράγωγο και ότι, στο όριο, η τέμνουσα, καθίσταται η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο x_0 (σχήμα 2.3, Apostol, p. 120)

(σχήμα 2.3, Apostol, p.120)

Αυτό σημαίνει ότι καθώς το h πλησιάζει ολοένα και περισσότερο το μηδέν το σημείο Q κινείται πάνω στην καμπύλη πλησιάζοντας το (σταθερό) σημείο P, ενώ η ευθεία PQ αλλάζει διεύθυνση με τέτοιο τρόπο ώστε η κλίση της να πλησιάζει τον αριθμό *f' (x)* ως το όριό της. για τους λόγους αυτούς φαίνεται φυσικό να ορίσουμε ως *κλίση της καμπύλης* στο σημείο P τον αριθμό *f' (x)* . Η ευθεία που περνάει από το σημείο P και της οποίας η κλίση είναι *f' (x)* λέγεται *εφαπτομένη* στο σημείο P της καμπύλης.

3.2.1 Παρατήρηση

Η κλίση της γωνίας δεν συμπίπτει πάντα με την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει αυτή με τον άξονα των x. Σύμπτωση έχουμε μόνο όταν το σύστημα αξόνων είναι ορθοκανονικό δηλαδή ορθογώνιο και οι μονάδες μήκους είναι ίδιες και στους δύο άξονες.

3.3 Φυσική Ερμηνεία

Συντελεστής μεταβολής

Όταν μεταβλητή είναι ο χρόνος τότε ο συντελεστής μεταβολής ονομάζεται *ρυθμός μεταβολής.*

"Εάν y=f(x), τότε f' (x) είναι ο συντελεστής μεταβολής του y συναρτήσει του x"

Η έννοια της παραγώγου εφαρμόζεται σε πολύ περισσότερες περιπτώσεις από αυτές τις

ταχύτητας και της κλίσης. Για να εξηγήσουμε αυτές τις άλλες εφαρμογές της παραγώγου θα ξεκινήσουμε με την περίπτωση όπου δύο ποσότητες συνδέονται γραμμικά.

Υποθέτουμε ότι δύο ποσότητες *x* και *y* συνδέονται με τέτοιο τρόπο ώστε μια μεταβολή *Δx* στην *x* να προκαλεί πάντα μία μεταβολή *Δy* στην *y* που είναι ανάλογος της *Δx*. Δηλαδή ο λόγος *Δx/Δy* ισούται με μια σταθερά m. Θα λέμε τότε ότι η y μεταβάλλεται ανάλογα ή γραμμικά με την x.

Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα ένα ελατήριο στο οποίο έχουμε κρεμάσει ένα σώμα. Έστω x το βάρος του σώματος σε gr και y το τελικό μήκος του ελατηρίου σε cm. Είναι πειραματικό δεδομένο και ονομάζεται νόμος του Hooke ότι (για τιμές του Δx όχι πολύ μεγάλες) μια μεταβολή Δx στο βάρος του σώματος προκαλεί μία ανάλογη μεταβολή Δy στο μήκος του ελατηρίου.

(σχήμα 2.1.1, M+W, p.99)

αν παραστήσουμε γραφικά το y συναρτήσει του x παίρνουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα με κλίση

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

όπως φαίνεται στο (σχήμα 2.1.2 M+W, p.100). Η εξίσωση της γραμμής είναι *y=mx+b* και η συνάρτηση *f(x)=mx+b* είναι μία γραμμικά συνάρτηση. Η κλίση *m* του ευθύγραμμου τμήματος παριστά τον *συντελεστή μεταβολής του y συναρτήσει του x.* Το b παριστά το μήκος του ελατηρίου όταν απομακρύνουμε το σώμα.

3.4 Κανόνες Παραγώγισης

3.4.1 Παράγωγος Αθροίσματος και Διαφοράς

"Η παράγωγος του αθροίσματος ή διαφοράς δύο ή περισσότερων συναρτήσεων ισούται με το άθροισμα ή την διαφορά των παραγώγων των συναρτήσεων"

Ισχύει δηλαδή

$$\left[f(x)+g(x)\right]' = f'(x)+g'(x)$$

3.4.2 Παράγωγος Γινομένου Συναρτήσεων

Ισχύει

$$\left[f(x)\cdot g(x)\right]' = f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

" Η παράγωγος του γινομένου δύο συναρτήσεων ισούται με την παράγωγο της πρώτης επί την δεύτερη συν την πρώτη επί την παράγωγο της πρώτης"

3.4.3 **Παρατήρηση** (Γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου γινομένου)

Για να βρούμε το $(f\cdot g)'(t_0)$ θεωρούμε το όριο

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(f\cdot g)(x_0+\Delta x)-(f\cdot g)(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)\cdot g(x_0+\Delta x)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{\Delta x}$$

Η απλοποίηση της έκφρασης αυτής δεν είναι εύκολη όπως στην περίπτωση του κανόνα αθροίσματος. Θεωρούμε την Γεωμετρική ερμηνεία. Έστω ότι f(x) και g(x) είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου. Το γινόμενο f(x).g(x) είναι το εμβαδόν.

Το εμβαδόν του μεγάλου ορθογωνίου είναι $f(x_0+\Delta x)\cdot g(x_0+\Delta x)$. Τ εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου είναι $f(x_0)\cdot g(x_0)$. Η διαφορά τους

$$f(x_0+\Delta x)\cdot g(x_0+\Delta x)-f(x_0)\cdot g(x_0)$$

είναι το εμβαδόν του μη γραμμοσκιασμένου εμβαδού που μπορεί να αναλυθεί σε τρία ορθογώνια με εμβαδά

$$\left[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right]g(x_0)$$

$$\left[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right]\cdot\left[g(x_0+\Delta x)-g(x)\right]$$

$$\left[g(x_0+\Delta x)-g(x)\right]\cdot f(x_0)$$

Έχουμε επομένως την ταυτότητα

$$\begin{aligned}&f(x_0+\Delta x)\cdot g(x_0+\Delta x)-f(x_0)\cdot g(x_0)=\\&\left[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right]\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot\left[g(x_0+\Delta x)-g(x_0)\right]+\\&+\left[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right]\cdot\left[g(x_0+\Delta x)-g(x_0)\right]\end{aligned}$$

η οποία εκτός από Γεωμετρικά μπορεί να επιβεβαιωθεί και Αλγεβρικά. Αντικαθιστώντας την (...) στην (...) έχουμε

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot\dfrac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}+\\\dfrac{\left[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right]\cdot\left[g(x_0+\Delta x)-g(x_0)\right]}{\Delta x}\end{array}\right\}$$

Με την βοήθεια των νόμων των ορίων η (...) γίνεται

$$\left[\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x_0)-f(x_0)}{\Delta x}\right]\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot\left[\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}\right]+$$

$$+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right]\cdot\left[g(x_0+\Delta x)-g(x_0)\right]}{\Delta x}$$

Παρατηρούμε ότι τα δύο πρώτα όρια στην (...) είναι

$$f'(x)\cdot g(x)+f(x_0)\cdot g'(x\ \ )$$

ακριβώς δηλαδή ο κανόνας του γινομένου.

Για να δείξουμε ότι το πρώτο Όριο παριστά Γεωμετρικά το εμβαδόν του ορθογωνίου στην άνω δεξιά γωνία και έχει Όριο το μηδέν με την βοήθεια της συνέχειας της *g(x)* έχουμε

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\right]\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\left[g(x_0+\Delta x)-g(x_0)\right]=f'(x_0)\cdot 0=0$$

3.4.4 Παράγωγος Πηλίκου

Έστω $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ όπου οι συναρτήσεις *f(x)* και *g(x)* είναι διαφορίσιμες στο x_0 και υποθέτουμε ότι ισχύει

$g(x)\neq 0$ έτσι ώστε το πηλίκο να είναι ορισμένο στο σημείο x_0.

Εάν υποθέσουμε την ύπαρξη της $h'(x)$ μπορούμε να την υπολογίσουμε με την βοήθεια του κανόνα του γινομένου.

Εφ' όσον $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ θα έχουμε $f(x)=g(x)h(x)$. Εφαρμόζοντας τον κανόνα του γινομένου βρίσκουμε

$$f'(x_0)=g'(x_0)h(x_0)+g(x_0)h(x_0)$$

Λύνοντας ως προς $h'(x_0)$, παίρνουμε

$$h\copyright(x_0)=\frac{f\copyright(x_0)-g\copyright(x_0)h(x_0)}{g(x_0)}=\frac{f\copyright(x_0)-g(x_0)\left[f(x_0)/g(x_0)\right]}{g(x_0)}$$

$$=\frac{f\copyright(x_0)g(x_0)-f(x_0)g\copyright(x_0)}{\left[g(x_0)\right]^2}$$

που είναι και ο ζητούμενος κανόνας. Έτσι προκειμένου να παραγωγίσουμε το πηλίκο $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, όπου $g(x)\neq 0$,

παίρνουμε την παράγωγο του αριθμητή επί τον παρανομαστή μείον την παράγωγο του παρονομαστή επί τον αριθμητή και διαιρούμε με τον παρονομαστή στο τετράγωνο. Γράφουμε

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{(du/dx)v-u(dv/dx)}{v^2}$$

<u>*Παρατήρηση*</u>*:* Είναι σημαντικό να έχουμε στον αριθμητή την σωστή σειρά των όρων. Αν δεν θυμόμαστε θα πρέπει να ελέγχουμε αν για g(x)=1 (που σημαίνει g'(x)=0) η έκφραση που έχουμε γράψει καταλήγει στην f'. Αν κα-

ταλήγει στην -f' τότε έχουμε λάθος σειρά.

3.4.5 Παρατήρηση (Κανόνας της αντιστροφής)

Εάν η $g(x)$ είναι διαφορίσιμη στο σημείο *x* και $g(x)\neq 0$, τότε η $1/g(x)$ είναι διαφορίσιμη στο *x* και ισχύει

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x)=\frac{-g(x)'}{\left[g(x)\right]^2}$$

Αφού η g(x) είναι διαφορίσιμη στο x τότε, σύμφωνα με το Θεώρημα (...) θα είναι και συνεχής στο x. Αφού $g(x)\neq 0$ *γνωρίζουμε ότι η 1/g(x) θα είναι συνεχής στο x και ότι θα ισχύει*

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)}=\frac{1}{g(x)}$$

Για $h\neq 0$ *και αρκετά μικρό ισχύει* $g(x+h)\neq 0$ *και*

$$\frac{1}{h}\left[\frac{1}{g(x+h)}-\frac{1}{g(x)}\right]=\left[\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]\cdot\frac{1}{g(x+h)}\cdot\frac{1}{g(x)}$$

Αν θεωρήσουμε το όριο της παράστασης αυτής για $h\to 0$ *βρίσκουμε ότι το β' μέλος ισούται με*

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{g(x)\cdot f(x)'-g(x)'\cdot f(x)}{\left[g(x)\right]^2}$$

Απόδειξη

Το πηλίκο f/g μπορούμε να το γράψουμε ως γινόμενο των συναρτήσεων

$$f\cdot\frac{1}{g}$$

Εφαρμόζοντας τώρα τον κανόνα για την παράγωγο γινομένου και στην συνέχεια τον κανόνα για την παράγωγο της αντίστροφης συνάρτησης προκύπτει ……………………………………………………………………

3.4.6 Παράγωγος Σύνθετης Συνάρτησης

Υποθέτουμε ότι η *y* είναι διαφορίσιμη συνάρτηση της μεταβλητής *u*, ισχύει δηλαδή

$$y=y(u)$$

και ότι η μεταβλητή *u* είναι και αυτή διαφορίσιμη συνάρτηση της μεταβλητής *x*, ισχύει δηλαδή

$$u=u(x)$$

Έχουμε επομένως ότι η *y* είναι σύνθετη συνάρτηση της μορφής

$$y=f(u)=f(g(x))$$

Τότε η παράγωγος της σύνθετης συνάρτησης *y* ως προς την μεταβλητή *x* είναι

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

3.4.7 Παράγωγοι Ανώτερης Τάξης

Εάν η συνάρτηση *f* είναι διαφορίσιμη τότε μπορούμε να βρούμε μια νέα συνάρτηση που είναι η παράγωγος της *f* και συμβολίζεται με *f'* ή *df/dx*. Ονομάζεται *επίσης πρώτη παράγωγος ή παράγωγος πρώτης τάξης.*

Η πρώτη παράγωγος είναι και αυτή από μόνη της συνάρτηση. Αν είναι και διαφορίσιμη τότε μπορούμε να βρούμε την παράγωγο αυτής που την συμβολίζουμε με *f''* και ονομάζεται *δεύτερη παράγωγος της f* ή *δεύτερης τάξης παράγωγος της f*. Συμβολίζεται επίσης

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)=\frac{d^2f}{dx}$$

Εάν και αυτή είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση μπορούμε να βρούμε την παράγωγο τρίτης τάξης που την συμβολίζουμε με

$$f'' \quad ή \quad \frac{d^3f}{dx^2}$$

Αν ισχύουν οι κατάλληλες προϋποθέσεις μπορούμε να υπολογίσουμε και παραγώγους ανώτερης τάξης που τώρα τις συμβολίζουμε με

$$f^{(n)}(x) \quad ή \quad \frac{d^nf(x)}{dx^n}$$

3.4.8 Παρατήρηση (κανόνας της αντιστροφής)

Εάν η $g(x)$ είναι διαφορίσιμη στο σημείο x και $g(x)\neq 0$, τότε η $1/g(x)$ είναι διαφορίσιμη στο x και ισχύει

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x)=\frac{-g(x)'}{\left[g(x)\right]^2}$$

Απόδειξη

Αφού η *g(x)* είναι διαφορίσιμη στο *x* τότε, σύμφωνα με το Θεώρημα (...) θα είναι και συνεχής στο *x*. Αφού $g(x)\neq 0$ γνωρίζουμε ότι η $1/g(x)$ θα είναι συνεχής στο x και ότι θα ισχύει

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)}=\frac{1}{g(x)}$$

Για $h\neq 0$ και αρκετά μικρό ισχύει $g(x+h)\neq 0$ και

$$\frac{1}{h}\left[\frac{1}{g(x+h)}-\frac{1}{g(x)}\right]=\left[\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]\cdot\frac{1}{g(x+h)}\cdot\frac{1}{g(x)}$$

Αν θεωρήσουμε το όριο της παράστασης αυτής για $h\to 0$ βρίσκουμε ότι το β' μέλος ισούται με

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{g(x)\cdot f(x)'-g(x)'\cdot f(x)}{\left[g(x)\right]^2}$$

Απόδειξη

Το πηλίκο f/g μπορούμε να το γράψουμε ως γινόμενο των συναρτήσεων

$$f\cdot\frac{1}{g}$$

Εφαρμόζοντας τώρα τον κανόνα για την παράγωγο γινομένου και στην συνέχεια τον κανόνα για την παράγωγο της αντίστροφης συνάρτησης προκύπτει ....

3.5 Ασκήσεις

3.5.1 Ασκηση

Να ευρεθεί η παράγωγος των συναρτήσεων

1. $f(x)=e^{3x}$ 2. $f(x)=3^x$

3.5.2 Ασκηση

Να υπολογισθεί η παράγωγος των συναρτήσεων

1. xe^{3x} 2. e^{x^2+2x} 3. x^2 4. $e^{\sqrt{x}}$ 5. $e^{\sin x}$ 6. $2^{\sin x}$

3.5.3 Ασκηση

Να υπολογισθεί η παράγωγος των συναρτήσεων

1. $\ln 3x$ 2. $xe^x\ln x$ 3. $8\log_3 8x$

3.5.4 Ασκηση

Να υπολογισθεί η παράγωγος των συναρτήσεων

1. $\ln\left(10x^2+1\right)$ 2. $\sin\left(\ln x^3\right)e^{x^4}$

3.5.5 Ασκηση

Να υπολογισθεί η παράγωγος των συναρτήσεων

1. $y=x^x$ 2. $y=x^x\sqrt{x}$

3.5.6 Ασκηση

Πόσο πιο γρήγορα μεταβάλλεται η $f(x)=2^x$ στο χ=3 από ότι στο x=0;

3.5.7 Ασκηση

Πόσο πιο γρήγορα μεταβάλλεται η $f(x)=4^x$ στο x=2 από ότι στο x=0;

3.5.8 Ασκηση

Πόσο πιο γρήγορα μεταβάλλεται η $f(x)=(1/x)^x$ στο $x=1/2$ από ότι στο x=0;

3.5.9 Ασκηση

Να υπολογισθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων

1. e^{x^2+1} 2. $\left(e^{3x^3+x}\right)\left(1-e^x\right)$ 3. $e^{1-x^2}+x^3$ 4. $e^{2x}-\cos\left(x+e^{2x}\right)$

5. 2^x+x 6. $\tan\left(3^{2x}\right)$ 7. $\ln 10x$ 8. $\ln x^2$

9. $\ln x/x$ 10. $(\ln x)^3$ 11. $\ln(\sin x)$ 12. $\ln(\tan x)$

13. $\ln(2x+1)$ 14. $\ln\left(x^2-3x\right)$ 15. $\sin x\cdot\ln x$ 16. $\log_5 x$

17. $\left(x^2-2x\right)\ln(2x+1)$ 18. $(\ln(\tan 3x))/\left(1+\ln x^2\right)$ 19. $x^{\sqrt{2}}+(\ln\cos x)^{\sqrt{3}}$ 20. $\log_7 2x$

3.5.10 Ασκηση

Να υπολογισθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων

1. $y=(\sin x)^x$ 2. $y=x^{\sin x}$ 3. $y=(\sin x)^{\cos x}$ 4. $y=\left(x^3+1\right)^{x^2-2}$

5. $y=(x-2)^{2/3}(4x+3)^{8/7}$ 6. $y=x^{\left(x^x\right)}$ 7. $y=(x+2)^{5/8}(8x+9)^{10/3}$ 8 $y=x^{3x}$

3.5.11 Ασκηση

Να υπολογισθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων

1. $e^{x\cdot\sin x}$ 2. x^e 3. $\ln\left(x^{-5}+x\right)$ 4. $6\ln\left(x^3-xe^x\right)+e^x\ln x$

5. $14^{x^2-8\sin x}$ 6. $\log_2\left[\sin\left(x^2\right)\right]$ 7. $\ln(x+\ln x)$ 8. $e^x\sin(\ln x+1)$

9. $\cos\left(x^{\sin x}\right)$ 10. $\sin\left(x^{\cos x}\right)$ 11. $x^{\left(x^2\right)}$ 12. x^{e^x} 13. $(1/x)^{\tan x^2}$

14. $\ln\left(x^{\sec x^2}\right)$ 15. $3x^{\sqrt{x}}$ 16. $\sin\left(x^4+1\right)\log_8(14x-\sin x)$ 17. $\log_{\frac{5}{3}}(\cos 2x)$

18. $3x^{x/2}$ 19. $\sin\left(x^x\right)$ 20. $\ln\left(x^{x+1}\right)$ 21. $(\sin x)^{(\cos x)^x}$ 22. 2^{2^x}

3.5.12 Ασκηση

Να εκφρασθούν οι παράγωγοι των παρακάτω συναρτήσεων ως συναρτήσεις των $f(x), g(x), f'(x), g'(x)$.

1. $f(x)e^x + g(x)$ 2. $e^{f(x)+x^2}$ 3. $f(x)e^{g(x)}$ 4. $f(e^x + g(x))$ 5. $f(x)^{g(x)}$

3.5.13 Ασκηση

1. e^{x^3} 2. $(e^x)^3$ 3. $e^x \cos x$ 4. $\cos(e^x)$ 5. $e^{\cos 2x}$

6. $e^{\cos x}$ 7. $(x^2+2x)/(1+e^{\cos x})$ 8. $xe^{(x+2)^3}$ 9. e^{6x} 10. $e^{\cos x}/\cos(\sin x)$

11. $\cos\sqrt{1+e^x}$ 12. $e^{\cos x + x}$ 13. $x \ln x$ 14. $x^2 e^{10x}$ 15. $(\sin e^x)/(e^x + x^2)$

16. $\tan(\sin e^x)$ 17. $e^x \cos(x^{3/2})$ 18. $e^{(\sin x - x^2)}$ 19. $(e^{-x^2})/(1+x^2)$ 20. $\cos(e^{x^2+2})$

21. $x \cdot \ln[x+3]$ 22. $\ln(\cos x)$ 23. $\ln(\sqrt{x})$ 24. $\log_3(5x)$ 25. $\log_2(3x)$

26. $1/((\ln t)^2 + 3)$ 27. $\sin[(\ln t)^2 + \pi/6]$

3.5.14 Ασκηση

Με την βοήθεια του ορισμού να υπολογισθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων

1. $f(x)=4$ 2. $f(x)=c$ 3. $f(x)=2-3x$

4. $f(x)=4x+1$ 5. $f(x)=5x-x^2$ 6. $f(x)=2x^3+1$

7. $f(x)=x^4$ 8. $f(x)=1/(x+3)$ 9. $f(x)=\sqrt{x-1}$

10. $f(x)=x^3-4x$ 11. $f(x)=1/x^2$ 12. $f(x)=1/\sqrt{x}$

3.5.15 Ασκηση

Να ευρεθεί ο $f'(2)$ με την διαμόρφωση του λόγου $\{f(2+h)-f(2)\}/h$ και τον υπολογισμό του ορίου όταν $h \to 0$.

1. $f(x)=(3x-7)^2$ 2. $f(x)=7x-x^2$ 3. $f(x)=\dfrac{9}{x+4}$

4. $f(x)=5-x^4$ 5. $f(x)=x+\sqrt{2x}$ 6. $f(x)=\sqrt{6-x}$

3.5.16 Ασκηση

Να ευρεθούν οι εξισώσεις της εφαπτόμενης και της κάθετης στην γραφική παράσταση της f στο σημείο $(\alpha, f(\alpha))$

1. $f(x)=x^2;\ \alpha=2$
2. $f(x)=\sqrt{x};\ \alpha=4$
3. $f(x)=5x-x^2;\ \alpha=4$
4. $f(x)=5-x^3;\ \alpha=2$
5. $f(x)=\frac{1}{x+2};\ \alpha=-3$
6. $f(x)=\frac{1}{x^2};\ \alpha=-2$

3.5.17 Ασκηση

Εστω $f(x)=\begin{cases}(x+1)^2,\ x\le 0\\ (x-1)^2\ \ x\rangle 0\end{cases}$

1. να υπολογισθεί η $f'(x)$ για $x\neq 0$
2. να δειχθεί ότι η f δεν είναι διαφορίσιμη στο x=0

3.5.18 Ασκηση

Δοθέντος ότι η f είναι διαφορίσιμη στο c και ότι η g είναι συνάρτηση που ορίζεται ως

$$g(x)=\begin{cases}f(x),\ x\le c\\ f'(c)(x-c)+f(c),\ x\rangle c\end{cases}$$

1. Να δειχθεί ότι η g είναι διαφορίσιμη στο c. Τι συμβαίνει με την
2. Εστω ότι η γραφική παράσταση της f είναι αυτή που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να σχεδιασθεί η γραφική παράσταση της g.

3.5.19 Ασκηση

Να δοθεί παράδειγμα της συνάρτησης f που ορίζεται για όλους τους πραγματικούς αριθμούς και ικανοποιεί τις αναφερόμενες συνθήκες

1. $f'(x)=0$ για όλα τα πραγματικά x
2. $f'(x)=0$ για όλα τα $x\neq 0$ και η $f'(0)$ δεν υπάρχει

3. $f'(x)$ υπάρχει για όλα τα $x \neq 1$ και $f'(-1)$ δεν υπάρχει

4. $f'(x)$ υπάρχει για όλα τα $x \neq \pm 1$. Δεν υπάρχουν ούτε το $f'(1)$ ούτε το

5. και $f(1)=7$

3.5.20 Ασκηση

Εστω ότι η f είναι περιττή συνάρτηση. Να δειχθεί ότι εάν είναι διαφορίσιμη τότε η $f'(x)$ είναι μια άρτια συνάρτηση.

3.5.21 Ασκηση

Εστω ότι η f είναι άρτια συνάρτηση. Να δειχθεί ότι εάν είναι διαφορίσιμη τότε η $f'(x)$ είναι μια περιττή συνάρτηση.

3.5.22 Ασκηση

Εστω $f(x)=\sqrt{1-x}$ για $0 \leq x \leq 1$

1. Να υπολογισθεί η $f'(x)$ για κάθε $x \in (0,1)$
2. Να υπολογισθεί η $f'_{+}(x)$ εάν υπάρχει

3.5.23 Ασκηση

Εστω $f(x)=\begin{cases} 1-x^2, & x \leq 0 \\ x^2, & x \rangle 0 \end{cases}$

1. να ευρεθεί η $f'_{-}(0)$ εάν υπάρχει
2. να ευρεθεί η $f'_{+}(0)$ εάν υπάρχει
3. είναι διαφορίσιμη η f στο x=0
4. Να δειχθεί ότι η f είναι συνεχής στο 2.
5. Να ευρεθούν οι $f'_{-}(2)$ και $f'_{+}(2)$
6. Να ευρεθεί αν η f είναι διαφορίσιμη στο 2.

3.5.24 Ασκηση

Να υπολογισθούν οι ποσότητες

1. $\log_2 64$ 2. $\log_2 \frac{1}{64}$ 3. $\log_{64} \frac{1}{2}$ 4. $\log_{10} 125$

5. $\log_5 1$ 6. $\log_5 0.2$ 7. $\log_2 4^3$ 8. $\log_{10} 0.01$

9. $\log_{32} 8$ 10. $\log_{100} 10^{-\frac{4}{5}}$ 11. $\log_{10} 100^{-\frac{4}{5}}$ 12. $\log_9 \sqrt{3}$

3.5.25 Ασκηση

Να δειχθούν οι παρακάτω ταυτότητες

1. $\log_p x \cdot y = \log_p + \log_p y$ 2. $\log_p \frac{1}{x} = -\log_p x$ 3. $\log_p x^y = y \log x$ 4. $\log_p \frac{x}{y} = \log_p x - \log_p y$

3.5.26 Ασκηση

Να ευρεθούν, εάν υπάρχουν, οι αριθμοί x που ικανοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις

1. $10^x = e^x$ 2. $\log_5 = 0.04$ 3. $\log_x 10 = \log_4 100$

4. $\log_x 2 = \log_3 x$ 5. $\log_2 x = \int_0^x \frac{dt}{t}$ 6. $\log_x 10 = \log_2 \frac{1}{10}$

3.5.27 Ασκηση

Να υπολογισθεί το lnα δοθέντος ότι $e^{t_1} \langle \alpha \langle e^{t_2}$

3.5.28 Ασκηση

Να υπολογισθεί το e^b δοθέντος ότι $\ln x_1 \langle b \langle \ln x_2$

3.5.29 Ασκηση

Να υπολογισθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων

1. $y = 3^{2x}$ 2. $y = 4^{3x^2}$ 3. $y = 2^{5x} 3^{\ln x}$ 4. $y = 5^{-2x^2+x}$

5. $y = \sqrt{\log_3 x}$ 6. $y = 7^{\sin^2 x}$ 7. $y = \tan(\log_5 x)$ 8. $y = \frac{\log_{10} x}{x^2}$

9. $y = \cos(2^x + 2^{-x})$ 10. $y = \log_5 \frac{x}{x+1}$ 11. $Y = \log_2 [\log_4 (2x+1)]$ 12. $y = \alpha^{-x} \cos bx$

3.5.30 Ασκηση

Να ευρεθεί το $f'(e)$ για τις παρακάτω συναρτήσεις

1. $y=\log_3 x$ 2. $y=x\log_3 x$ 3. $y=\ln(\ln x)$ 4. $y=\log_3(\log_2 x)$

3.5.31 Ασκηση

Να υπολογισθούν οι παράγωγοι

1. $\frac{d}{dx}\left[(x+1)^x\right]$ 2. $\frac{d}{dx}\left[(\ln x)^x\right]$ 3. $\frac{d}{dx}\left[(\ln x)^{\ln x}\right]$ 4. $\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{1}{x}\right)^x\right]$

5. $\frac{d}{dx}\left[(x^2+2)^{\ln x}\right]$ 6. $\frac{d}{dx}\left[(\ln x)^{x^2+2}\right]$ 7. $\frac{d}{dx}\left[x^{\sin x}\right]$ 8. $\frac{d}{dx}\left[(\cos x)^{(x^2+1)}\right]$

9. $\frac{d}{dx}\left[(\sin x)^{\sin x}\right]$ 10. $\frac{d}{dx}\left[x^{x^2}\right]$ 11. $\frac{d}{dx}\left[x^{2^x}\right]$ 12. $\frac{d}{dx}\left[(\tan x)^{\sec x}\right]$

3.5.32 Ασκηση

Για τα παρακάτω ζεύγη συναρτήσεων να σχεδιασθούν οι γραφικές παραστάσεις και να συγκριθούν

1. $f(x)=e^x$ και $g(x)=2^x$ 2. $f(x)=e^x$ και $g(x)=3^x$ 3. $f(x)=e^x$ και $g(x)=e^{-x}$

4. $f(x)=2^x$ και $g(x)=2^{-x}$ 5. $f(x)=\ln x$ και $\log_3 x$ 6. $f(x)=\ln x$ και $g(x)=\log_2 x$

7. $f(x)=2^x$ και $g(x)=\log_2 x$ 8. $f(x)=10^x$ και $\log_{10} x$

3.5.33 Ασκηση

Για τις συναρτήσεις

1. $f(x)=10^{1-x^2}$ 2. $f(x)=10^{\frac{1}{1-x^2}}$ 3. $f(x)=10^{\sqrt{1-x^2}}$ 4. $f(x)=\log_{10}\sqrt{1-x^2}$

να ευρεθούν

1. το πεδίο ορισμού
2. τα διαστήματα όπου η συνάρτηση είναι αύξιυσα και φθίνουσα
3. τα ακρότατα της f

Σημειώματα

Α) Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το υλικό της Μαθηματικής Ανάλυσης προέρχεται από τις σημειώσεις του Επίκουρου Καθηγητή κ. Γεωργίου Ν. Μπροδήμα για τις ανάγκες διδασκαλίας του ομώνυμου μαθήματος στο Τμήμα Φυσικής του Πανεπιστημίου Πατρών .

Β) Σημείωμα Αναφοράς

Γ) Σημείωμα Αδειοδότησης

Δ) Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- ✓ το Σημείωμα Αναφοράς
- ✓ το Σημείωμα Αδειοδότησης
- ✓ τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- ✓ το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφ’ όσον υπάρχει).