Τίτλος Μαθήματος: Μαθηματική Ανάλυση

Ενότητα Β. Διαφορικός Λογισμός

Κεφάλαιο Β.02: Η Συνέχεια Συνάρτησης

Όνομα Καθηγητή: Γεώργιος Ν. Μπροδήμας

Τμήμα Φυσικής

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Πίνακας Περιεχομένων

B.02 Η Συνέχεια Συνάρτησης

Στην συνήθη, καθημερινή, γλώσσα όταν λέμε ότι μία διαδικασία εξελίσσεται "συνεχώς" εννοούμε ότι αυτή εξελίσσεται *χωρίς διακοπή και χωρίς απότομες μεταβολές*. Επίσης όταν λέμε ότι μία συνάρτηση είναι συνεχής τότε διαισθητικά εννοούμε ότι η γραφική της παράσταση είναι συνεχής ότι δηλαδή μπορούμε να την χαράξουμε χωρίς να σηκώσουμε το μολύβι ή την κιμωλία από το χαρτί ή τον πίνακα, αντίστοιχα. Αυτά από την καθημερινότητα και την διαίσθηση.

(GBT 82)

2.1 Συνέχεια σε Σημείο

Κατά την ανάλυση της εννοίας του ορίου δεν εξετάσαμε καθόλου την συμπεριφορά της συνάρτησης *f(x)* στο σημείο x_0. Η ανισότητα $0\langle|x-x_0|\langle 0$ αναφέρεται σε σημεία τα οποία είναι "κοντά" στο σημείο x_0 αλλά είναι διαφορετικά από το x_0. για τους σκοπούς του ορισμού αυτού δεν είναι αναγκαίο η συνάρτηση να είναι ορισμένη στο x_0 ή αν είναι ορισμένη δεν είναι αναγκαίο να είναι ίση με το όριο. Αν όμως συμβαίνει η συνάρτηση f να είναι ορισμένη στο σημείο x_0 και η τιμή της να ισούται με το όριο τότε η συνάρτηση λέγεται συνεχής στο σημείο x_0

Με βάση τα παραπάνω οδηγούμαστε στον ορισμό

"*Μία συνάρτηση f(x) θα λέγεται συνεχής στο σημείο* x_0 *όταν ισχύει* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

Μία αυστηρότερη διατύπωση του παραπάνω ορισμού έχει ως εξής:

" *Μία συνάρτηση f(x) λέγεται συνεχής στο σημείο* x_0 *εάν ισχύουν*

1. *∃* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ *(υπάρχει το όριο για* $x\to x_0$*)*
2. *∃* $f(x_0)$ *(η συνάρτηση είναι ορισμένη στο* x_0*)*
3. $f(x_0)=l$

2.1.1 Ορισμός της συνέχειας με "ε,δ>0"

Θα λέμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 αν για κάθε θετικό αριθμό ε υπάρχει ένας θετικός αριθμός δ τέτοιος ώστε να έχουμε $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ για κάθε $x\in A$ με $|x-x_0|<\delta$ δηλαδή

$$\text{f συνεχής στο } x_0 \Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)\left[x\in A\wedge|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon\right]$$

2.1.2 Παρατήρηση

Εστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε ανοικτό διάστημα που περιέχει το σημείο α. Τότε η f θα είναι συνεχής στο α εάν και μόνον εάν

$$\lim_{h\to 0} f(\alpha+h)=f(\alpha)$$

Πράγματι εστω $h=x-\alpha$ τότε $x\to\alpha$ εάν και μόνον εάν $h\to 0$. Ακόμη $\alpha+h=\alpha+(x-\alpha)$ και επομένως $f(\alpha+h)=f(x)$ και $\lim\limits_{h\to 0} f(\alpha+h)=\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$. Αρα το προηγούμενο όριο είναι ισοδύναμο με το

$$\lim_{x\to\alpha} f(x)=f(\alpha)$$

που είναι ο ορισμός της συνέχειας.

2.1.3 Παρατήρηση

1. Από τον ορισμό προκύπτει ότι ο θετικός αριθμός δ εξαρτάται από τον θετικό αριθμό ε γι' αυτο και πολλές φορές γράφουμε δ=δ(ε).

2. Ο παραπάνω ορισμός είναι για την συνέχεια είναι παρόμοιος με τον αντίστοιχο ορισμό του ορίου στο x_0.

Υπάρχουν όμως διαφορές τις οποίες θα πρέπει να επισημάνουμε

α. στον ορισμό του ορίου είναι απαραίτητο, για λόγους που έχουμε αναφέρει, να είναι $x\neq x_0$ κάτι που εξασφαλιζόταν με την συνθήκη $0<|x-x_0|<\delta$. Στον ορισμό της συνέχειας δεν επιβάλλεται ο ορισμός αυτός και γι' αυτό γράφουμε $|x-x_0|<\delta$.

β. στον ορισμό του ορίου το x_0 δεν ανήκε υποχρεωτικά στο πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης f. Εδώ πρέπει οπωσδήποτε να ανήκει στο Α.

Αυτό σημαίνει ότι το πρόβλημα της συνέχειας δεν έχει έννοια για σημεία στα οποία δεν ορίζεται η συνάρτηση, καθώς και όταν $x\to\infty$. Δεν έχει νόημα να συζητάμε για συνέχεια ή μη της συνάρτησης $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-2}}\Big|(2,+\infty)$ στα σημεία *-1, 2* ή *+∞.* Δεν τίθεται επίσης πρόβλημα συνέχειας για την συνάρτηση $f(x)=\frac{x+1}{(x-2)(x+3)}$ στα σημεία 2 και -3 που δεν ορίζεται.

Το σημείο αυτό πρέπει να το προσέχουμε ιδιαίτερα γιατί πολλές φορές λέγεται ότι η συνάρτηση δεν είναι συνεχής στα σημεία $x_0=2$ ή $x_0=3$ επειδή αυτά δεν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της f. Αυτό όμως δεν είναι σωστό αφού, για να μιλάμε για συνέχεια ή όχι της f σε ένα σημείο, πρέπει απαραίτητα αυτό να ανήκει στο πεδίο ορισμού της.

3. Γενικά, αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής (α,β) δεν μπορούμε να μιλάμε για συνέχεια στα σημεία *α* και *β*, ενώ μπορούμε να μιλάμε για όριο στα σημεία αυτά.

4. Στον ορισμό του ορίου το x_0 ήταν σ.σ. του πεδίου ορισμού Α της f. Εδώ δεν είναι υποχρεωτικό αυτό. Μπορεί δηλαδή το x_0 να είναι και απομονωμένο σημείο. Μάλιστα δε όπως θα αποδείξουμε παρακάτω μια συνάρτηση είναι πάντοτε συνεχής στα απομονωμένα σημεία του πεδίου ορισμού της.

5. Με τον ορισμό του ορίου εξετάζουμε την συμπεριφορά της f στα γειτονικά σημεία του x_0, ενώ με τον ορισμό της συνέχειας, εξετάζουμε αυτή την συμπεριφορά σχετικά με το $f(x_0)$, δηλαδή με την τιμή της συνάρτησης στο x_0. (local-Global, Τοπική-Ολική)

2.2 Γεωμετρική ερμηνεία της έννοιας της συνέχειας

2.2.1 Παρατήρηση

Η συνέχεια της συνέχειας μπορεί να ορισθεί και με την βοήθεια της εννοίας του ορίου, ως εξής:

Μια συνάρτηση y=f(x) είναι συνεχής στο $x_0 \in A$ τότε και μόνον τότε, αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ ή

$$(\forall \varepsilon \rangle 0)(\exists \delta \rangle 0)\left[(\forall x \in A) \wedge 0 \langle |x - x_0| \langle \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \langle 0\right]$$

2.2.2 Θεώρημα

Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση είναι συνεχής σε όλο το $\Re$ και κάθε ρητή συνάρτηση είναι συνεχής οπουδήποτε αυτή ορίζεται.

2.2.3 Παραδείγματα

2.2.3.1 Παράδειγμα

Η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ είναι ασυνεχής στο σημείο x=2 γιατί

α. Το f(2) δεν ορίζεται (έχει μηδέν ως παρονομαστή)

β. το $\lim_{x \to 2}$ δεν υπαρχει (ισούται με ∞)

Επειδή το όριο δεν υπάρχει η ασυνέχεια αυτή δεν μπορεί να απαλειφθεί.

2.2.3.2 Παράδειγμα

Η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x-2}$ είναι ασυνεχής στο x=2 γιατί

α. το f(2) δεν ορίζεται (ο αριθμητής και ο παρονομαστής είναι μηδέν)

β. $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$

Η ασυνέχεια αυτή λέγεται *απαλείψημη* αφού μπορούμε να την απαλείψουμε ξαναορίζοντας την συνάρτηση ως $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x-2}$ γιά $x \neq 2$ και f(2)=4. Ολα αυτά βέβαια επειδή το όριο υπάρχει.

2.2.3.3 Παράδειγμα

Η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2 - 27}{x-3}$ γιά $x \neq 3$ και f(3)=9 είναι ασυνεχής στο σημείο x=3 αφού

α. f(3)=9 β. $\lim_{x \to 3} f(x) = 27$ γ. $\lim_{x \to 3} f(x) \neq f(3)$

Η ασυνέχεια αυτή μπορεί να απαλειφθεί ξαναορίζοντας την συνάρτηση ως $f(x) = \dfrac{x^2 - 27}{x-3}$ γιά $x \neq 3$ και f(3)=27.

2.2.3.4 Παράδειγμα

Η ύπαρξη του $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$ συνεπάγεται την συνέχεια της f(x) στο σημείο x=α. Πράγματι από την ύπαρξη του ορίου έπεται ότι $f(\alpha+h)-f(\alpha)\to 0$ όταν $h\to 0$. Συνεπώς $\lim\limits_{h\to 0}f(\alpha+h)=f(\alpha)$ και επομένως η f(x) είναι συνεχής στο x=α.

2.2.3.5 Παράδειγμα

Γιά την συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+5x-6}$ να προσδιορισθούν τα σημεία στα οποία δεν είναι συνεχής. Η συνάρτηση αυτή είναι ρητή και ο παρονομαστής είναι μηδέν γιά x=1 και x=-6. Και επομένως η συνάρτηση ορίζεται παντού εκτός από τα σημεία αυτά. Αρα η συνάρτηση είναι συνεχής παντού εκτός από τα σημεία 1 και –6.

2.2.3.6 Παράδειγμα

Γιά την συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ να προσδιοριστούν τα σημεία στα οποία δεν είναι συνεχής. Και η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής αλλά ο παρονομαστής δεν μηδενίζεται πουθενά. Ετσι η συνάρτηση ορίζεται παντού και επομένως είναι συνεχής σε όλο το διάστημα.

2.2.3.7 Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ είναι συνεχής στο διάστημα .

Αποδεικνύουμε πρώτα την συνέχεια από δεξιά στο x=0. Εστω ε τυχόν θετικός αριθμός. Εφ' όσον

$$|f(x)-f(0)|=|\sqrt{x}-\sqrt{0}|=\sqrt{x}$$

η ανισότητα $|f(x)-f(0)|<\varepsilon$ θα ικανοποιείται εάν $\sqrt{x}<\varepsilon$ ή, ισοδύναμα, εάν $0\le x\le \varepsilon^2$. Ετσι παίρνουμε $\delta=\varepsilon^2$ και έτσι η συνθήκη γιά συνέχεια από δεξιά ικανοποιείται.

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε την συνέχεια σε όλα τα σημεία του διαστήματος (α,∞). Εστω ότι το σημείο x=α ανήκει στο διάστημα αυτό. Προφανώς $\alpha>0$. Τότε γιά $x>0$ θα έχουμε

$$|f(x)-f(\alpha)|=|\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}|=\left|\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}}{1}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{\alpha}}{\sqrt{x}+\sqrt{\alpha}}\right|=\frac{|x-\alpha|}{\sqrt{x}+\sqrt{\alpha}}<\frac{|x-\alpha|}{\sqrt{\alpha}}$$

Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι εισαγάγαμε σε κλάσμα την έκφραση $\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}$ προκειμένου να εισαγάγουμε τον παράγοντα $|x-\alpha|$. Γιά τυχόν $\varepsilon>0$ που θα επιλέξουμε η ανισότητα $\dfrac{|x-\alpha|}{\sqrt{\alpha}}<\varepsilon$ θα ικανοποιείται εάν $|x-\alpha|<\varepsilon\sqrt{\alpha}$. Ετσι φαίνεται ότι μπορούμε να επιλέξουμε $\delta=\varepsilon\sqrt{\alpha}$. Πρέπει επίσης να έχουμε $\delta\le\alpha$, προκειμένου να έχουμε μη αρνητικό x όταν $|x-\alpha|<\delta$ γιατί διαφορετικά η $\sqrt{x}$ δεν ορίζεται. Ετσι θεωρούμε

$\delta = \min\{\alpha,\ \varepsilon\sqrt{\alpha}\}$. Τότε $|x-\alpha| \langle \delta$ και $|f(x)-f(\alpha) \langle \varepsilon|$. Ετσι η f είναι συνεχής στο x=α. Επειδή το α παριστά τυχόν ντα αριθμό στο διάστημα $(0,\infty)$ η f είναι συνεχής σε όλα τα σημεία αυτού του ανοικτού διαστήματος. Τέλος η f , όπως είδαμε, είναι συνεχής από δεξιά στο 0 και επομένως η f είναι συνεχής στο .

2.2.3.8 Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)=2x-3$ είναι συνεχής στο $x_0=3$

2.2.3.9 Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)=x^2+2$ είναι συνεχής στο $x_0=1$.

2.2.3.10 Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)=(x+2)/(x-1)$ ορισμένη στο $R-\{1\}$ είναι συνεχής στο $x_0=2$.

2.2.3.11 Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$, ορισμένη στο $[0,+\infty]$ είναι συνεχής στο $x_0=4$.

2.2.3.12 Παράδειγμα

Να εξετσθεί αν η συνάρτηση $f(x)=x^2-2x+7$ είναι συνεχής στο σημείο $x_0=-2$.

2.2.3.13 Παράδειγμα

Να εξετσθεί αν η συνάρτηση $f(x)=(2x-1)/x+3|R-\{3\}$ είναι συνεχής στο σημείο $x_0=4$.

2.2.3.14 Παράδειγμα

Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x)=????$ είναι συνεχής στο $x=???$

2.2.3.15 Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)=(2x^4-6x^3+x^2+3)/(x-1)$ είναι συνεχής στο $x=1$.

2.2.3.16 Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι η $f(x)=x$ είναι συνεχής στο $x=x_0$.

2.2.3.17 Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι η $f(x)=2x^3+x$ είναι συνεχής σε οποιοδήποτε σημείο $x=x_0$.

2.3 Πλευρική συνέχεια.

"*Μία συνάρτηση f ονομάζεται συνεχής από αριστερά εάν ισχύει* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ *και συνεχής από δεξιά εάν*

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

2.3.1 Θεώρημα - Πόρισμα

Μια συνάρτηση f ορισμένη στο $x_0 \in A$ είναι συνεχής στο σημείο αυτό, αν και μόνον αν είναι συνεχής από δεξιά και από αριστερά στο x_0.

2.3.2 Παράδειγμα

Γιά την συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{για } x\le 1 \\ x & \text{γιά } x>1 \end{cases}$ να δειχθεί ότι είναι συνεχής στο x=1. Πράγματι

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=1=f(1)$$

και

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} x=1=f(1)$$

άρα είναι συνεχής από αριστερά και από δεξιά στο 1 και επομένως συνεχής στο 1.

2.4 Συνέχεια σε διάστημα

2.4.1 Ορισμός (συνέχεια σε κλειστό διάστημα)

" Μία συνάρτηση f ορισμένη στο κλειστό διάστημα [α,β] είναι συνεχής σ' αυτό όταν

1. είναι συνεχής σε κάθε σημείο του ανοικτού διαστήματος (α,β)

2. είναι συνεχής από δεξιά στο α

3. είναι συνεχής από αριστερά στο β"

Με μαθηματικά σύμβολα ο ορισμός αυτός γράφεται

$$(\forall x0\in I)(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)[x\in I\wedge |x-x0|<\delta \to |f(x)-f(x0)|<\varepsilon]$$

2.4.2 Ορισμός (συνέχεια σε ανοικτό διάστημα)

Μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο ανοικτό διάστημα (α,β) εάν είναι συνεχής γιά κάθε $x\in(\alpha,\beta)$.

2.4.3 Παρατήρηση

Με ανάλογο τρόπο ορίζεται η συνέχεια και γιά ημιανοικτά διαστήματα, όπως και γιά άπειρα διαστήματα, όπως και με τη συνθήκη ότι το πλευρικό όριο, από την πλευρά του πεδίου ορισμού, να ισούται με το όριο σε κάθε άκρο.

2.4.4 Παρατήρηση

Η συνέχεια της συνάρτησης f στο κλειστό διάστημα $[a,b]$ δεν εξασφαλίζει την συνέχεια αυτής στα άκρα x=a ή x=b. Για την μελέτη της συνέχειας συνάρτησης στα άκρα ενός κλειστού διαστήματος $[a,b]$ χρησιμο-ποιούμε τα μονόπλευρα όρια. Ειδικώτερα, λέμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής από αριστερά στο b

$$\text{Εάν } \forall\varepsilon\rangle 0 \text{ υπάρχει ένα } \delta \text{ τέτοιο ώστε εάν } b-\delta\langle x\le b \text{ τότε } |f(x)-f(b)|\langle\varepsilon$$

Ομοίως, λέμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής από δεξιά στοο a

$$\text{Εάν } \forall\varepsilon\rangle 0 \text{ υπάρχει ένα } \delta \text{ τέτοιο ώστε εάν } a\le x\le a+\delta \text{ τότε } |f(x)-f(a)|\langle\varepsilon$$

Και στις δυο περιπτώσεις πρέπει να ισχύει $\delta\le b-a$ έτσι ώστε το x να ανήκει στο διάστημα $[a,b]$.

2.4.5 Παρατήρηση

Πολλές φορές, όταν λέμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a,b]$, εννοούμε ότι η f εί-ναι συνεχής σε κάθε σημείο μεταξύ a και b και είναι συνεχής από δεξιά στο a και από αριστερά στο b.

2.4.6 Θεώρημα

Εστω n και m θετικοί ακέραιοι. Η συνάρτηση $f(x)=x^{n/m}$ είναι:

1. Συνεχής στο $[0,\infty)$ εάν το m είναι άρτιο
2. συνεχής στο $(-\infty,\infty)$ εάν το m είναι περιττό.

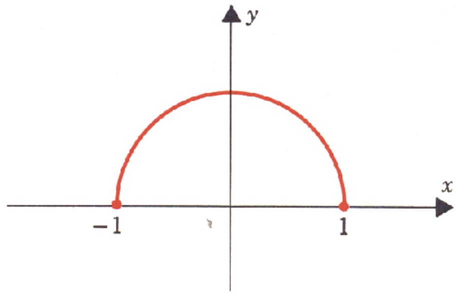
2.4.7 Παραδείγματα

2.4.7.1 Παράδειγμα

Ένα καλό παράδειγμα μας δίνει η συνάρτηση

$$f(x)=\sqrt{1-x^2}$$

Η γραφική της παράσταση είναι το ημικύκλιο του σχήματος 2.4.7.



$f(x)=\sqrt{1-x^2}$

σχήμα 2.4.7

Η συνάρτηση είναι συνεχής στο [-1, 1] επειδή είναι συνεχής σε κάθε αριθμό c του (-1, 1), συνεχής από αριστερά στο -1 και συνεχής από δεξιά στο +1.

2.4.7.2 Παράδειγμα

Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ είναι συνεχής στο διάστημα $[0,\infty)$. Με άλλα λόγια

$$\lim_{x\to\alpha}\sqrt{x}=\sqrt{\alpha}$$

Από το θεώρημα 3 της 2.4 έχουμε $\lim_{x\to\alpha^+}\sqrt{x}=0=f(0)$ και επομένως συνεχής σύμφωνα με τον ορισμό.

2.4.7.3 Παράδειγμα

Να δειχθεί οτι η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ είναι συνεχής στο $[-2,2]$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση αυτή είναι η σύνθεση της $4-x^2$ που είναι συνεχής γιά κάθε πραγματικό αριθμό και της $\sqrt{x}$ που είναι συνεχής γιά $x\rangle 0$. Εφ'όσον $4-x^2\rangle 0$ γιά $-2\langle x\langle 2$ από το θεώρημα 2.6 έχουμε ότι η f είναι συνεχής σε κάθε x στο $(-2,2)$. Θέτουμε $y=4-x^2$ και έχουμε

$$\lim_{x\to-2^+}f(x)=\lim_{x\to-2^-}\sqrt{4-x^2}=\lim_{y\to0^+}\sqrt{y}=0=f(-2)$$

$$\lim_{x\to2^{-+}}f(x)=\lim_{x\to2^-}\sqrt{4-x^2}=\lim_{y\to0^+}\sqrt{y}=0=f(2)$$

Επομένως η f είναι συνεχής από δεξιά στο –2 και από αριστερά στο 2. Συνεπώς η f είναι συνεχής στο $[-2,\ \ 2]$. *(βλ. Σχ. EG 2.55)*

2.4.7.4 Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)=1-\sqrt{1-x^2}$ είναι συνεχής στο $[-1,\ \ 1]$.

Εάν $-1\langle\alpha\langle 1$ τότε έχουμε

$$\lim_{x\to\alpha}f(x)=\lim_{x\to\alpha}\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)=1-\lim_{x\to\alpha}\sqrt{1-x^2}=1-\sqrt{\lim_{x\to\alpha}\left(1-x^2\right)}=1-\sqrt{1-\alpha^2}=f(\alpha)$$

Τότε από τον ορισμό 1 η f είναι συνεχής γιά α στο διάστημα $-1\langle\alpha\langle 1$. Πρέπει όμως να υπολογίσουμε το εκ δεξιών όριο στο –1 και το από αριστερά στο 1. Εχουμε

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+}\left(1-\sqrt{1-x^2}\right) = 1-\sqrt{\lim_{x\to -1^+}\left(1-x^2\right)} = 1-\sqrt{1-1^2} = 1 = f(-1)$$

και επομένως η f είναι συνεχής από δεξιά στο -1. Ομοίως έχουμε

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(1-\sqrt{1-x^2}\right) = 1-\sqrt{\lim_{x\to 1^-}\left(1-x^2\right)} = 1-0 = 1 = f(1)$$

και επομένως η f είναι συνεχής από αριστερά στο 1. Επομένως η f είναι συνεχής στο $[-1,\ 1]$. *Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο σχήμα 2 EG 82 και είναι το κάτω μισό του κύκλου* $x^2+(y-1)^2=1$.

2.4.7.5 Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ είναι συνεχής σε όλο το R.

2.4.7.6 Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)=x^3-5x^2+x+7\,|\,[0,3]$ είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

2.4.7.7 Παράδειγμα

Να μελετηθεί η συνέχεια της συνάρτησης $f(x)=2x^4\sin x+3x+1\,|\,R$.

2.4.7.8 Παράδειγμα

Να μελετηθεί η συνέχεια της συνάρτησης $f(x)=\sqrt[3]{x^2+\sin x+5}+\cos x\,|\,R$.

2.5 Ομοιόμορφη συνέχεια

Εάν το δ δεν εξαρτάται από το x_0 τότε η συνέχεια ονομάζεται *ομοιόμορφη συνέχεια*, ισχύει δηλαδή

$$(\forall\varepsilon\rangle 0)(\exists\delta\geq 0)(\forall x_0\in I)\left[x\in I\wedge |x-x_0|\langle\delta\rightarrow |f(x)-f(x_0)|\langle\varepsilon\right]$$

ισοδύναμα μπορούμε να γράψουμε

$$(\forall\varepsilon\rangle 0)(\exists\delta\rangle 0)\left[x_1,x_2\in I\wedge |x_1-x_2|\langle\delta\rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|\langle\varepsilon\right]$$

2.5.1 Θεώρημα

Εάν η f(x) είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα τότε είναι ομοιόμορφα συνεχής στο διάστημα αυτό.

2.5.2 Παραδείγματα

2.5.2.1 Παράδειγμα

Να εξετασθεί αν η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$, $x\in[1,\ 4]$ είναι συνεχής

Γιά κάθε $\varepsilon\rangle 0$ *πρέπει να βρούμε* $\delta\rangle 0$ *(που να εξαρτάται μόνο από το ε) τέτοιο ώστε αν* $x,y\in[1,4]$,

$[x-y]\langle\delta \to |f(x)-f(y)|\langle\varepsilon$. *Εχουμε*

$$|f(x)-f(y)|=|\sqrt{x}-\sqrt{y}|=\frac{|x-y|}{|\sqrt{x}+\sqrt{y}|}=\frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}.$$

Είναι

$$\left.\begin{matrix}1\le x\le 4\\1\le y\le 4\end{matrix}\right\}\to\left.\begin{matrix}1\le\sqrt{x}\le 2\\1\le\sqrt{y}\le 2\end{matrix}\right\}\to 2\le\sqrt{x}+\sqrt{y}\le 4\to\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\le\frac{1}{2}$$

Ετσι καταλήγουμε $|f(x)-f(y)|=\dfrac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\langle\dfrac{\delta}{2}$. *Αρκεί να πάρουμε* $\delta=2\varepsilon$.

2.5.2.2 Παράδειγμα

Να εξετασθεί αν η συνάρτηση $f(x)=x^4$, $x\in[-3,\ 2]$ είναι συνεχής.

Γιά κάθε $\varepsilon\rangle 0$ *πρέπει να βρούμε ένα* $\delta\rangle 0$ *(που να εξαρτάται μόνο από το ε) τέτοιο ώστε εάν* $x,y\in[-3,2]$, $|x-y|\langle\delta\to$ $|f(x)-f(y)|\langle\varepsilon$. *Είναι*

$$|f(x)-f(y)|=|x^4-y^4|=\left|(x^2)^2-(y^2)^2\right|=|x^2-y^2|\cdot|x^2+y^2|=|x+y|\cdot|x-y|\cdot|x^2+y^2|.$$

Εχουμε $\left.\begin{cases}-3\le x\le 2\\-3\le x\le 2\end{cases}\right\}\to\left.\begin{cases}x^2\le 4\\y^2\le 4\end{cases}\right\}\to x^2+y^2\le 8$. *Είναι και* $|x+y|\le 4$ *και επομένως*

$|f(x)-f(y)|=|x-y|\cdot|x+y|\cdot|x^2+y^2|\langle\delta\cdot 4\cdot 8=32\delta$. *Αρκεί να πάρουμε* $\delta=\dfrac{\varepsilon}{32}$

2.5.2.3 Παράδειγμα

Να εξετασθεί ως προς την ομοιόμορφη συνέχεια η συνάρτηση $f(x)=x^3$, $-1\le x\le 1$.

Γιά κάθε $\varepsilon\rangle 0$ *πρέπει να βρούμε ένα* $\delta\rangle 0$ *(που να εξαρτάται μόνο από το ε) τέτοιο που αν* $x,y\in[-1,\ 1]$,

$|x-y|\langle\delta\to|f(x)-f(y)|\langle\varepsilon$. *Είναι*

$$|x^2-y^2|=|(x-y)(x^2+xy+y^2)|=|x-y|\cdot|x^2+xy+y^2|\langle\delta(x^2+|x|\cdot|y|+y^2)$$

Είναι $x\in[-1,\ 1]\to -1\le x\le 1\to|x|\le 1$ *και* $y\in[-1,\ 1]\to -1\le y\le 1\to|y|\le 1$ *και* $x^2\le 1,\ \ y^2\le 1\to x^2+y^2\le 2$ *και*

επομένως $|x^2-y^2|\langle\delta(x^2|x|\cdot|y|+y^2)\langle\delta(2+1)=3\delta$. *Αρκεί λοιπόν να πάρουμε* $\delta=\dfrac{\varepsilon}{3}$. *Τότε θα είναι*

$x,y\in[-1,\ 1]$, $|x-y|\langle\dfrac{\varepsilon}{3}\to|f(x)-f(y)|\langle 3\delta=3\dfrac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$.

2.5.2.4 Παράδειγμα

Να εξετασθεί ως προς την ομοιόμορφη συνέχεια η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$, $-2\le x\le 0$.

Γιά κάθε $\varepsilon\rangle 0$ *πρέπει να βρούμε ένα* $\delta\rangle 0$ *(που να εξαρτάται μόνο από το ε) τέτοιο που αν*

$x,y\in[-2,\ 0],\ \ |x-y|\langle\delta\to|f(x)-f(y)|\langle\varepsilon$. *Είναι*

$$|f(x)-f(y)|=\left|\frac{x}{x^2+1}-\frac{y}{y^2+1}\right|=\left|\frac{xy^2+x-yx^2-y}{(x^2+1)(y^2+1)}\right|=\left|\frac{xy(y-x)+(x-y)}{(x^2+1)(y^2+1)}\right|=\frac{|x-y|\cdot|1-xy|}{|x^2+1|\cdot|y^2+1|}$$

Είναι επίσης $\left.\begin{matrix}-2\le x\le 0\to 0\le -x\le 2\\ -2\le y\le 0\to 0\le -y\le 2\end{matrix}\right\}\to\left\{\begin{matrix}0\le x^2\le 4\to\dfrac{1}{x^2+1}\le 1\\ 0\le y^2\le 4\to\dfrac{1}{y^2+1}\le 1\end{matrix}\right\}\to 0\le xy\le 4\to 4\le -xy\le 0\to -3\le 1-xy\le 1$ *Ετσι*

έχουμε $|f(x)-f(y)|=\dfrac{|x-y|\cdot|1-xy|}{(x^2+1)(y^2+1)}\langle\dfrac{\delta\cdot 1}{1\cdot 1}=\delta$. *Αρκεί λοιπόν να πάρουμε δ=ε.*

2.5.2.5 Παράδειγμα

Να εξετασθεί ως προς την ομοιόμορφη συνέχεια η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x}{x+2},\quad |x|\le 1$.

Γιά κάθε $\varepsilon\rangle 0$ *πρέπει να βρούμε ένα* $\delta\rangle 0$ *(που να εξαρτάται μόνο από το ε) τέτοιο που αν* $x,y\in[-1,\ 1]$,

$|x-y|\langle\delta\to|f(x)-f(y)|\langle\varepsilon$. *Εχουμε*

$$|f(x)-f(y)|=\left|\frac{x}{x+2}-\frac{y}{y+2}\right|=\left|\frac{xy+2x-yx-2y}{(x+2)(y+2)}\right|=2\frac{|x-y|}{|x+2|\cdot|y+2|}$$

Είναι $\left.\begin{matrix}|x|\le 1\leftrightarrow -1\le x\le 1\leftrightarrow 1\le x+2\le 3\\ |y|\le 1\leftrightarrow -1\le y\le 1\leftrightarrow 1\le y+2\le 3\end{matrix}\right\}\to\left\{\begin{matrix}\dfrac{1}{3}\le\dfrac{1}{x+2}\le 1\\ \dfrac{1}{3}\le\dfrac{1}{y+2}\le 1\end{matrix}\right.$.

Αρα $|f(x)-f(y)|=\dfrac{2|x-y|}{|x+2|\cdot|y+2|}\le\dfrac{2\cdot\delta}{1\cdot 1}=2\delta$. *Αρκεί να πάρουμε 2δ=ε, οπότε* $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$.

2.5.2.6 Παράδειγμα

Να εξετασθεί ως προς την ομοιόμορφη συνέχεια η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}},\quad x\ge 1$.

Γιά κάθε $\varepsilon\rangle 0$ *πρέπει να βρούμε ένα* $\delta\rangle 0$ *(που να εξαρτάται μόνο από το ε) τέτοιο που αν*

$x,y\in[1,\ \beta],\ \ |x-y|\langle\delta\to|f(x)-f(y)|\langle\varepsilon$. *Είναι*

$$|f(x)-f(y)|=\left|\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{y}}\right|=\left|\frac{\sqrt{y}-\sqrt{x}}{\sqrt{xy}}\right|=\left|\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{xy}}\right|=\frac{|x-y|}{|\sqrt{xy}|\cdot|\sqrt{x}+\sqrt{y}|}$$

Είναι ακόμα $\left.\begin{matrix}x\ge 1\\ y\ge 1\end{matrix}\right\}\to\left\{\begin{matrix}\dfrac{1}{\sqrt{x}}\le 1\\ \dfrac{1}{\sqrt{y}}\le 1\end{matrix}\right.$. *Εκλέγουμε δ=2ε.*

2.5.2.7 Παράδειγμα

Να εξετασθεί ως προς την ομοιόμορφη συνέχεια η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}, \quad x\geq 1$.

Γιά κάθε $\varepsilon\rangle 0$ *πρέπει να βρούμε ένα* $\delta\rangle 0$ *(που να εξαρτάται μόνο από το ε) τέτοιο που αν*

$x,y\in[1,\ \alpha],\ |x-y|\langle\delta\to|f(x)-f(y)|\langle\varepsilon$. *Είναι* $|f(x)-f(y)|=\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|=\frac{|x-y|}{|xy|}$. *Είναι ακόμα*

$(1\leq x,\ 1\leq y)\to\left(\frac{1}{x}\leq 1,\ \ \frac{1}{y}\leq 1\right)$. *Από αυτές έχουμε* $|f(x)-f(y)|=\frac{|x-y|}{|xy|}\langle\frac{\delta}{1}$. *Επιλέγουμε ως δ το ε.*

2.5.2.8 Παράδειγμα

Να εξετασθεί ως προς την ομοιόμορφη συνέχεια η συνάρτηση $f:R\to R$ με $f(x)=\sin x$.

Γιά κάθε $\varepsilon\rangle 0$ *πρέπει να βρούμε ένα* $\delta\rangle 0$ *(που να εξαρτάται μόνο από το ε) τέτοιο που αν* $x,y\in R$, $|x-y|\langle\delta\to$

$|f(x)-f(y)|\langle\varepsilon$. *Είναι* $|f(x)-f(y)|=|\sin x-\sin y|=\left|2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}\right|\leq\ 2\left|\sin\frac{x-y}{2}\right|\cdot 1=2\left|\sin\frac{x-y}{2}\right|$. *Από την*

τριγωνομετρία είναι γνωστό ότι $\left|\sin\frac{x-y}{2}\right|\leq\frac{|x-y|}{2}$. *Ετσι έχουμε* $|f(x)-f(y)|\leq 2\frac{|x-y|}{2}=|x-y|\langle\varepsilon=\delta$.

2.5.2.9 Παράδειγμα

Να εξετασθεί ως προς την ομοιόμορφη συνέχεια η συνάρτηση $f:R\to R$ με $f(x)=\cos x$

2.5.2.10 Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι κάθε πολυωνυμική συνάρτηση της μορφής

$$f(x)=\alpha_0 x^n+\alpha_1 x^{n-1}+\cdots+\alpha_{n-1}x+\alpha_n$$

είναι ομοιόμορφα συνεχής σε κάθε κλειστό διάστημα $[\alpha,\ \beta]$.

2.5.2.11 Παράδειγμα

Εστω $X\subset R$ και $f,g:X\to R$ δύο ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις. Τότε

1. Η f+g είναι ομοιόμορφα συνεχής
2. Η $f\cdot g$ όχι πάντα ομοιόμορφα συνεχής. Οταν οι f, g είναι φραγμένες τότε η $f\cdot g$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.
3. Η $\frac{1}{f}:A\to R$ όπου $A=\{x\in X:f(x)\neq 0\}$ δεν είναι κατ' ανάγκη ομοιόμορφα συνεχής. Αν όμως $|f(x)|\geq\delta$ γιά κάθε $x\in X$ και $\delta\rangle 0$ τότε η $1/f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

2.5.2.12 Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι αν μία συνεχής συνάρτηση $f:R\to R$ είναι περιοδική, τότε είναι ομοιόμορφα συνεχής. Να δειχθεί ακόμη ότι οι συναρτήσεις $f,g:R\to R$ με $f(x)=\sin x$, $g(x)=\cos x$ είναι ομοιόμορφα συνεχείς.

2.5.2.13 Παράδειγμα

Εστω $f:[\alpha,\ +\infty]\to R$ μία συνεχής συνάρτηση.

α. Να δειχθεί ότι αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l,\ \ l\in R$ τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

β. Να μελετηθεί ως προς την ομοιόμορφη συνέχεια η συνάρτηση με $f(x)=e^{-x}$ γιά κάθε $x\in R$.

2.5.2.14 Παράδειγμα

Δίδεται μία συνάρτηση $f:R\to R$ γιά την οποία ισχύει $f(x+y)=f(x)+f(y)$ γιά κάθε $x,y\in R$.

1. Να δειχθεί ότι η f είναι συνεχής αν και μόνο αν είναι συνεχής στο 0.
2. Αν η f είναι συνεχής στο 0 τότε είναι ομοιόμορφα συνεχής.
3. Αν η f είναι συνεχής και $f(\rho)=\alpha\rho$ γιά κάθε $\rho\in Q$ και $\alpha\in R$ τότε είναι $f(x)=\alpha x$ γιά κάθε $x\in R$.

2.5.2.15 Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι οι συναρτήσεις

α. $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$ β. $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$

είναι ομοιόμορφα συνεχείς.

2.5.2.16 Παράδειγμα

Να εξετασθούν ως προς την ομοιόμορφη συνέχεια οι συναρτήσεις

α. $f(x)=2x^2,\ \ x\in[1,2]$ β. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4},\ \ x\in R$

2.5.2.17 Παράδειγμα

Να μελετηθούν ως προς την ομοιόμορφη συνέχεια οι συναρτήσεις

α. $f:\left[0,\ \dfrac{\pi}{4}\right]\to R$ με $f(x)=\tan x$ **β.** $f:(0,\ \pi)\to R$ με $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin^2 x$ **γ.** με $f(x)=\tan x$

2.5.2.18 Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι η συνάρτηση με $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

2.5.2.19 Παράδειγμα

Να μελετηθεί ως προς την ομοιόμορφη συνέχεια η συνάρτηση .

2.5.2.20 Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)=x^3$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $0\langle x\langle 1$.

2.5.2.21 Παράδειγμα

Δείξτε ότι η $f(x)=1/x$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $0\langle x\langle 1$.

2.6 Ασυνέχεια

2.6.1 Ορισμός

Λέμε ότι μία συνάρτηση y=f(x) είναι *ασυνεχής* στο σημείο $x_0\in A$ τότε και μόνον τότε, αν δεν είναι συνεχής στο x_0. Το σημείο x_0 λέγεται τότε σημείο ασυνέχειας της συνάρτησης. Πρέπει να επισημάνουμε ότι:

1. ένα σημείο ασυνέχειας είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού της και όχι απομονωμένο, γιατί όπως μας είναι γνωστό στα απομονωμένα σημεία η συνάρτηση είναι συνεχής.
2. η έννοια της ασυνέχειας τίθεται μόνο για τα σημεία του πεδίου ορισμού της συνάρτησης

2.6.2 Παρατήρηση

Διακρίνουμε δύο είδη ασυνέχειας

1. *Ασυνέχεια πρώτου είδους* έχουμε όταν τα πλευρικά όρια στο x_0 είναι πεπερασμένα. Στην Περίπτωση $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=l\neq f(x_0)$ οπότε $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l\neq f(x_0)$ η ασυνέχεια χαρακτηρίζεται μη ουσιώδης ή αιρούμενη. Τότε αν θέσουμε $f(x_0)=l$ η νέα συνάρτηση που προκύπτει είναι συνεχής στο x_0. Πρέπει επίσης να τονίσουμε ότι αν $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=l_1\neq l_2=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ η ασυνέχεια είναι ουσιώδης και η διαφορά $|l_1-l_2|$ λέγεται άλμα της f στο x_0
2. Ασυνέχεια δευτέρου είδους όταν ένα τουλάχιστον από τα πλευρικά όρια δεν υπάρχει ή είναι μη πεπερασμένο.

2.6.3 Παρατήρηση

Εάν το πεδίο ορισμού της f περιέχει ένα διάστημα (c-p, c+p), τότε η f μπορεί να πάψει να είναι συνεχής στο c μόνο για έναν από τους δύο λόγους: ή f(x) δεν έχει όριο καθώς το x τείνει στο c και η ασυνέχεια στην περίπτωση αυτή ονομάζεται *Ουσιαστική* ή να έχει όριο το οποίο δεν είναι το *f(c)*, και η ασυνέχεια ονομάζεται *απομακρύνσιμη (removable)* ασυνέχεια. Η τελευταία αυτή ασυνέχεια μπορεί να αρθεί αν ορίσουμε την *f* στο *c*. Εάν το όριο είναι *l* ορίζουμε η *f* στο *c* να είναι *l*.

2.6.4 Παραδείγματα

2.6.4.1 Παράδειγμα

Είναι χρήσιμο να δούμε διάφορους τύπους ασυνεχών συναρτήσεων.

Στο σχήμα HDP104.2.20 η συνάρτηση f είναι ασυνεχής στο x=0, Το $\lim_{x\to 0} f(x)$ δεν υπάρχει και το $f(0)$ δεν υπάρχει. Η ασυνέχεια αυτή ονομάζεται *άπειρη ασυνέχεια*.

Στο σχήμα HDP104.2.21 η συνάρτηση f είναι ασυνεχής στο x=1. Εχουμε $f(1)=0$ και $\lim_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim_{x\to 1^-} f(x)$. Επομένως το $\lim_{x\to 1} f(x)$ δεν υπάρχει. Η ασυνέχεια αυτή ονομάζεται *απλή* (jump).

Η ασυνέχεια ρων συναρτήσεων των σχημάτων HDP104.2.22 και HDP104.2.23 ονομάζεται *απομακρύνσιμη (removable) ασυνέχεια* καθ' όσον με ορισμό ή επαναορισμό της συνάρτησης σε ένα μόνον σημείο η ασυνέχεια μπορεί να απομακρυνθεί.

2.6.4.2 Παράδειγμα

Η συνάρτηση

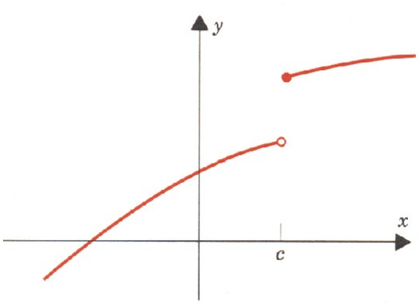
$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

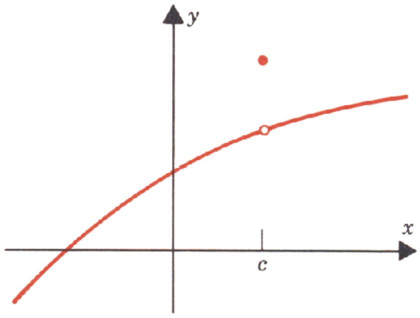
έχει απομακρύνσιμη ασυνέχεια στο x=0. Αν και το f(0) δεν ορίζεται το $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Επομένως, εάν ορίσουμε το f(0) να είναι ίσο με 1 μαζί με την $f(x) = \sin x / x$ όταν $x \neq 0$ παίρνουμε μία συνεχή συνάρτηση, σχήμα HDP104.2.24.

2.6.4.3 Παράδειγμα

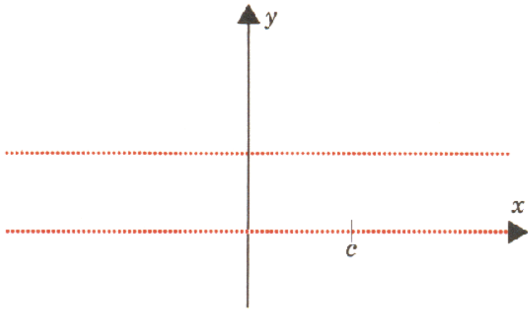
Η συνάρτηση του σχήματος 2.4.1 είναι ασυνεχής στο c επειδή δεν έχει όριο στο c. Η ασυνέχεια είναι ουσιαστική.

2.6.4.4 Παράδειγμα





Η συνάρτηση του σχήματος 2.4.2 δεν έχει όριο στο *c*. Είναι ασυνεχής στο *c* επειδή το όριο στο *c* δεν ισούται με την τιμή της στο *c*. Η ασυνέχεια είναι απομακρύνσιμη και μπορεί να απομακρυνθεί με επαναορισμό της



f στο *c*. (???)

σχήμα 2.4.3

Στο σχήμα 2.4.3 είναι σχεδιασμένη η συνάρτηση Dirichlet

$$f(x)=\begin{cases} 1, x\text{-●™●●} \\ 0, x\text{†--●™•●} \end{cases}$$

2.6.4.5 Παράδειγμα

Η συνάρτηση δεν έχει όριο σε κανένα σημείο. Είναι επομένως παντού ασυνεχής και κάθε σημείο της είναι σημείο ουσιαστικής ασυνέχειας.

2.7 Η Άλγεβρα

2.7.1 Θεώρημα

Εάν οι συναρτήσεις f(x) και g(x) είναι συνεχείς στο *c*, τότε:

1. η συνάρτηση f(x)+g(x) είναι συνεχής στο c

2. η συνάρτηση f(x)g(x) είναι συνεχής στο c

3. η συνάρτηση f(x)/g(x) είναι συνεχής στο c, με την προϋπόθεση $g(c)\neq 0$.

4. η συνάρτηση αf(x) είναι συνεχής στο *c* για κάθε πραγματικό α

2.8 Συνέχεια σύνθεσης συναρτήσεων

2.8.1 Θεώρημα

Εάν η συνάρτηση g(x) είναι συνεχής στο σημείο x_0 και η συνάρτηση f(x) είναι συνεχής στο $g(x_0)$ τότε η σύνθεσή τους είναι συνεχής στο x_0.

2.8.2 Θεώρημα

Εστω f συνάρτηση συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα που περιέχει τον αριθμό L. Εάν το όριο

$$\lim_{x\to\alpha} g(x) = L$$

υπάρχει, τότε

$$\lim_{x\to\alpha} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to\alpha} g(x)\right) = f(L)$$

2.8.3 Θεώρημα

Εστω g συνάρτηση σε ένα ανοικτό διάστημα που περιέχει την αριθμό α, και, έστω f συνάρτηση συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα που περιέχει τον αριθμό g(α). Τότε η σύνθεση των συναρτήσεων $f \cdot g$ είναι συνεχής στο α.

2.8.4 Θεώρημα

Για κάθε θετικό ακέραιο n=1,2,…

1. η συνάρτηση $f(x) = x^n$ είναι συνεχής για όλα τα x.
2. εάν η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x=α τότε η συνάρτηση $f(x) = (g(x))^n$ είναι συνεχής στο α.

2.8.5 Παραδείγματα

2.8.5.1 Παράδειγμα

Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f(x)=3x-3 είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 3$.

2.8.5.2 Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2$ είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 1$.

2.8.5.3 Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$ είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 2$.

2.8.5.4 Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ είναι συνεχής στο σημείο $x_0=4$.

2.9 Βασικά Θεωρήματα για τη Συνέχεια

Η συνέχεια μία συνάρτησης είναι ιδιότητα *τοπική*, με την έννοια ότι αφορά σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού και στην περιοχή του. Με τα παρακάτω θεωρήματα αυτά έχουμε μία *ολική* (global) ιδιότητα.

2.9.1 Θεώρημα

Αν η συνάρτηση $y=f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα I τότε το f(I) είναι επίσης διάστημα.

2.9.2 Θεώρημα Bolzano

Εάν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α,β] και ισχύει f(α)f(β)<0 τότε υπάρχει (τουλάχιστον) ένα ″∈(‡,‰) τέτοιο ώστε f(ξ)=0, δηλαδή η εξίσωση f(x)=0 έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα (α,β)

2.9.3 Θεώρημα ενδιάμεσης τιμής - πρώτη διατύπωση

Έστω f(x) συνεχής συνάρτηση στο [α,β] και έστω ότι για κάποιο αριθμό c ισχύει

f(α)<c<f(β) ή f(α)>c>f(β). Τότε υπάρχει κάποιο σημείο x_0 στο (α,β) τέτοιο ώστε $f(x_0)=c$.

Γεωμετρικά το θεώρημα αυτό μας λεει ότι για να περάσει η γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης από την μία πλευρά μιας οριζόντιας γραμμής στην άλλη πρέπει να τμήσει την γραμμή αυτή σε ένα σημείο.

2.9.4 Θεώρημα ενδιάμεσης τιμής - δεύτερη διατύπωση

Έστω f(x) συνάρτηση συνεχής στο [α,β] και έστω ότι $f(x)\neq c$ για όλα τα *x* στο [α,β]. Εάν f(α)<c τότε θα είναι f(β)<c. Επίσης εάν f(α)>c τότε θα είναι f(β)>c.

Γεωμετρικά το θεώρημα αυτό λεει ότι : " η γραφική παράσταση μίας συνεχούς συνάρτησης που δεν συναντά ποτέ μία οριζόντια γραμμή πρέπει να παραμένει στην μία πλευρά της".

Στην πράξη το τελευταίο αυτό θεώρημα μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε το πρόσημο μιας συνάρτησης σε διαστήματα όπου αυτή δεν έχει ρίζες.

2.9.5 Θεώρημα (μέγιστης - ελάχιστης τιμής)

Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α,β], τότε υπάρχουν δύο τουλάχιστον σημεία x_ε, x_μ ∈[α,β] τέτοια ώστε να ισχύει

$$f(x_\varepsilon)\leq f(x)\leq f(x_\mu) \quad \text{για κάθε } x\in[\alpha,\beta]$$

δηλαδή η f(x) παίρνει στο [α,β] ελάχιστη τιμή $f(x_\varepsilon)$ και μέγιστη τιμή $f(x_\mu)$.

Συνέχεια Βασικών Συναρτήσεων

2.10 Συνέχεια τριγωνομετρικών συναρτήσεων

2.10.1 Παρατήρηση

Από τον ορισμό των cost και sint ως των x και y συντεταγμένων ενός σημείου στον μοναδιαίο κύκλο, μπορούμε να διαπιστώσουμε γεωμετρικά ότι και οι δυο συναρτήσεις είναι συνεχείς για όλες τις πραγματικές τιμές του t. Εφ' όσον τώρα οι άλλες τριγωνομετρικές συναρτήσειςορίζονται συναρτήσεις των sint και cost τότε, βάσει του θεωρήματος ???, θα είναι και αυτές συνεχείς εκτός από τα σημεία που μηδενίζεται ο παρονομαστής.

2.10.2 Θεώρημα

Οι συναρτήσεις sint και cost είναι συνεχείς για όλα τα πραγματικά t. Οι συναρτήσεις tant και sect είναι συνεχείς εκτός από τα σημεία όπου cost=0, δηλαδή $t=\pi/2+n\pi,\ n=0,\pm1,\pm2,\cdots$. Οι συναρτήσεις cott και csct είναι συνεχείς εκτός από τα σημεία όπου sint=0 δηλαδή $t=n\pi,\ n=0,\pm1,\pm2,\cdot\cdot$.

2.10.3 Ασκήσεις - Παραδείγματα - Εφαρμογές

2.10.3.1 Παράδειγμα

Δείξτε ότι υπάρχει αριθμός x_0 τέτοιος ώστε $x_0^5-x_0=3$

Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^5-x$ η οποία είναι συνεχής ως πολυώνυμο. Έχουμε $f(0)=0$, $f(1)=0$, $f(2)=30$. Εφ' όσον $0\langle 3\langle 30$ ή $f(0)\langle 3\langle f(2)$ σύμφωνα με το θεώρημα 2.9.3 στο διάστημα (0,2) θα υπάρχει αριθμός x_0 έτσι ώστε $f(x_0)=0$.

2.10.3.2 Παρατήρηση

Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι το θεώρημα 2.9.3 δεν μας λεει πως θα βρούμε το x_0 αλλά απλά μας λεει ότι υπάρχει. Μπορούμε όμως με αλλεπάλληλες διαιρέσεις του διαστήματος σε δύο ή περισσότερα μέρη και προσδιορίζοντας την $f(x)$ στα άκρα κάθε διαστήματος μπορούμε να βρούμε την λύση της $f(x)=c$ με όποια ακρίβεια θέλουμε. Αυτό αποτελεί την μέθοδο της διχοτόμησης που εξηγείται στο επόμενο παράδειγμα 2.10.3.3

2.10.3.3 Παράδειγμα

Να ευρεθεί μία λύση της $x^5-x=3$ στο διάστημα (0, 2) με ακρίβεια 0.1 διαιρώντας αλλεπάλληλα το διάστημα αυτό στο μισό και ελέγχοντας κάθε μισό για την ύπαρξη ρίζας.

Στο παράδειγμα 2.10.3.1 βρήκαμε ότι η εξίσωση έχει λύση στο διάστημα (0, 2). Για να προσδιορίσουμε με περισσότερη ακρίβεια την λύση διαιρούμε το διάστημα (0, 2) σε δύο ίσα μέρη (0, 1) και (1, 2). Επειδή $f(0)\langle 3\langle f(1)$ δεν ισχύει σημαίνει ότι η λύση δεν βρίσκεται στο διάστημα (0, 1). Ισχύει όμως $f(1)(=0)\langle 3\langle f(2)(=30)$. Επομένως η λύση βρίσκεται στο διάστημα (1, 2). Διαιρούμε το διάστημα αυτό σε δύο ίσα διαστήματα, (1, 1.5) και (1.5, 2) και ελέγχουμε την τιμή της συνάρτησης στα άκρα. Έχουμε $f(1)=0$, $f(1.5)\cong 6.09$ και παρατηρούμε ότι από τις συνθήκες $f(1)\langle 3\langle f(1.5)$ και

$f(1.5)\langle 3\langle f(2)$ ισχύει η πρώτη και επομένως η ρίζα βρίσκεται στο διάστημα $(1,\ 1.5)$. Στη συνέχεια διαιρούμε και πάλι στο διάστημα αυτό σε δύο ίσα διαστήματα (1, 1.25) και (1.25, 1.5) και ελέγχουμε και πάλι τις τιμές της συνάρτησης στα άκρα των διαστημάτων αυτών. Έχουμε $f(1.25)=1.80\langle 3$. Επομένως η λύση βρίσκεται στο διάστημα (1.25, 1.5). Διαιρούμε το διάστημα αυτό στη μέση και έχουμε (1.25, 1.375) και (1.375, 1.5) και με τον ίδιο τρόπο διαπιστώνουμε ότι η ρίζα βρίσκεται στο πρώτο διάστημα. Εάν πούμε ότι $x_0=1.3$ τότε έχουμε προσδιορίσει την λύση με ακρίβεια 0.1. Μεγαλύτερη ακρίβεια μπορούμε να επιτύχουμε εάν προχωρήσουμε σε περισσότερες διχοτομήσεις. Για την εύρεση της ρίζας υπάρχουν και άλλες μέθοδοι και τεχνικές μερικές από τις οποίες θα αναφερθούν αργότερα.

2.10.3.4 Παράδειγμα

Έστω ότι η f είναι συνεχής στο [0,3], ότι η f δεν έχει ρίζες στο διάστημα αυτό και ότι στο διάστημα αυτό ισχύει $f(0)=1$. Να δειχθεί ότι $f(x)\rangle 0$ για όλα τα x στο [0, 3].

Εφαρμόζουμε το θεώρημα 2.9.4 για c=0 και για την f στο [0, b] όπου . Εφ' όσον η f είναι συνεχής στο [0, b]. Εφ' όσον $f(0)=1\rangle 0$ θα έχουμε και $f(b)\rangle 0$. Και επειδή το b είναι τυχόν στο τότε $f(x)\rangle 0$ για όλα τα x στο [0, 3].

2.10.3.5 Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι η εξίσωση $x^3-2x^2-7=0$ έχει μία ρίζα μεταξύ x=1 και x=2.

Έστω $f(x)=x^3-2x^2+4x-7$. Γνωρίζουμε ότι η f θα είναι συνεχής αφού πρόκειται για πολυώνυμο. Βρίσκουμε ότι f(1)=-4 και f(2)=1. Το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής (πρώτη διατύπωση) μας λεει ότι η f(x) παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ -4 και 1 καθώς το x παίρνει τιμές από 1 έως 2. Εφ' όσον το 0 είναι μεταξύ -4 και 1 συμπεραίνουμε ότι υπάρχει αριθμός .. στο διάστημα (0,1) και θα ισχύει $f(x_0)=0$. Δηλαδή το x_0 θα είναι ρίζα της f(x) και θα βρίσκεται μεταξύ x=1 και x=2.

2.10.3.6 Παράδειγμα

Έστω $f(x)=2x^3-2x^2+7x-10$. Να δειχθεί ότι f(x)=0 για κάποιο x μεταξύ 1 και 2. Να υπολογισθεί η τιμή αυτή του x.

2.10.3.7 Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι κάθε πολυώνυμο f(x) με πραγματικούς συντελεστές, περιττού βαθμού, έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

Έστω το πολυώνυμο .. όπου .. πραγματικού αριθμοί .. (αν έχουμε $\alpha_0=0$ τότε θα έχουμε ως προφανή ρίζα το μηδέν) και ν=2κ+1, όπου $k\in N_0$. Από το παράδειγμα μας είναι γνωστό ότι

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \ \textit{και}\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \ \textit{αν}\ \alpha_\nu\rangle 0 \ \textit{και}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \ \textit{και}\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty \ \textit{αν}\ \alpha_\nu\langle 0$$

Από τις ιδιότητες των ορίων και με την βοήθεια των παραπάνω συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν πάντοτε α,β ∈R ώστε

$$f(\alpha)\rangle 0,\ \ f(\beta)\langle 0 \quad \textit{ή} \quad f(\alpha)\langle 0,\ \ f(\beta)\rangle 0$$

υπάρχουν δηλαδή α,β ∈R έτσι ώστε $f(\alpha)\cdot f(\beta)\langle 0$. Επομένως η συνάρτηση έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

Σημειώματα

Α) Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το υλικό της Μαθηματικής Ανάλυσης προέρχεται από τις σημειώσεις του Επίκουρου Καθηγητή κ. Γεωργίου Ν. Μπροδήμα για τις ανάγκες διδασκαλίας του ομώνυμου μαθήματος στο Τμήμα Φυσικής του Πανεπιστημίου Πατρών .

Β) Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Γεώργιος Ν. Μπροδήμας. «Μαθηματική Ανάλυση. Ενότητα Β.02: Η Συνέχεια Συνάρτησης». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: **https://eclass.upatras.gr/courses/PHY1912/**

Γ) Σημείωμα Αδειοδότησης

Δ) Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- ✓ το Σημείωμα Αναφοράς
- ✓ το Σημείωμα Αδειοδότησης
- ✓ τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- ✓ το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφ’ όσον υπάρχει).