



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

Τίτλος Μαθήματος: Μαθηματική Ανάλυση
Ενότητα Γ. Ολοκληρωτικός Λογισμός

Κεφάλαιο Γ.08.5: Το Ολοκλήρωμα στην Φυσική

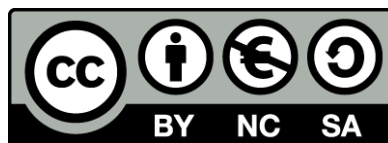
Όνομα Καθηγητή: Γεώργιος Ν. Μπροδήμας

Τμήμα Φυσικής

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά
μαθήματα **ΠΠ**

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Πίνακας Περιεχομένων

Γ.08.5 Το Ολοκλήρωμα στη Φυσική.....	4
8.5.1 Υδροστατική Πίεση	4
Γενικά	4
8.5.1.1 Παράδειγμα.....	4
8.5.1.2 Παράδειγμα κυκλική επιφάνεια.....	4
8.5.1.3 Παράδειγμα τραπεζοειδής επιφάνεια	4
8.5.1.4 Παράδειγμα.....	4
8.5.1.5 Παράδειγμα.....	4
8.5.2 Έργο Μεταβλητής Δύναμης.....	5
Γενικά	5
8.5.2.1 Παράδειγμα Ανόψωση Αγκυρας.....	5
8.5.2.2 Πρόβλημα.....	5
8.5.2.3 Πρόβλημα.....	5
8.5.2.4 Πρόβλημα.....	5
8.5.3 Κέντρα Μάζας, Κέντρα Βάρους και Ροπές Αδρανείας	6
8.5.3.1 Παράδειγμα.....	6
8.5.3.2 Παράδειγμα.....	6
8.5.3.3 Πρόβλημα.....	6
8.5.4 Κέντρο Μάζας Ράβδου με μεταβλητή πυκνότητα.....	7
8.5.4.1 Παράδειγμα.....	7
8.5.4.2 Παράδειγμα τριγωνική επιφάνεια.....	7
8.5.4.3 Πρόβλημα.....	7

Γ.08.5 Το Ολοκλήρωμα στη Φυσική

8.5.1 Υδροστατική Πίεση

Γενικά

Σε αυτή την ενότητα θα δούμε πως το ολοκλήρωμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της δύναμης που ασκεί ένα υγρό που πιέζει την μια πλευρά μιας επιφάνειας.

Για τον σκοπό αυτό κάνουμε μια διαμέριση της επιφάνειας σε στοιχειώδη μέρη και βρίσκουμε την πίεση που ασκείται σε κάθε ένα από αυτά.

Στην συνέχεια ολοκληρώνοντας βρίσκουμε την πίεση που ασκείται σε όλη την επιφάνεια.

Να σημειωθεί ότι η διαμέριση εξαρτάται από το σχήμα της επιφάνειας.

8.5.1.1 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί η δύναμη που ασκεί το ρευστό στην μία επιφάνεια πλάκας με σχήμα ισόπλευρου τριγώνου, με πλευρά 2m, βυθισμένη κατακόρυφα σε υγρό πυκνότητας $\rho = 900 \text{ Kg/m}^3$.

8.5.1.2 Παράδειγμα κυκλική επιφάνεια

Η μια κατακόρυφη πλευρά μιας λεκάνης είναι ημικυκλική πλάκα ακτίνας R με την καμπύλη πλευρά προς τα κάτω. Αν η λεκάνη είναι πλήρης, δηλαδή η στάθμη του νερού είναι στην κορυφή της πλάκας, να ευρεθεί η ολική δύναμη του νερού στην πλάκα.

8.5.1.3 Παράδειγμα τραπεζοειδής επιφάνεια

Ένα φράγμα έχει την μορφή τραπέζιου όπως δείχνει το σχήμα. Το ύψος είναι 20m η μεγάλη βάση είναι 50 m ενώ η μικρή 30m. Να ευρεθεί η δύναμη στο φράγμα λόγω της υδροστατικής πίεσης αν η στάθμη του νερού είναι 4m από την κορυφή.

8.5.1.4 Παράδειγμα

Μια δεξαμενή έχει τετράγωνη βάση με πλευρά 2 m και κατακόρυφες πλευρές 6m. Αν η δεξαμενή είναι γεμάτη με νερό να ευρεθεί η ολική δύναμη που ασκείται από το νερό

- i. Στον πυθμένα της δεξαμενής
- ii. Σε μια από τις 4 πλευρές.

8.5.1.5 Παράδειγμα

Μια δεξαμενή μήκους 20m και πλάτους 8m έχει κεκλιμένο πυθμένα με τρόπο που να έχει βάθος 1m στο ένα άκρο και 3 στο άλλο. Να ευρεθεί η ολική δύναμη που ασκείται στον πυθμένα όταν η δεξαμενή είναι γεμάτη με νερό.

8.5.2 Έργο Μεταβλητής Δύναμης

Γενικά

Υποθέτουμε τώρα ότι ένα σώμα κινείται πάνω στον άξονα x από $x=a$ έως $x=b$ υπό την επίδραση μιας δύναμης $F(x)$ που εξαρτάται από το x .

Θεωρούμε μια διαμέριση $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ του $[a, b]$, και υπολογίζουμε το έργο σε κάθε υποδιάντημα έστω $[x_{k-1}, x_k]$.

Η ολοκλήρωση μας δίδει το ολικό έργο.

8.5.2.1 Παράδειγμα Ανύψωση Αγκυρας

Η άγκυρα ενός πλοίου ζυγίζει 800 Kg και είναι εξαρτημένη από μια αλυσίδα που ζυγίζει 10 Kg/m. Να υπολογισθεί το έργο.

8.5.2.2 Πρόβλημα

Πόσο έργο καταναλώνεται για την επιμήκυνση ενός ελατηρίου κατά l εάν k είναι η σταθερά του;

8.5.2.3 Πρόβλημα

Ένα ελατήριο που έχει φυσικό μέγεθος L συμπιεζόμενο στο μήκος $\frac{7}{8}L$ ασκεί δύναμη F_0 . Να ευρεθεί το έργο που παράγει το ελατήριο όταν επανέρχεται στο φυσικό του μέγεθος. Ποιο είναι το έργο που απαιτείται ώστε το ελατήριο να αποκτήσει μήκος $\frac{11}{10}L$;

8.5.2.4 Πρόβλημα

Ένα ελατήριο αν επιμηκυνθεί κατά $\frac{1}{3}m$ πέραν του φυσικού του μεγέθους ασκεί δύναμη ??.

Ποιο το έργο που απαιτείται ώστε το ελατήριο να επιμηκυνθεί ακόμη κατά $\frac{1}{3}m$;

8.5.3 Κέντρα Μάζας, Κέντρα Βάρους και Ροπές Αδράνειας

Κάθε στοιχειώδες μέρος που γνωρίσαμε κατά τον υπολογισμό μήκους τόξου καμπύλης, εμβαδού επιφάνειας και όγκου, το 'μετατρέπουμε' σε στοιχειώδη μάζα, στοιχειώδες βάρος, στοιχειώδη ροπή αδράνειας, ..., και στην συνέχεια ολοκληρώνουμε.

Κέντρο Μάζας Χωρίου κάτω από γραφική παράσταση

Το Κέντρο Μάζας μιας επιφάνειας με ομοιόμορφη πυκνότητα που περιγράφεται από την γραφική παράσταση της f στο $[a,b]$ βρίσκεται στο (\bar{x}, \bar{y}) , όπου

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx} \quad \text{και} \quad \bar{y} = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b [f(x)]^2 dx}{\int_a^b f(x) dx}$$

8.5.3.1 Παράδειγμα

Να ευρεθεί το κέντρο μάζας κάτω από την γραφική παράσταση της $y = x^2$ από 0 έως 1.

8.5.3.2 Παράδειγμα

Να ευρεθεί το κέντρο μάζας ημικυκλικής περιοχής ακτίνας 1.

8.5.3.3 Πρόβλημα

Να ευρεθεί το Κέντρο Μάζας ενός σύρματος με σταθερή πυκνότητα ρ που έχει σχήμα ημικυκλίου ακτίνας a .

8.5.4 Κέντρο Μάζας Ράβδου με μεταβλητή πυκνότητα

Μια ράβδος μήκους 10m πυκνώνει από δεξιά προς αριστερά με αποτέλεσμα η πυκνότητα αντί να είναι σταθερή να ισούται με $\delta(x) = 1 + (x/10)$ Kg/m . Να ευρεθεί το κέντρο μάζας.

8.5.4.1 Παράδειγμα

Να ευρεθεί το κέντρο μάζας λεπτής επιφάνειας που ορίζεται από την παραβολή $y = 4 - x^2$ και από τον άξονα των x .

8.5.4.2 Παράδειγμα τριγωνική επιφάνεια

Να δεχθεί ότι το κέντρο βάρους ενός τριγώνου είναι στο σημείο τομής των τριών διαμέσων.

8.5.4.3 Πρόβλημα

Μία σημειακή μάζα m βρίσκεται στην μεσοκάθετο μίας λεπτής και ομοιομόρφου ράβδου και σε απόσταση h από αυτήν. Η ράβδος ασκεί βαρυτική έλξη στη μάζα m . Να ευρεθεί το μέτρο της έλξης δοθέντος ότι η ράβδος έχει μάζα M και μήκος L .

Σημειώματα

A) Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το υλικό της Μαθηματικής Ανάλυσης προέρχεται από τις σημειώσεις του Επίκουρου Καθηγητή κ. Γεωργίου Ν. Μπροδήμα για τις ανάγκες διδασκαλίας του ομώνυμου μαθήματος στο Τμήμα Φυσικής του Πανεπιστημίου Πατρών .

B) Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Γεώργιος Ν. Μπροδήμας. «Μαθηματική Ανάλυση. Ενότητα Γ.08.5: Το Ολοκλήρωμα στην Φυσική». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

<https://eclass.upatras.gr/courses /PHY1912/>

Γ) Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/> Ως Μη Εμπορική ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Δ) Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- ✓ το Σημείωμα Αναφοράς
- ✓ το Σημείωμα Αδειοδότησης
- ✓ τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- ✓ το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφ' όσον υπάρχει).