ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

Τίτλος Μαθήματος: Μαθηματική Ανάλυση

Ενότητα Γ. Ολοκληρωτικός Λογισμός

Κεφάλαιο Γ.08.4: Υπολογισμός Όγκων

Όνομα Καθηγητή: Γεώργιος Ν. Μπροδήμας

Τμήμα Φυσικής

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά μαθήματα ΠΠ

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Πίνακας Περιεχομένων

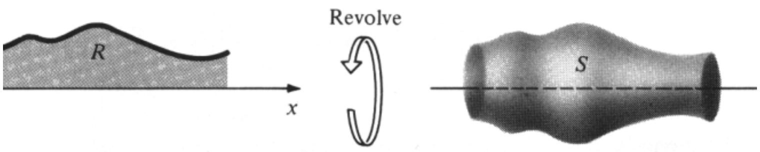
Γ.08.4 Υπολογισμός Όγκων - Όγκος στερεών εκ περιστροφής.

8.4.1 Περιστροφή περί τον άξονα των x

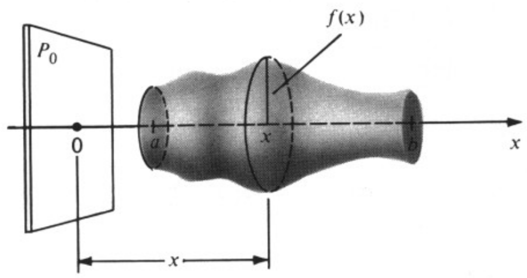
8.4.1.1 Μέθοδος των Δίσκων.

Ένα στερεό μπορεί να προκύψει αν θεωρήσουμε μία επίπεδη επιφάνεια *R* όπως αυτή του σχήματος και την περιστρέψουμε γύρο από τον άξονα των x έτσι ώστε να "σαρώσει" έναν όγκο *V*. Τέτοια στερεά ονομάζονται *στερεά εκ περιστροφής* και έχουν *αξονική συμμετρία*.

Έστω ότι η επιφάνεια *R* περιορίζεται από τις γραμμές x=α, x=b, y=0 και από την γραφική παράσταση της συνάρτησης y=f(x).



Για να υπολογίσουμε τον όγκο V που γεννάται από την περιστροφή, με την μέθοδο των δίσκων θεωρούμε μία οικογένεια επιπέδων καθέτων προς τον άξονα των x εκ των οποίων το P_0 περνά από την αρχή.



Η τομή στην θέση *x* (την συμβολίζουμε με P_x) είναι ένας κυκλικός δίσκος ακτίνας f(x) και εμβαδού $S(x)=\pi\left[f(x)\right]^2$. Ο όγκος *V* είναι

$$V=\int_a^b S(x)dx=\int_a^b \pi\left[f(x)\right]^2 dx=\pi\int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx$$

Άρα: *Ο όγκος ενός στερεού εκ περιστροφής που προκύπτει από την περιστροφή επιφανείας κάτω από την γραφική παράσταση της f(x) (που είναι μη αρνητική) στο διάστημα [a,b] γύρο από τον άξονα των x είναι:*

$$\mathbf{V=\pi\int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx}$$

Παραδείγματα

8.4.1.1.1 Παράδειγμα

Η περιοχή κάτω από την γραφική παράσταση της $y=x^2$ περιστρέφεται περί τον άξονα των x. Να σχεδιασθεί το στερεό που γεννάται και να ευρεθεί ο όγκος του.

8.4.1.1.2 Παράδειγμα

Να ευρεθεί ο όγκος του στερεού που γεννάται από την περιστροφή περί τον άξονα x του χωρίου κάτω από την καμπύλη $y=\sqrt{x}$ από 0 έως 1.

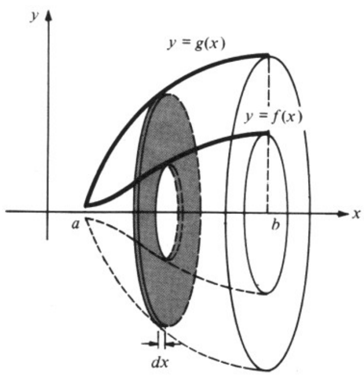
8.4.1.1.3 Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι ο όγκος μιας σφαίρας ακτίνας r είναι $\frac{4}{3}\pi r^3$.

8.4.1.2 Μέθοδος των Δακτυλίων.

Η μέθοδος των Δακτυλίων αποτελεί ελαφρά γενίκευση της μεθόδου των δίσκων. Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι μη αρνητικές, συνεχείς και ότι $g(x)\le f(x)$ Για όλα τα $x\in[a,b]$ όπως στο σχήμα

Αν περιστρέψουμε την περιοχή R γύρο από τον άξονα των x προκύπτει ένα στερεό που ο όγκος του δίδεται από τον τύπο $V=\int_a^b \pi\left\{\left[f(x)\right]^2-\left[g(x)\right]^2\right\}dx$. Πράγματι η διατομή στο σημείο *x* είναι ένας δακτύλιος με εξωτερική ακτίνα f(x), εσωτερική g(x) και εμβαδόν



$$\mathbf{A(x)=\pi\int_a^b\left[\left[f(x)\right]^2-\left[g(x)\right]^2\right]dx}.$$

Ο όγκος προκύπτει από ολοκλήρωση της έκφρασης αυτής στο διάστημα από a έως b.

8.4.1.2.1 Παράδειγμα

Το χωρίο μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των sinx και x στο [0,π/2], περιστρέφεται περί τον άξονα των x. Να ευρεθεί ο όγκος του στερεού που γεννάται.

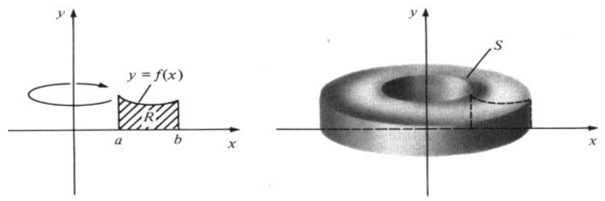
8.4.1.2.2 Παράδειγμα

Το επίπεδο χωρίο που περιλαμβάνεται μεταξύ των καμπυλών $y=x$ και $y=x^2$ περιστρέφεται περί τον άξονα των x. Να ευρεθεί ο όγκος τους στερεού που γεννάται.

8.4.2 Περιστροφή περί τον άξονα των y

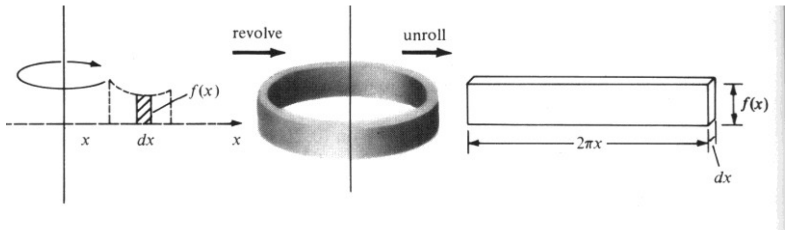
8.4.2.1 Μέθοδος των Φλοιών

Ένας άλλος τρόπος με τον οποίο μπορεί να προκύψει ένα στερεό είναι να περιστρέψουμε την επιφάνεια R κάτω από την γραφική παράσταση μίας μη αρνητικής συνάρτησης f(x) στο διάστημα



[a,b] γύρο από τον άξονα των y. Εστω $0 \le a \le b$.

Αν περιστρέψουμε μία ταινία πλάτους dx και ύψους f(x) που βρίσκεται σε απόσταση x από τον άξονα περιστροφής προκύπτει ένας κυλινδρικός φλοιός ακτίνας x, ύψους f(x) και πάχους dx. Αν "απλώσουμε" τον φλοιό αυτό έχουμε ένα επίπεδο ορθογώνιο φύλλο με πλάτος 2πx, ίσο με την περιφέρεια του



κυλινδρικού φλοιού. Ο όγκος του φύλλου αυτού είναι το γινόμενο του εμβαδού 2πxf(x) επί το πάχος dx.

Ο ολικός όγκος του στερεού προκύπτει αν αθροίσουμε τους όγκους των απειροστών φλοιών, δηλαδή το ολοκλήρωμα

$$\int_a^b 2\pi x f(x) dx .$$

Εάν περιστρέψουμε την περιοχή μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των *f(x)* και *g(x)* όπου $f(x) \le g(x)$ στο διάστημα [a,b] το ύψος θα είναι g(x)-f(x) και επομένως ο όγκος θα είναι

$$V = 2\pi \int_a^b x\left[g(x) - f(x)\right] dx$$

8.4.2.1.1 Παράδειγμα

Να ευρεθεί ο όγκος του στερεού που γεννάται από την περιστροφή περί τον άξονα των y του χωρίου που ορίζεται από $y = x^3$, $y = 8$ και x=0.

8.4.2.1.2 Παράδειγμα

Ο δίσκος που έχει ακτίνα 1 και κέντρο το σημείο (4,0) περιστρέφεται γύρο από τον άξονα y. Να σχεδιασθεί το στερεό που γεννάται και να ευρεθεί ο όγκος του.

8.4.2.1.3 Παράδειγμα

Να σχεδιασθεί το στερεό που γεννάται από την περιστροφή του χώρου μεταξύ των καμπυλών $y = x^2$ και y=1 στο διάστημα [0,1] γύρο από τον άξονα y.

8.4.2.1.4 Παράδειγμα

Να σχεδιασθεί το στερεό που γεννάται από την περιστροφή του χωρίου κάτω από την καμπύλη $y = e^x$ στο διάστημα [0,1] γύρο από τον άξονα y.

8.4.2.1.5 Παράδειγμα

Να σχεδιασθεί ο όγκος που γεννάται από την περιστροφή του χωρίου κάτω από την καμπύλη $y = 2x^3 + 5x + 1$ στο διάστημα [0,1] γύρο από τον άξονα y.

Σημειώματα

Α) Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το υλικό της Μαθηματικής Ανάλυσης προέρχεται από τις σημειώσεις του Επίκουρου Καθηγητή κ. Γεωργίου Ν. Μπροδήμα για τις ανάγκες διδασκαλίας του ομώνυμου μαθήματος στο Τμήμα Φυσικής του Πανεπιστημίου Πατρών .

Β) Σημείωμα Αναφοράς

Γ) Σημείωμα Αδειοδότησης

Δ) Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- ✓ το Σημείωμα Αναφοράς
- ✓ το Σημείωμα Αδειοδότησης
- ✓ τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- ✓ το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφ’ όσον υπάρχει).