



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΠΑΤΡΩΝ  
UNIVERSITY OF PATRAS

---

# Τίτλος Μαθήματος: Μαθηματική Ανάλυση

## Ενότητα Γ. Ολοκληρωτικός Λογισμός

Κεφάλαιο Γ.08.3: Εμβαδά εκ Περιστροφής

Όνομα Καθηγητή: Γεώργιος Ν. Μπροδήμας

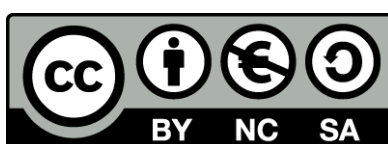
Τμήμα Φυσικής

---

**ΑΝΟΙΚΤΑ** ακαδημαϊκά **ΠΠ**  
μαθήματα

## Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



## Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



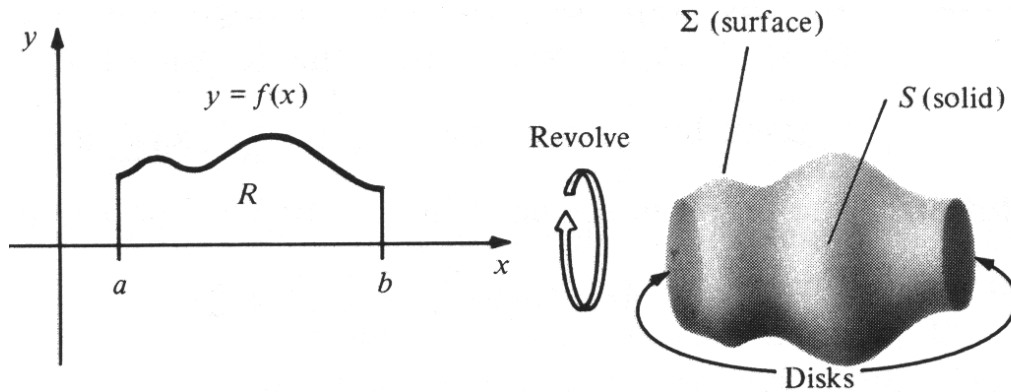
## Πίνακας Περιεχομένων

Γ.08.3 Εμβαδά εκ Περιστροφής .....	4
<b>8.3.1</b> Εμβαδό επιφανείας εκ περιστροφής καμπύλης περί τον άξονα των $x$ . .....	4
Παραδειγματα .....	5
8.3.1.1 Παράδειγμα.....	5
8.3.1.2 Παράδειγμα.....	5
8.3.1.3 Παράδειγμα.....	5
8.3.1.4 Παράδειγμα.....	5
8.3.1.5 Παράδειγμα.....	5
8.3.1.6 Παράδειγμα.....	6
8.3.1.7 Παράδειγμα.....	6
8.3.1.8 Παράδειγμα.....	6
8.3.1.9 Παράδειγμα.....	6
<b>8.3.2</b> Εμβαδά επιφανείας εκ περιστροφής περί τον άξονα των $y$ .....	6
Παραδειγματα .....	7
8.3.2.1 Παράδειγμα.....	7
8.3.2.2 Παράδειγμα.....	7
8.3.2.3 Παράδειγμα.....	7
8.3.2.4 Παράδειγμα.....	7
8.3.2.5 Παράδειγμα.....	7
8.3.2.6 Παράδειγμα.....	7
<b>8.3.3</b> Εμβαδά με ολοκλήρωση ως προς $y$ .....	8
8.3.3.1 Παράδειγμα.....	8
8.3.3.2 Παράδειγμα (SH 304).....	8
8.3.3.3 Παράδειγμα.....	8

## Γ.08.3 Εμβαδά εκ Περιστροφής

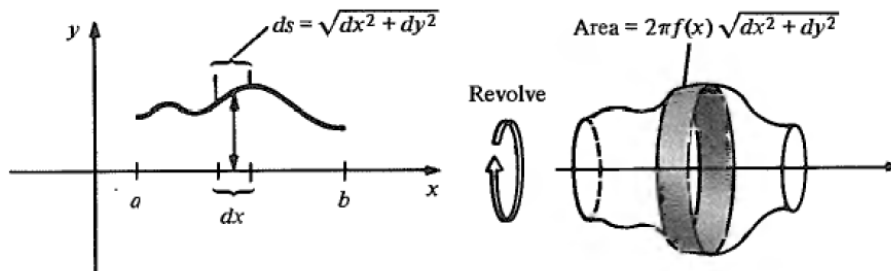
### 8.3.1 Εμβαδό επιφάνειας εκ περιστροφής καμπύλης περί τον άξονα των x.

Θεωρούμε την γραφική παράσταση της  $y=f(x)$  και περιστρέφουμε την καμπύλη  $y=f(x)$  περί τον άξονα των x.



Γεννάται έτσι μία επιφάνεια εκ περιστροφής που την συμβολίζουμε με  $\Sigma$ . Σκοπός μας είναι να εκφράσουμε το εμβαδό της με την βοήθεια του ολοκληρώματος.

Σύμφωνα με το σχήμα που ακολουθεί



μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η λεία αυτή επιφάνεια αποτελείται από απείρως πολλές απειροστές ζώνες που το εμβαδό της κάθε μιας είναι  $2\pi f(x)$  επί το εύρος της κάθε ζώνης που είναι  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ . Επομένως, και κάνοντας χρήση του Θεωρήματος Μέσης Τιμής<sup>1</sup>, το ολικό εμβαδό θα είναι

$$\int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Επομένως θα έχουμε ότι το εμβαδόν της επιφάνειας που προκύπτει από την περιστροφή της  $f(x)$  ( $\geq 0$ ) στο διάστημα  $[a,b]$  περί τον άξονα των x είναι

1. [BOOK0693, 439]

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

Άρα:

Το εμβαδόν της επιφάνειας που προκύπτει από την περιστροφή της  $f(x) (\geq 0)$  στο διάστημα  $[a,b]$  περί τον άξονα των  $x$  είναι

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

## Παραδείγματα

### 8.3.1.1 Παράδειγμα

Να ευρεθεί το εμβαδόν σφαιρικής επιφάνειας ακτίνας  $r$  που προκύπτει από περιστροφή της

$y = \sqrt{r^2 - x^2}$  στο  $[-r,r]$  περί τον άξονα των  $x$ .

### 8.3.1.2 Παράδειγμα

Να ευρεθεί το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας ενός ορθού κυκλικού κώνου ύψους  $h$  και βάσης  $R$ .

### 8.3.1.3 Παράδειγμα

Να ευρεθεί το εμβαδόν της επιφάνειας που προκύπτει από την περιστροφή, περί τον άξονα των  $x$ , της γραφικής παράστασης της  $y = x^3$  στο  $[0,1]$ .

### 8.3.1.4 Παράδειγμα

Να ευρεθεί το εμβαδόν της επιφάνειας που προκύπτει από την περιστροφή, περί τον άξονα των  $x$ , της γραφικής παράστασης της  $y = x^2$  στο  $1 \leq x \leq 2$ .

### 8.3.1.5 Παράδειγμα

Να ευρεθεί το εμβαδόν της επιφάνειας που γεννάται από την περιστροφή γύρω από τον άξονα  $x$  του τόξου της καμπύλης  $y = \sin x$  από  $x=0$  έως  $x=\pi/2$ .

### 8.3.1.6 Παράδειγμα

Να ευρεθεί το εμβαδό της επιφάνειας που γεννάται από την περιστροφή της καμπύλης  $y = 2\sqrt{x}$  στο διάστημα  $1 \leq x \leq 2$  περί τον άξονα των  $x$ .

### 8.3.1.7 Παράδειγμα

Να ευρεθεί το εμβαδό της επιφάνειας που γεννάται από την περιστροφή της καμπύλης  $y = x^3$ ,  $0 \leq x \leq 1/2$ .

### 8.3.1.8 Παράδειγμα

Να ευρεθεί το εμβαδό της επιφάνειας που γεννάται από την περιστροφή της  $y = \sqrt{x}$  στο  $[0, 2]$  περί τον άξονα των  $x$ .

### 8.3.1.9 Παράδειγμα

Να ευρεθεί το εμβαδό της επιφάνειας  $S$  που γεννάται από την περιστροφή της γραφικής παράστασης της  $y = \sqrt{x} - \frac{1}{3}x^{3/2}$  περί τον άξονα των  $x$  για  $1 \leq x \leq 3$ .

~~~~~

## 8.3.2 Εμβαδά επιφανείας εκ περιστροφής περί τον άξονα των $y$ .

Με μέθοδο όμοια με αυτήν της προηγούμενης περίπτωσης μπορούμε να παραγάγουμε την έκφραση που μας δίνει το εμβαδά της επιφάνειας που προκύπτει από περιστροφή της  $y=f(x)$  ( $>0$ ) γύρω από τον άξονα των  $y$  για  $a \leq x \leq b$ .

Τα στοιχειώδη εμβαδά θα είναι  $dA = ds \cdot 2\pi x = 2\pi x \sqrt{dx^2 + dy^2}$  και επομένως

$$A = \int_a^b 2\pi x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Άρα: Το εμβαδόν της επιφάνειας που προκύπτει από την περιστροφή της  $f(x)$  ( $\geq 0$ ) στο διάστημα  $[a, b]$  περί τον άξονα των  $y$  είναι  $A = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$

Άρα:

**Το εμβαδό της επιφάνειας που προκύπτει από την περιστροφή της  $f(x)$  ( $\geq 0$ ) στο διάστημα  $[a, b]$  περί τον άξονα των  $y$  είναι**

$$A = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

## Παραδείγματα

### 8.3.2.1 Παράδειγμα

Να ευρεθεί το εμβαδό της επιφάνειας που προκύπτει από την περιστροφή του τόξου της καμπύλης  $x = y^2$  από  $y=0$  έως  $y=1$  γύρω από τον άξονα  $y$ .

### 8.3.2.2 Παράδειγμα

Να ευρεθεί το εμβαδό της επιφάνειας που γεννάται από την περιστροφή της  $x = 2\sqrt{4-y}$  περί τον άξονα των  $y$  στο διάστημα  $0 \leq y \leq 15/4$  .

### 8.3.2.3 Παράδειγμα

Να ευρεθεί το εμβαδό της επιφάνειας που γεννάται από την περιστροφή της  $x = \sqrt{2y-1}$  περί τον άξονα των  $y$  στο διάστημα  $5/8 \leq y \leq 1$  .

### 8.3.2.4 Παράδειγμα

Να ευρεθεί το εμβαδό της επιφάνειας που γεννάται από την περιστροφή της  $x = y^3$  στο διάστημα  $[0,1]$  περί τον άξονα  $y$ .

### 8.3.2.5 Παράδειγμα

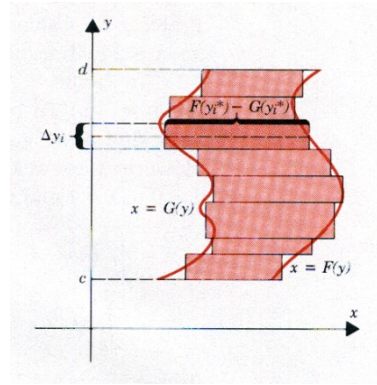
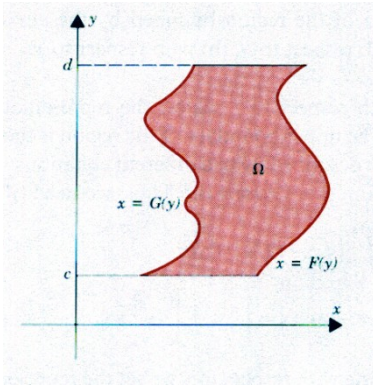
Να ευρεθεί το εμβαδό της επιφάνειας που γεννάται από την περιστροφή της  $f(x) = x^2$  στο διάστημα  $[0,1]$  περί τον άξονα των  $y$ .

### 8.3.2.6 Παράδειγμα

Το τμήμα του τόξου της παραβολής  $y = x^2$  από το σημείο  $(1,1)$  έως το σημείο  $(2,4)$  περιστρέφεται περί τον άξονα των  $y$ . Να ευρεθεί το εμβαδό της επιφάνειας που προκύπτει.

### 8.3.3 Εμβαδά με ολοκλήρωση ως προς y

Υποθέτουμε τώρα ότι τα boundaries είναι συναρτήσεις του y και όχι του x όπως στο σχήμα ???



Περιστρέφοντας τώρα την επιφάνεια R γύρω από τον άξονα των y προκύπτει στερεό του οποίου ο όγκος είναι

$$V = \int_c^d \pi \left\{ [F(y)]^2 - [G(y)]^2 \right\} dy$$

#### 8.3.3.1 Παράδειγμα

Το ευθύγραμμο τμήμα  $x = 1 - y$ ,  $0 \leq y \leq 1$  περιστρέφεται περί τον άξονα των y και γεννά την παράπλευρη επιφάνεια ενός κώνου. Να ευρεθεί το εμβαδό

#### 8.3.3.2 Παράδειγμα (SH 304)

Να ευρεθεί το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από τις καμπύλες  $x = y^2$  και  $x - y = 2$  με ολοκλήρωση  
α) ως προς x β) ως προς y.

#### 8.3.3.3 Παράδειγμα

Το τόξο της παραβολής  $y = x^2$  από (1,1) έως (2,4) περιστρέφεται περί τον άξονα των y. Να ευρεθεί το εμβαδό της επιφάνειας που προκύπτει.



## Σημειώματα

### A) Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το υλικό της Μαθηματικής Ανάλυσης προέρχεται από τις σημειώσεις του Επίκουρου Καθηγητή κ. Γεωργίου Ν. Μπροδήμα για τις ανάγκες διδασκαλίας του ομώνυμου μαθήματος στο Τμήμα Φυσικής του Πανεπιστημίου Πατρών .

### B) Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Γεώργιος Ν. Μπροδήμας. «Μαθηματική Ανάλυση. Ενότητα Γ.08.3: Εμβαδά εκ Περιστροφής». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

<https://eclass.upatras.gr/courses /PHY1912/>

### Γ) Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/> Ως Μη Εμπορική ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

### Δ) Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- ✓ το Σημείωμα Αναφοράς
- ✓ το Σημείωμα Αδειοδότησης
- ✓ τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- ✓ το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφ' όσον υπάρχει).