



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

Τίτλος Μαθήματος: Μαθηματική Ανάλυση

Ενότητα Γ. Ολοκληρωτικός Λογισμός

Κεφάλαιο Γ.08.2: Επίπεδα Εμβαδά

Όνομα Καθηγητή: Γεώργιος Ν. Μπροδήμας

Τμήμα Φυσικής

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά **ΠΠ**
μαθήματα

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Πίνακας Περιεχομένων

Γ.08.2	Επίπεδα Εμβαδά	5
8.2.1	Εμβαδόν Χωρίου	5
	Παραδείγματα.....	5
8.2.1.1	Πρόβλημα	5
8.2.1.2	Πρόβλημα	5
8.2.1.3	Πρόβλημα	5
8.2.1.4	Πρόβλημα	5
8.2.1.5	Πρόβλημα	5
8.2.1.6	Παράδειγμα.....	5
8.2.2	Εμβαδά μεταξύ καμπυλών	6
	Παραδείγματα.....	6
8.2.2.1	Παράδειγμα.....	6
8.2.2.2	Παράδειγμα.....	6
8.2.2.3	Παράδειγμα.....	6
8.2.2.4	Παράδειγμα.....	6
8.2.2.5	Παράδειγμα.....	6
8.2.2.6	Παράδειγμα.....	6
8.2.2.7	Παράδειγμα.....	7
8.2.2.8	Παράδειγμα.....	7
8.2.2.9	Παράδειγμα.....	7
8.2.2.10	Παράδειγμα.....	7
8.2.2.11	Παράδειγμα.....	7
8.2.2.12	Παράδειγμα.....	7
8.2.2.13	Παράδειγμα.....	7

8.2.2.14	Παράδειγμα.....	7
8.2.3	Εμβαδά μεταξύ τεμνομένων καμπυλών.....	8
8.2.3.1	Παράδειγμα.....	8
8.2.3.2	Παράδειγμα.....	8
8.2.3.3	Παράδειγμα.....	8
8.2.3.4	Παράδειγμα.....	8
8.2.3.5	Παράδειγμα.....	8
8.2.3.6	Παράδειγμα.....	8
8.2.3.7	Παράδειγμα.....	8
8.2.3.8	Παράδειγμα.....	9
8.2.3.9	Παράδειγμα.....	9
8.2.3.10	Παράδειγμα.....	9
8.2.3.11	Παράδειγμα.....	9
8.2.3.12	Παράδειγμα.....	9
8.2.3.13	Παράδειγμα.....	9
8.2.3.14	Παράδειγμα.....	9
8.2.3.15	Παράδειγμα.....	9
8.2.3.16	Παράδειγμα.....	9

Γ.08.2 Επίπεδα Εμβαδά

8.2.1 Εμβαδόν Χωρίου

Εάν $f(x) \geq 0$ για x στο διάστημα $[a, b]$, το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη f μεταξύ των σημείων $x=a$ και $x=b$ είναι $\int_a^b f(x) dx$. Εάν η f είναι αρνητική σε κάποια σημεία $[a, b]$, τότε $\int_a^b f(x) dx$ είναι το προσημασμένο εμβαδά μεταξύ της f , του άξονα των γραμμών $x=a$ και $x=b$.

Παραδείγματα

8.2.1.1 Πρόβλημα

Να ευρεθεί το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται από τον άξονα των x , τον άξονα των y , την γραμμή $x=2$ και την παραβολή $y=x^2$.

8.2.1.2 Πρόβλημα

Να υπολογισθεί το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται από την καμπύλη $y=x^3$, τον άξονα των x και την γραμμή $x=1$.

8.2.1.3 Πρόβλημα

Να παρασταθεί γραφικά το $\int_0^2 (x^2 - 1) dx$ και να υπολογισθεί.

8.2.1.4 Πρόβλημα

Να υπολογισθεί το εμβαδόν μεταξύ της $y=x^3$ και του άξονα των x στο διάστημα $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$.

8.2.1.5 Πρόβλημα

Να βρεθεί το εμβαδό της επιφάνειας κάτω από την καμπύλη $y=\sqrt{x}$ από 0 έως 1

8.2.1.6 Παράδειγμα

Ένα παραβολικό άνοιγμα θύρας έχει βάση 1.8m και ύψος 2.4m και έχει αφαιρεθεί από τον τοίχο. Να ευρεθεί το εμβαδό του τμήματος του τοίχου που αφαιρέθηκε.

8.2.2 Εμβαδά μεταξύ καμπολών

Εάν f και g είναι δύο συναρτήσεις που ορίζονται στο διάστημα $[a, b]$ με

$f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$ τότε ορίζουμε ως περιοχή μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των f και g στο $[a, b]$ το σύνολο των σημείων (x, y) έτσι ώστε $a \leq x \leq b$ και $f(x) \leq y \leq g(x)$. Τότε, εάν οι συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες στο διάστημα $[a, b]$ το εμβαδόν αυτό ισούται με

$$\int_a^b [f(x) \cdot g(x)] dx$$

Θεωρούμε λοιπόν το εμβαδόν αυτό ότι αποτελείται από άπειρα απειροστά πλάτους dx , ένα για κάθε x στο διάστημα $[a, b]$. Το ύψος του κάθε ορθογωνίου είναι $h(x) = g(x) - f(x)$ και το εμβαδόν $[h(x) - f(x)] dx$. Το ολικό εμβαδά θα είναι το ολοκλήρωμα $\int [g(x) - f(x)] dx$

Παραδείγματα

8.2.2.1 Παράδειγμα

Να σχεδιασθεί και να υπολογισθεί το εμβαδόν μεταξύ των x και $x^2 + 1$ στο διάστημα $[-2, 2]$

8.2.2.2 Παράδειγμα

Να ευρεθεί το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από την καμπύλη $y = x^2 + 2$, $y = -x$, $x = 0$ και $x = 1$.

8.2.2.3 Παράδειγμα

Να σχεδιασθεί και να υπολογισθεί το εμβαδόν μεταξύ των x^2 και $x+3$ στο διάστημα $[-1, 1]$

8.2.2.4 Παράδειγμα

Να σχεδιασθεί και να υπολογισθεί το εμβαδόν μεταξύ των x^2 και x^3 για τα x μεταξύ 0 και 1.

8.2.2.5 Παράδειγμα

Να ευρεθεί το εμβαδόν μεταξύ του άξονα των x και της καμπύλης $\sqrt{1 + \cos 4x}$ στο διάστημα $0 \leq x \leq \pi$

8.2.2.6 Παράδειγμα

Να ευρεθεί το εμβαδό του χωρίου στο πρώτο τεταρτημόριο που ορίζεται άνω από την $y = \sqrt{x}$ και κάτω από τον άξονα των x και την γραμμή $y = x - 2$.

8.2.2.7 Παράδειγμα

Να ευρεθεί το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται εκ των άνω από την $y = e^x$, εκ των κάτω από την $y = x$ από αριστερά από την $x = 0$ και δεξιά από την $x = 1$.

8.2.2.8 Παράδειγμα

Να ευρεθεί το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από τις καμπύλες $y = \cos x$, $y = 0$, $x = 0$ και $x = 3\pi/5$

8.2.2.9 Παράδειγμα

Να ευρεθεί το εμβαδό του χωρίου μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των

$$f(x) = x^2 - 4x + 10, \quad g(x) = 4x - x^2, \quad 1 \leq x \leq 3$$

8.2.2.10 Παράδειγμα

Να ευρεθεί το εμβαδό που περιλαμβάνεται μεταξύ της $y = 2x + 3$, του άξονα των x και των συντεταγμένων $x = 1$ και $x = 4$.

8.2.2.11 Παράδειγμα

Να σχεδιασθεί η καμπύλη $y = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ μεταξύ των $x = -3$ και $x = 2$ και να υπολογισθεί το εμβαδό που περιλαμβάνεται μεταξύ της καμπύλης και του άξονα των x .

8.2.2.12 Παράδειγμα

Να προσδιορισθεί το εμβαδό που περιλαμβάνεται μεταξύ της καμπύλης $y = 3x^2 + 4$ του άξονα των x και των συντεταγμένων $x = 1$ και $x = 4$.

8.2.2.13 Παράδειγμα

Να ευρεθεί το εμβαδό μεταξύ της $y = \sin x$, του άξονα των x και των $x = 0$ και $x = \pi/3$.

8.2.2.14 Παράδειγμα

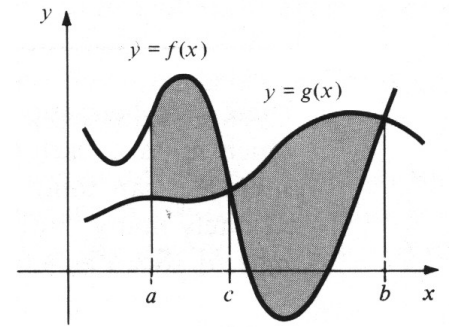
Να ευρεθεί το εμβαδό μεταξύ της $y = 4 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$, του άξονα των θ και των $\theta = 0$ και $\theta = \frac{\pi}{2}$.

8.2.3 Εμβαδά μεταξύ τεμνομένων καμπυλών

Για να βρούμε το εμβαδόν μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$ στο διάστημα από $x=a$ έως $x=b$ πρώτα σχεδιάζουμε τις γραφικές παραστάσεις και προσδιορίζουμε τα σημεία όπου $f(x)=g(x)$.

Έστω π.χ. ότι $f(x) \geq g(x)$ για $a \leq x \leq c$, $f(c)=g(c)$ και $f(x) \leq g(x)$ για $c \leq x \leq b$ όπως στο διπλανό σχήμα (Μ.Μ. 242.4.6.5). Τότε το εμβαδόν θα είναι:

$$A = \int_a^c [f(x) - g(x)] dx + \int_c^b [g(x) - f(x)] dx.$$



8.2.3.1 Παράδειγμα

Να ευρεθεί το εμβαδόν που περικλείεται εκ των άνω από την $y = 4 - x^2$ και εκ των κάτω από τον άξονα των x .

8.2.3.2 Παράδειγμα

Να ευρεθεί το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται εκ των άνω από την $y = x + 2$ και εκ των κάτω από την $y = x^2$.

8.2.3.3 Παράδειγμα

Να ευρεθεί το εμβαδόν μεταξύ των $y = \sin x$ και $y = \cos x$ στο διάστημα $\pi/4, 5\pi/4$.

8.2.3.4 Παράδειγμα

Να ευρεθεί το εμβαδόν μεταξύ των $y = 4x$ και $y = x^3$ από $x = -2$ έως $x = 2$.

8.2.3.5 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το εμβαδόν μεταξύ των x και x^2 στο διάστημα $[0, 2]$

8.2.3.6 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το εμβαδόν μεταξύ των x^3 και $3x^2 - 2x$ στο $[0, 2]$.

8.2.3.7 Παράδειγμα

Να ευρεθεί το εμβαδόν μεταξύ των $x = y^2 - 2$ και $y = x$.

8.2.3.8 Παράδειγμα

Οι καμπύλες $x = y^2$ και $x = 1 + \frac{1}{2}y^2$ (που καμία δεν είναι γραφική παράσταση συνάρτησης $y=f(x)$) διαιρούν το επίπεδο xy σε πέντε περιοχές εκ των οποίων μία μόνο είναι φραγμένη. Να σχεδιασθεί και να υπολογισθεί το εμβαδόν.

Σχεδιάζοντας το x ως συνάρτηση του y ευρίσκουμε το σχήμα. Με βάση τους κανόνες για τον υπολογισμό εμβαδού μεταξύ τεμνομένων καμπυλών έχουμε:

8.2.3.9 Παράδειγμα

Να ευρεθεί το εμβαδό μεταξύ των καμπυλών $y = x^2 + 1$ και $y = 7 - x$

8.2.3.10 Παράδειγμα

1. Να ευρεθούν οι συντεταγμένες των σημείων τομής των καμπυλών $y = x^2$ και $y^2 = 8x$.
2. Να σχεδιασθούν οι ίδιες καμπύλες
3. Να υπολογισθεί το εμβαδό μεταξύ αυτών των καμπυλών.

8.2.3.11 Παράδειγμα

Με την βοήθεια της ολοκλήρωσης να ευρεθεί το εμβαδό μεταξύ των τριών ευθειών $y = 4 - x$, $y = 3x$, $3y = x$.

8.2.3.12 Παράδειγμα

Να ευρεθεί το εμβαδό του χωρίου μεταξύ των καμπυλών $y = x^2 - 2x$ και $y = 4 - x^2$

8.2.3.13 Παράδειγμα

Να ευρεθεί το ολικό εμβαδό A που βρίσκεται μεταξύ των καμπυλών $y = \sin x$ και $y = \cos x$ στο διάστημα από $x=0$ και $x=2\pi$.

8.2.3.14 Παράδειγμα

Να ευρεθεί το εμβαδό του χωρίου μεταξύ των γραφικών παραστάσεων της $f(x) = x^2 - 5x - 7$ και $g(x) = x - 12$ στο $[-2, 5]$.

8.2.3.15 Παράδειγμα

Να ευρεθεί το εμβαδό μεταξύ των καμπυλών $y = 8/x^2$, $y = 8x$ και $y = x$

8.2.3.16 Παράδειγμα

Να ευρεθεί η γραμμή $y = mx$ η οποία διαιρεί την καμπύλη $y = x(1-x)$ στο $[0, 1]$ σε δύο περιοχές με το ίδιο εμβαδό.

Σημειώματα

A) Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το υλικό της Μαθηματικής Ανάλυσης προέρχεται από τις σημειώσεις του Επίκουρου Καθηγητή κ. Γεωργίου Ν. Μπροδήμα για τις ανάγκες διδασκαλίας του ομώνυμου μαθήματος στο Τμήμα Φυσικής του Πανεπιστημίου Πατρών .

B) Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Γεώργιος Ν. Μπροδήμας. «Μαθηματική Ανάλυση. Ενότητα Γ.08.2: Επίπεδα Εμβαδά». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

<https://eclass.upatras.gr/courses /PHY1912/>

Γ) Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/> Ως Μη Εμπορική ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Δ) Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- ✓ το Σημείωμα Αναφοράς
- ✓ το Σημείωμα Αδειοδότησης
- ✓ τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- ✓ το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφ' όσον υπάρχει).