



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

Τίτλος Μαθήματος: Μαθηματική Ανάλυση

Ενότητα Γ. Ολοκληρωτικός Λογισμός

Κεφάλαιο Γ.08.1: Μήκος Τόξου Καμπύλης

Όνομα Καθηγητή: Γεώργιος Ν. Μπροδήμας

Τμήμα Φυσικής

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά **ΠΠ**
μαθήματα

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Πίνακας Περιεχομένων

Γ.08.1	Μήκος τόξου καμπύλης	4
8.1.1	Παράδειγμα.....	4
8.1.2	Παράδειγμα.....	5
8.1.3	Παράδειγμα.....	5
8.1.4	Παράδειγμα.....	5
8.1.5	Παράδειγμα.....	5
8.1.6	Παράδειγμα.....	5
8.1.7	Παράδειγμα.....	5
8.1.8	Παράδειγμα.....	5
8.1.9	Παράδειγμα.....	5
8.1.10	Παράδειγμα.....	5
8.1.11	Παράδειγμα.....	5
8.1.12	Παράδειγμα.....	6
8.1.13	Παράδειγμα.....	6
8.1.14	Παράδειγμα.....	6
8.1.15	Παράδειγμα.....	6
8.1.16	Παράδειγμα.....	6
8.1.17	Παράδειγμα.....	6
8.1.18	Παράδειγμα.....	6
8.1.19	Παράδειγμα.....	6
8.1.20	Παράδειγμα.....	6
8.1.21	Παράδειγμα.....	6
8.1.22	Παράδειγμα.....	6
8.1.23	Παράδειγμα – Περιφέρεια Έλλειψης.....	7
8.1.24	Παράδειγμα.....	7
8.1.25	Παράδειγμα.....	7
8.1.26	Παράδειγμα.....	7
8.1.27	Πρόβλημα.....	7

Γ.08.1 Μήκος τόξου καμπύλης

Το μήκος ενός τμήματος μιας καμπύλης στο επίπεδο ονομάζεται πολλές φορές *μήκος τόξου της καμπύλης*. Υποθέτουμε ότι το μήκος αυτό υπάρχει και θα προσπαθήσουμε να το εκφράσουμε με την βοήθεια του ολοκληρώματος. Σε πρώτη φάση περιοριζόμαστε σε καμπύλες που είναι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων. Γενικότερες καμπύλες θα θεωρήσουμε αργότερα.

Θεωρούμε μία καμπύλη που είναι γραφική παράσταση της $y=f(x)$ από $x=a$ έως $x=b$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Η καμπύλη αυτή μπορεί να θεωρηθεί ότι συνίσταται από απειροστά τμήματα.

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε ότι το μήκος ds εκάστου απειροστού τμήματος είναι

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Έχουμε όμως

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \rightarrow dy = f'(x)dx \text{ και επομένως } ds = \sqrt{dx^2 + [f'(x)]^2 dx^2} = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Για να βρούμε επομένως το ολικό μήκος της καμπύλης θα πρέπει να υπολογίσουμε τα ολοκληρώματα

$$\int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

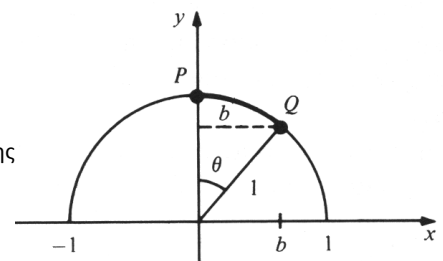
Επομένως:

Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο $[a,b]$ και ότι η f' υπάρχει και είναι συνεχής στο $[a,b]$ εκτός από πεπερασμένο αριθμό σημείων. Τότε το μήκος της καμπύλης $y=f(x)$ στο $[a,b]$ είναι

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

8.1.1 Παράδειγμα

Να ευρεθεί το μήκος της καμπύλης $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ στο $[0,b]$ όπου $0 < b < 1$. Να υπολογισθεί το ίδιο μήκος γεωμετρικά και να συγκριθούν τα αποτελέσματα.



8.1.2 Παράδειγμα

Να ευρεθεί το μήκος της καμπύλης της $f(x) = (x-1)^{\frac{3}{2}} + 2$ στο διάστημα $[1,2]$

8.1.3 Παράδειγμα

Να ευρεθεί το μήκος της παραβολής $y = x^2$ στο $[0,1]$

8.1.4 Παράδειγμα

Να ευρεθεί το μήκος τόξου της καμπύλης $y = x^{\frac{3}{2}}$ από $x=0$ έως $x=5$.

8.1.5 Παράδειγμα

Να ευρεθεί το μήκος τόξου της καμπύλης $y = 3x^{\frac{3}{2}} - 1$ από $x=0$ έως $x=4$.

8.1.6 Παράδειγμα

Να ευρεθεί το μήκος τόξου της καμπύλης $24xy = x^4 + 48$ από $x=2$ έως $x=4$.

8.1.7 Παράδειγμα

Να ευρεθεί το μήκος τόξου της αλυσοειδούς $y = \frac{1}{2}a(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$ από $x=0$ έως $x=a$.

8.1.8 Παράδειγμα

Να ευρεθεί το μήκος τόξου της παραβολής $y^2 = 12x$ που τέμνεται από την κάθετη στον άξονα συμμετρίας στην εστία.

8.1.9 Παράδειγμα

Να ευρεθεί το μήκος του τόξου της καμπύλης $x = t^2, y = t^2$ από $t=0$ έως $t=4$.

8.1.10 Παράδειγμα

Να ευρεθεί το μήκος τόξου μιας αψίδας της κυκλοειδούς $x = \theta - \sin\theta, y = \theta - \cos\theta$

8.1.11 Παράδειγμα

Να ευρεθεί το μήκος τόξου της καμπύλης $x = \frac{2}{3}(y^2 - 1)^{\frac{3}{2}}$

8.1.12 Παράδειγμα

Ένα καλώδιο πρέπει να πάρει το σχήμα που προσδιορίζεται από την καμπύλη $x^4 - 6xy + 3 = 0$ από το σημείο $(1, 2/3)$ στο σημείο $(3, 14/3)$, όπου οι αποστάσεις είναι σε μέτρα. Το καλώδιο στοιχίζει 1.000 δρχ./μέτρο. Ποιο το ολικό κόστος;

8.1.13 Παράδειγμα

Να ευρεθεί το μήκος τόξου της καμπύλης της εξίσωσης $6xy - y^4 - 3 = 0$ από $(19/12, 2)$ έως $(14/3, 3)$

8.1.14 Παράδειγμα

Να ευρεθεί το μήκος τόξου της $y = x^{3/2}$ μεταξύ των σημείων $(1, 1)$ και $(4, 8)$.

8.1.15 Παράδειγμα

Να ευρεθεί το μήκος τόξου της καμπύλης $y = 2(x+1)^{3/2}$ από $x = -1$ έως $x = 6$.

8.1.16 Παράδειγμα

Να ευρεθεί το μήκος τόξου της καμπύλης $x = \frac{2}{3}(y^2 - 1)^{3/2}$ από $y = 1$ έως $y = 3$

8.1.17 Παράδειγμα

Να ευρεθεί το ολοκλήρωμα η τιμή του οποίου δίνει το μήκος της έλλειψης $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

8.1.18 Παράδειγμα

Ένας μηχανικός σχεδιάζει να δώσει σε μια οπτική ίνα το σχήμα της καμπύλης $x^4 - 6xy + 3 = 0$ από $(1, \frac{2}{3})$ έως $(3, \frac{13}{3})$. Η ίνα κοστίζει 1 ευρώ το μέτρο. Ποιο το ολικό κόστος;

8.1.19 Παράδειγμα

Να ευρεθεί το μήκος τόξου της καμπύλης $y = \ln(\cos x)$ για $0 \leq x \leq \pi/3$

8.1.20 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το μήκος τόξου της καμπύλης $y = \ln(\sec x)$ για $0 \leq x \leq \pi/4$

8.1.21 Παράδειγμα

Να ευρεθεί το μήκος της καμπύλης $y = \frac{4\sqrt{2}}{3}x^{3/2} - 1$ στο διάστημα $0 \leq x \leq 1$.

8.1.22 Παράδειγμα

Να ευρεθεί το μήκος της καμπύλης $y = x^4 + \frac{1}{32x^2}$ από $x=1$ έως $x=2$.

8.1.23 Παράδειγμα - Περιφέρεια Έλλειψης

Να ευρεθεί η περιφέρεια της έλλειψης $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ όπου $a \geq b > 0$

8.1.24 Παράδειγμα

Να ευρεθεί το μήκος s της $f(x) = \frac{1}{12}x^3 + x^{-1}$ στο $[1,3]$.

8.1.25 Παράδειγμα

Να ευρεθεί το μήκος της καμπύλης $y = \cosh x$ στο $[0, a]$. Στην συνέχεια να ευρεθεί το μήκος για $[0, 2]$.

8.1.26 Παράδειγμα

Να ευρεθεί το μήκος τόξου της ημικυβικής παραβολής $y^2 = x^3$ μεταξύ των σημείων $(1, 1)$ και $(4, 8)$.

8.1.27 Πρόβλημα

Να ευρεθεί το μήκος τόξου της $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$ στο διάστημα $[\frac{1}{2}, 2]$.

Σημειώματα

A) Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το υλικό της Μαθηματικής Ανάλυσης προέρχεται από τις σημειώσεις του Επίκουρου Καθηγητή κ. Γεωργίου Ν. Μπροδήμα για τις ανάγκες διδασκαλίας του ομώνυμου μαθήματος στο Τμήμα Φυσικής του Πανεπιστημίου Πατρών .

B) Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Γεώργιος Ν. Μπροδήμας. «Μαθηματική Ανάλυση. Ενότητα Γ.08.1: Μήκος Τόξου Καμπύλης». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

<https://eclass.upatras.gr/courses /PHY1912/>

Γ) Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/> Ως Μη Εμπορική ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Δ) Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- ✓ το Σημείωμα Αναφοράς
- ✓ το Σημείωμα Αδειοδότησης
- ✓ τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- ✓ το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφ' όσον υπάρχει).