



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

Τίτλος Μαθήματος: Μαθηματική Ανάλυση

Ενότητα Γ. Ολοκληρωτικός Λογισμός

Κεφάλαιο Γ.07: Ολοκληρώματα με Ριζικά

Όνομα Καθηγητή: Γεώργιος Ν. Μπροδήμας

Τμήμα Φυσικής

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά **ΠΠ**
μαθήματα

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Πίνακας Περιεχομένων

| | | |
|--------|--|----|
| Γ.07 | Ολοκληρώματα με Ριζικά | 8 |
| 7.1 | Ολοκληρώματα με Διώνυμο στο Ριζικό | 8 |
| | Παρατήρηση I | 9 |
| | Παρατήρηση II | 9 |
| | Παραδείγματα [$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 x^2}$] | 10 |
| 7.1.1 | Παράδειγμα | 10 |
| 7.1.2 | Παράδειγμα | 10 |
| 7.1.3 | Παράδειγμα | 10 |
| 7.1.4 | Παράδειγμα | 10 |
| 7.1.5 | Παράδειγμα | 10 |
| 7.1.6 | Παράδειγμα | 10 |
| 7.1.7 | Παράδειγμα | 10 |
| 7.1.8 | Παράδειγμα | 10 |
| 7.1.9 | Παράδειγμα | 10 |
| | Παραδείγματα [$\sqrt{\beta^2 x^2 - \alpha^2}$] | 11 |
| 7.1.10 | Παράδειγμα | 11 |
| 7.1.11 | Παράδειγμα | 11 |
| 7.1.12 | Παράδειγμα | 11 |
| 7.1.13 | Παράδειγμα | 11 |
| 7.1.14 | Παράδειγμα | 11 |
| 7.1.15 | Παράδειγμα | 11 |
| 7.1.16 | Παράδειγμα | 11 |
| 7.1.17 | Παράδειγμα | 11 |
| 7.1.18 | Παράδειγμα | 11 |
| 7.1.19 | Παράδειγμα | 12 |
| 7.1.20 | Παράδειγμα | 12 |

| | |
|--|----|
| Παραδείγματα [$\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 x^2}$] | 12 |
| 7.1.21 Παράδειγμα | 12 |
| 7.1.22 Παράδειγμα | 12 |
| 7.1.23 Παράδειγμα | 12 |
| 7.1.24 Παράδειγμα | 12 |
| 7.1.25 Παράδειγμα | 12 |
| 7.1.26 Παράδειγμα | 12 |
| 7.1.27 Παράδειγμα | 12 |
| 7.1.28 Παράδειγμα | 13 |
| 7.1.29 Παράδειγμα | 13 |
| 7.1.30 Παράδειγμα | 13 |
| 7.1.31 Παράδειγμα | 13 |
| 7.1.32 Παράδειγμα | 13 |
| 7.1.33 Παράδειγμα | 13 |
| 7.1.34 Παράδειγμα | 13 |
| 7.1.35 Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα | 13 |
| 7.1.36 Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα | 13 |
| Παρατήρηση | 13 |
| 7.1.37 Παράδειγμα | 14 |
| 7.1.38 Παράδειγμα | 14 |
| 7.1.39 Παράδειγμα | 14 |
| 7.1.40 Παράδειγμα | 14 |
| 7.2 Ολοκληρώματα με Τριώνυμο στο Ριζικό | 14 |
| Παραδείγματα | 14 |
| 7.2.1 Παράδειγμα | 14 |
| 7.2.2 Παράδειγμα | 15 |
| 7.2.3 Παράδειγμα | 15 |
| 7.2.4 Παράδειγμα | 15 |

| | | |
|--------|---|----|
| 7.2.5 | Παράδειγμα | 15 |
| 7.2.6 | Παράδειγμα | 15 |
| 7.2.7 | Παράδειγμα | 15 |
| 7.2.8 | Παράδειγμα | 15 |
| 7.2.9 | Παράδειγμα | 15 |
| 7.2.10 | Παράδειγμα | 15 |
| 7.2.11 | Παράδειγμα | 16 |
| 7.2.12 | Παράδειγμα | 16 |
| 7.2.13 | Παράδειγμα | 16 |
| 7.2.14 | Παράδειγμα | 16 |
| 7.2.15 | Παράδειγμα | 16 |
| 7.2.16 | Παράδειγμα | 16 |
| 7.2.17 | Παράδειγμα | 16 |
| 7.2.18 | Παράδειγμα | 17 |
| 7.2.19 | Παράδειγμα | 17 |
| 7.2.20 | Παράδειγμα | 17 |
| 7.2.21 | Παράδειγμα | 17 |
| 7.2.22 | Παράδειγμα | 17 |
| 7.3 | Ειδική Περίπτωση Ι | 17 |
| 7.3.1 | Παράδειγμα | 18 |
| 7.3.2 | Παράδειγμα | 18 |
| 7.4 | Ειδική Περίπτωση ΙΙ | 18 |
| 7.4.1 | Παράδειγμα | 18 |
| 7.5 | Ολοκλήρωμα με Τριώνυμο στον Παρονομαστή | 18 |
| | Παραδείγματα | 19 |
| 7.5.1 | Παράδειγμα | 19 |
| 7.5.2 | Παράδειγμα | 19 |
| 7.5.3 | Παράδειγμα | 19 |
| 7.5.4 | Παράδειγμα | 19 |

| | | |
|--------|------------------|----|
| 7.5.5 | Παράδειγμα | 20 |
| 7.5.6 | Παράδειγμα | 20 |
| 7.5.7 | Παράδειγμα | 20 |
| 7.5.8 | Παράδειγμα | 20 |
| 7.5.9 | Παράδειγμα | 20 |
| 7.5.10 | Παράδειγμα | 20 |
| 7.5.11 | Παράδειγμα | 20 |
| 7.5.12 | Παράδειγμα | 20 |
| 7.5.13 | Παράδειγμα | 20 |
| 7.5.14 | Παράδειγμα | 20 |
| 7.5.15 | Παράδειγμα | 21 |
| 7.5.16 | Παράδειγμα | 21 |
| 7.5.17 | Παράδειγμα | 21 |
| 7.5.18 | Παράδειγμα | 21 |
| 7.5.19 | Παράδειγμα | 21 |
| 7.5.20 | Παράδειγμα | 21 |
| 7.5.21 | Παράδειγμα | 21 |
| 7.5.22 | Παράδειγμα | 21 |
| 7.5.23 | Παράδειγμα | 21 |
| 7.5.24 | Παράδειγμα | 21 |
| 7.5.25 | Παράδειγμα | 21 |
| 7.5.26 | Παράδειγμα | 22 |
| 7.5.27 | Παράδειγμα | 22 |
| 7.5.28 | Παράδειγμα | 22 |
| 7.5.29 | Παράδειγμα | 22 |
| 7.5.30 | Παράδειγμα | 22 |
| 7.5.31 | Παράδειγμα | 22 |
| 7.5.32 | Παράδειγμα | 22 |
| 7.5.33 | Παράδειγμα | 22 |

| | | |
|--------|------------------|----|
| 7.5.34 | Παράδειγμα | 22 |
| 7.5.35 | Παράδειγμα | 22 |
| 7.5.36 | Παράδειγμα | 22 |
| 7.5.37 | Παράδειγμα | 23 |
| 7.5.38 | Παράδειγμα | 23 |
| 7.5.39 | Παράδειγμα | 23 |
| 7.5.40 | Παράδειγμα | 23 |
| 7.5.41 | Παράδειγμα | 23 |

Γ.07 Ολοκληρώματα με Ριζικά

7.1 Ολοκληρώματα με Διώνυμο στο Ριζικό

Σε κάθε ολοκλήρωμα που περιέχει ριζικό θέτουμε, κατ' αρχήν, το ριζικό ίσο με t εάν απαλείφεται η παλιά μεταβλητή και το ριζικό γίνεται απλούστερο.

Όταν στο ριζικό εμφανίζονται διώνυμα, έχουμε δηλαδή τις μορφές

$$\begin{array}{lll} 1. \int f(x)\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 x^2} \, dx & 2. \int \frac{f(x)}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 x^2}} \, dx & 3. \int \frac{dx}{f(x)\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 x^2}} \\ 4. \int f(x)\sqrt{\beta^2 x^2 - \alpha^2} \, dx & 5. \int \frac{f(x) \, dx}{\sqrt{\beta^2 x^2 - \alpha^2}} & 6. \int \frac{dx}{f(x)\sqrt{\beta^2 x^2 - \alpha^2}} \\ 7. \int f(x)\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 x^2} \, dx & 8. \int \frac{f(x) \, dx}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 x^2}} & 9. \int \frac{dx}{f(x)\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 x^2}} \end{array}$$

Ισχύουν τα εξής:

1. Ολοκληρώματα της μορφής **1, 2, 3** όπου εμφανίζεται στο υπόριζο η παράσταση $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 x}$ και τα ολοκληρώματα της μορφής **4, 5, 6**, όπου εμφανίζεται στο υπόριζο η παράσταση $\sqrt{\beta^2 x^2 - \alpha^2}$ ολοκληρώνονται, συνήθως, εάν θέσουμε

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 x^2} \quad \text{ή} \quad \sqrt{\beta^2 x^2 - \alpha^2} = t - \beta x$$

2. Ολοκληρώματα της μορφής **7, 8, 9** όπου εμφανίζεται στο υπόριζο η παράσταση $\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 x^2}$ ολοκληρώνονται, συνήθως, εάν θέσουμε

$$x = \frac{\alpha}{\beta} \sin \omega, \quad \text{ή} \quad x = \frac{\beta}{\alpha} \cos \omega$$

3. Τα ολοκληρώματα **1, 2, 3** ολοκληρώνονται επίσης, εάν θέσουμε

$$x = \frac{\alpha}{\beta} \tan \omega$$

4. Τα ολοκληρώματα **4, 5, 6**, ολοκληρώνονται, επίσης, εάν θέσουμε

$$x = \frac{\alpha}{\beta \sin \omega} \quad \text{ή} \quad x = \frac{\alpha}{\beta \cdot \cos \omega}$$

5. Τα ολοκληρώματα **7, 8, 9**, όταν $f(x)=1$ ολοκληρώνονται, εάν θέσουμε $x = \frac{\alpha}{\beta} \cdot t$

Παρατήρηση I

Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι οι παραστάσεις που εμφανίζονται στην υπόρριζο είναι οι εξής τρεις:

$$\alpha^2 + \beta^2 x^2 \qquad \alpha^2 - \beta^2 x^2 \qquad \beta^2 x^2 - \alpha^2$$

Αντί των παραπάνω κανόνων μπορούμε να θεωρήσουμε τους τριγωνομετρικούς μετασχηματισμούς:

$$\text{Για } \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 x^2} \qquad \text{θέτουμε} \qquad x = \frac{\alpha}{\beta} \tan u$$

$$\text{Για } \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 x^2} \qquad \text{θέτουμε} \qquad x = \frac{\alpha}{\beta} \sin u$$

$$\text{Για } \sqrt{\beta^2 x^2 - \alpha^2} \qquad \text{θέτουμε}$$

$$x = \frac{\alpha}{\beta} \sec u = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{1}{\cos u}$$

που διώχνουν το ριζικό. Πράγματι έχουμε:

- Παράσταση $\alpha^2 + \beta^2 x^2$:

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 x^2 &\rightarrow \alpha^2 + \beta^2 \cdot \frac{\alpha^2}{\beta^2} \tan^2 u \rightarrow \alpha^2 (1 + \tan^2 u) \rightarrow \alpha^2 \left(\frac{\cos^2 u}{\cos^2 u} + \frac{\sin^2 u}{\cos^2 u} \right) \\ &\rightarrow \alpha^2 \left(\frac{\cos^2 u + \sin^2 u}{\cos^2 u} \right) \rightarrow \alpha^2 \left(\frac{1}{\cos^2 u} \right) \text{ που βγαίνει από το ριζικό ως } \frac{\alpha}{\cos u}. \end{aligned}$$

- Παράσταση $\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 x^2}$: $\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 x^2} \rightarrow \alpha^2 - \beta^2 \cdot \frac{\alpha^2}{\beta^2} \sin^2 u$

$$\begin{aligned} &\rightarrow \alpha^2 (1 - \sin^2 u) \rightarrow \alpha^2 \cdot \cos^2 u \qquad \text{που βγαίνει έξω από το ριζικό ως} \\ &\alpha \cos u. \end{aligned}$$

- Παράσταση $\beta^2 x^2 - \alpha^2$:

$$\begin{aligned} \beta^2 x^2 - \alpha^2 &\rightarrow \beta^2 \frac{\alpha^2}{\beta^2} \sec^2 u - \alpha^2 \rightarrow \alpha^2 \sec^2 u - \alpha^2 \rightarrow \alpha^2 \left(\frac{1}{\cos^2 u} - \frac{\cos^2 u}{\cos^2 u} \right) \rightarrow \alpha^2 \left(\frac{1 - \cos^2 u}{\cos^2 u} \right) \\ &\rightarrow \alpha^2 \frac{\sin^2 u}{\cos^2 u} \text{ που βγαίνει έξω από το ριζικό ως } \alpha \tan u. \end{aligned}$$

Παρατήρηση II

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζονται και τα ολοκληρώματα της μορφής

$$1. I = \int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - b^2 x^2)}}, \quad 2. I = \int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 + b^2 x^2)}} \quad 3. I = \int \frac{dx}{\sqrt{(b^2 x^2 - a^2)}}$$

Παραδείγματα [$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 x^2}$]

7.1.1 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{dx}{4x^2 + 9} = \frac{1}{2} \int \frac{d(2x)}{\sqrt{(2x)^2 + 3^2}} = \frac{1}{2} \ln(2x + \sqrt{4x^2 + 9}) + C$

7.1.2 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \sqrt{x^2 + 5} dx$

7.1.3 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{9 + 4x^2}}$

7.1.4 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4 + x^2}}$

7.1.5 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \sqrt{\alpha^2 + x^2} dx$

7.1.6 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2 + 9}}$

7.1.7 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \sqrt{1 + 3x^2} \cdot dx$

7.1.8 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{(x+1)^2 + 1}}$

7.1.9 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{x^2 - x + 1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}} dx$

Παραδείγματα [$\sqrt{\beta^2 x^2 - \alpha^2}$]

7.1.10 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

7.1.11 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-7}}$

7.1.12 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} dx$

7.1.13 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$

7.1.14 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \sqrt{x^2-9} dx$

7.1.15 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-9}}$

7.1.16 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-25}}$

7.1.17 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

7.1.18 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \sqrt{x^2-36} dx$

7.1.19 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 - 2}}$

7.1.20 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx$

Παραδείγματα [$\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 x^2}$]

7.1.21 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2x - x^2}}$

7.1.22 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{\sqrt{9 - 4x^2}}{x} dx$

7.1.23 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2} dx$

7.1.24 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}$

7.1.25 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{x dx}{\sqrt{4 - x^2}}$

7.1.26 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

7.1.27 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{(x + 3)}{\sqrt{1 - x^2}} dx$

7.1.28 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^6}}$

7.1.29 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{x+2}{\sqrt{x+9}} dx$

7.1.30 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \sqrt{25-x^2} dx$

7.1.31 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \sqrt{3-4x^2} dx$

7.1.32 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int 3x\sqrt{1-2x^2} dx$

7.1.33 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \sqrt{3-4x^2} dx$

7.1.34 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{xdx}{\sqrt{4x-x^2}}$

7.1.35 Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} dx$

7.1.36 Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$

Παρατήρηση

Εχουμε αναφέρει ότι οι μορφές

$$1. I = \int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - b^2x^2)}}, \quad 2. I = \int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 + b^2x^2)}} \quad 3. I = \int \frac{dx}{\sqrt{(b^2x^2 - a^2)}}$$

Υπολογίζονται με τον ίδιο τρόπο. Πράγματι

7.1.37 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - b^2x^2)^3}}$

7.1.38 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{xdx}{(x^2 + 1)^{\frac{2}{3}}}$

7.1.39 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$

7.1.40 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{(16 - 9x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^6} dx$

7.2 Ολοκληρώματα με Τριώνυμο στο Ριζικό

Είναι ολοκληρώματα όπου στο ριζικό εμφανίζεται τριώνυμο δηλαδή οι μορφές

$$1. \int f(x)\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} dx \quad 2. \int \frac{f(x)dx}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}} \quad 3. \int \frac{dx}{f(x)\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}}$$

Ολοκληρώνονται ως εξής

1. Εάν $\alpha > 0$ θέτω $\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} = t - \alpha \cdot x$

2. Εάν $\alpha < 0$ τότε προσπαθούμε να κατασκευάσουμε μέσα στο ριζικό ένα όρο που να είναι τέλει τετράγωνο και συνεχίζουμε με τριγωνομετρικούς μετασχηματισμούς.

Παραδείγματα

7.2.1 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \sqrt{7 + 6x - x^2} dx$

7.2.2 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \sqrt{x^2 - 6x - 7} \, dx$

7.2.3 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{x \, dx}{\sqrt{-x^2 + 4x + 4}}$

7.2.4 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 3x + 5}}$

7.2.5 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{(x+1) \, dx}{\sqrt{-x^2 - x + 1}}$

7.2.6 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$

7.2.7 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{dx}{(4x^2 - 24x + 27)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{dx}{(4(x-3)^2 - 9)^{\frac{3}{2}}}$

7.2.8 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}} \, dx$

7.2.9 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{dx}{\sqrt{4 - (x+2)^2}}$

7.2.10 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{dx}{\sqrt{20+8x-x^2}}$

7.2.11 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{dx}{\sqrt{28-12x-x^2}}$

7.2.12 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \sqrt{3-2x-x^2} dx$

7.2.13 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{x+3}{\sqrt{5-4x-x^2}} dx$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x+3}{\sqrt{5-4x-x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{-2x-6}{\sqrt{5-4x-x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{(-2x-4)-2}{\sqrt{5-4x-x^2}} dx \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{-2x-4}{\sqrt{5-4x-x^2}} dx + \int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{-2x-4}{\sqrt{5-4x-x^2}} dx + \int \frac{dx}{\sqrt{9-(x+2)^2}} \\ &= -\sqrt{5-4x-x^2} + \sin^{-1}\left(\frac{x+2}{3}\right) \end{aligned}$$

7.2.14 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \sqrt{4x^2-4x+5} dx$

7.2.15 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$

7.2.16 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{x+2}{\sqrt{4x-x^2}} dx$

7.2.17 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{dx}{\sqrt{4x+x^2}}$

7.2.18 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \sqrt{3-2x-x^2} dx$

7.2.19 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x-3}} dx$

7.2.20 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+5}}$

7.2.21 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \sqrt{ax-x^2} dx$

7.2.22 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{xdx}{\sqrt{(5-4x-x^2)^3}}$

7.3 Ειδική Περίπτωση I

Εάν έχουμε ριζικά των μορφών

$$\sqrt{(x-a)(x-b)} \quad \text{ή} \quad \sqrt{(a-x)(b-x)}, \quad (a \neq b), \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

Θέτουμε, αντίστοιχα

$$\sqrt{(x-a)(x-b)} = t(x-a) \quad \text{ή} \quad t(x-a)$$

$$\sqrt{(a-x)(b-x)} = t(a-x) \quad \text{ή} \quad t(x-a)$$

Πράγματι, αν θέσω

$$\sqrt{(x-a)(x-b)} = t(x-a) \quad (\text{ή} \quad t(x-b))$$

θα έχω

$$(x-a)(x-b) = t^2(x-a)^2$$

Από όπου $\frac{x-a}{x-b} = t^2 \Rightarrow$ και

$$x = \frac{at^2 - b}{t^2 - 1}, dx = 2 \frac{(b-a)}{(t^2 - 1)^2} t dt, t = \sqrt{\frac{x-b}{x-a}}, y = \sqrt{(x-a)(x-b)} = t \frac{a-b}{t^2 - 1}$$

7.3.1 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{(x-a)(x-b)}}$

7.3.2 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{x dx}{(5 - 4x - x^2)^{\frac{3}{2}}}$

7.4 Ειδική Περίπτωση II

Αφορά στην μορφή $\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$. Έχουμε δύο δυνατότητες.

I. Επιλέγουμε τον μετασχηματισμό $\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$, ή

II. Μετατρέπουμε σε $\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}} = \frac{ax+b}{\sqrt{(cx+d)(ax+b)}}$ οπότε είμαστε στην Ειδική Περίπτωση I (7.3)

7.4.1 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \sqrt{\frac{x+1}{x-2}} dx$

7.5 Ολοκλήρωμα με Τριώνυμο στον Παρονομαστή

Ένα ολοκλήρωμα που περιέχει την έκφραση

$$ax^2 + bx + c$$

μπορεί να απλοποιηθεί, αν βρούμε ένα τέλειο τετράγωνο και κάνουμε κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής. Η απλοποίηση προκύπτει από την ταυτότητα

$$ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right]$$

Η παράσταση αυτή με τις επί πλέον αντικαταστάσεις

$$u = x + b/2a \quad \text{και} \quad q = \frac{(4ac - b^2)}{4a^2}$$

παιρνει την μορφή

$$ax^2 + bx + c = a[u^2 + q]$$

Το πρόσημο της q παίζει σημαντικό ρόλο στην λύση του ολοκληρώματος. Πράγματι

1. Εάν $q > 0$ θέτω $q = \omega^2$ και έχω

$$I = \int \frac{d\omega}{u^2 + \omega^2} = \frac{1}{\omega} \int \frac{du^2}{v^2 + 1} = \frac{1}{\omega} \tan^{-1} v + c = \frac{1}{\omega} \tan^{-1} \frac{u}{\omega} + c$$

ή

$$I = \frac{1}{a\sqrt{q}} \tan^{-1} \frac{x + b/2a}{\sqrt{q}} + c, \quad q > 0$$

2. Εάν $q < 0$ θέτω $-q = \omega^2$ και, με ανάλυση σε απλά κλάσματα, έχω

$$I = \int \frac{du}{u^2 - \omega^2} = \frac{1}{2\omega} \left(\int \frac{du}{u - \omega} - \int \frac{du}{u + \omega} \right) = \frac{1}{2\omega} \ln \left| \frac{u - \omega}{u + \omega} \right| + c$$

Τελικά

$$I = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{2a\sqrt{-q}} \ln \left| \frac{x + \frac{b}{2a} - \sqrt{-q}}{x + \frac{b}{2a} + \sqrt{-q}} \right|, \quad q < 0$$

Παραδείγματα

7.5.1 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$

7.5.2 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{dx}{4x^2 + 4x - 3}$

7.5.3 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$

7.5.4 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{dx}{x^2 + x + 1}$

7.5.5 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{dx}{x^2 + 10x + 30}$

7.5.6 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{dx}{2x^2 + 2x + 5}$

7.5.7 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{x+1}{x^2 - 4x + 8} dx$

7.5.8 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{dx}{x^2 + 6x + 8}$

7.5.9 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{2x+3}{9x^2 - 12x + 8} dx$

7.5.10 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{dx}{2x^2 - 12x + 5}$

7.5.11 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{2x+3}{9x^2 - 12x + 8} dx$

7.5.12 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} dx$

7.5.13 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{dx}{(4x^2 - 24x - 9)^{3/2}}$

7.5.14 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{dx}{\sqrt{(5+2x+x^2)^3}}$

7.5.15 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{dx}{(1 + \sqrt{x})\sqrt{x - x^2}}$

7.5.16 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{dx}{2 - \sqrt{3x}}$ με την αντικατάσταση $\sqrt{3x} = 2 \sin^2 \theta$

7.5.17 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{dx}{(x+1)^2 \sqrt{x^2 + 2x + 2}}$

7.5.18 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \sqrt{(x^2 - 1)^3} dx$

7.5.19 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx$

7.5.20 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{3x^2 + 2x - 1}}$

7.5.21 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{xdx}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}}$

7.5.22 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{dx}{x^2 - a^2}$

7.5.23 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{dx}{x^2 + a^2}$

7.5.24 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{dx}{4x^2 + 4x - \frac{21}{4}}$

7.5.25 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{2x-1}{\sqrt{9x^2 + 16}} dx$

7.5.26 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{2x+7}{x^2+2x+5} dx$

7.5.27 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{dx}{(x^2+4)^2}$

7.5.28 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int x\sqrt{2x-x^2} dx$

7.5.29 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{x^5}{\sqrt{1-2x^3}} dx$

7.5.30 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{x+1}{x^2-3x+7} dx$

7.5.31 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \sqrt{\frac{x}{1+\sqrt{x^3}}} dx$

7.5.32 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}} dx$

7.5.33 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{dx}{x^2-a^2}$

7.5.34 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{\ln x}{x\sqrt{1-4\ln x-\ln^2 x}} dx$

7.5.35 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{6+x-x^2}}$

7.5.36 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{\sqrt[3]{x}+1}} dx$

7.5.37 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$

7.5.38 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} dx$

7.5.39 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx$

7.5.40 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{\sqrt{9-4x^2}}{x} dx$

7.5.41 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

Σημειώματα

Α) Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το υλικό της Μαθηματικής Ανάλυσης προέρχεται από τις σημειώσεις του Επίκουρου Καθηγητή κ. Γεωργίου Ν. Μπροδήμα για τις ανάγκες διδασκαλίας του ομώνυμου μαθήματος στο Τμήμα Φυσικής του Πανεπιστημίου Πατρών .

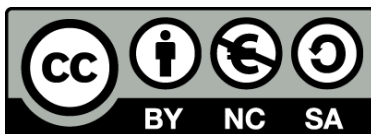
Β) Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Γεώργιος Ν. Μπροδήμας. «Μαθηματική Ανάλυση. Ενότητα Γ.07: Ολοκληρώματα με Ριζικά». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

<https://eclass.upatras.gr/courses /PHY1912/>

Γ) Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/> Ως Μη Εμπορική ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Δ) Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- ✓ το Σημείωμα Αναφοράς
- ✓ το Σημείωμα Αδειοδότησης
- ✓ τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- ✓ το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφ' όσον υπάρχει).