



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

Τίτλος Μαθήματος: Μαθηματική Ανάλυση

Ενότητα Γ. Ολοκληρωτικός Λογισμός

Κεφάλαιο Γ.06: Τριγωνομετρικά Ολοκληρώματα

Όνομα Καθηγητή: Γεώργιος Ν. Μπροδήμας

Τμήμα Φυσικής

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά
μαθήματα **ΠΠ**

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Πίνακας Περιεχομένων

Γ.06	Τριγωνομετρικά Ολοκληρώματα	8
6.1	Τριγωνομετρικά Ολοκληρώματα - Πρώτη Μορφή	8
6.1.1	Γενική περίπτωση:	8
	Πρώτη Μορφή – Γενική Περίπτωση	8
6.1.1.1	Παράδειγμα	8
6.1.1.2	Παράδειγμα	8
6.1.2	Ειδικές περιπτώσεις	8
	Πρώτη Μορφή – Ειδική Περίπτωση Ι.....	9
6.1.2.1	Παράδειγμα	9
6.1.2.2	Παράδειγμα	9
6.1.2.3	Παράδειγμα	9
6.1.2.4	Παράδειγμα	9
6.1.2.5	Παράδειγμα	9
6.1.2.6	Παράδειγμα	9
6.1.2.7	Παράδειγμα	9
	Πρώτη Μορφή – Ειδική Περίπτωση ΙΙ.....	10
6.1.2.8	Παράδειγμα	10
6.1.2.9	Παράδειγμα	10
6.1.2.10	Παράδειγμα	10
	Πρώτη Μορφή – Ειδική Περίπτωση ΙΙΙ.....	10
6.1.2.11	Παράδειγμα	10
6.1.2.12	Παράδειγμα	10
6.1.2.13	Παράδειγμα	10
6.1.2.14	Παράδειγμα	10
6.1.2.15	Παράδειγμα	10
6.1.2.16	Παράδειγμα	10
6.1.2.17	Παράδειγμα	11

6.1.2.18	Παράδειγμα	11
6.1.2.19	Παράδειγμα	11
6.1.2.20	Παράδειγμα	11
6.1.2.21	Παράδειγμα	11
6.1.2.22	Παράδειγμα	11
6.1.2.23	Παράδειγμα	11
6.1.2.24	Παράδειγμα	11
6.1.2.25	Παράδειγμα	11
6.1.2.26	Παράδειγμα	11
6.1.2.27	Παράδειγμα	12
6.1.2.28	Παράδειγμα	12
6.1.2.29	Παράδειγμα	12
6.1.2.30	Παράδειγμα	12
6.1.2.31	Παράδειγμα	12
6.1.2.32	Παράδειγμα	12
6.1.2.33	Παράδειγμα	12
6.1.2.34	Παράδειγμα	12
6.1.2.35	Παράδειγμα	12
6.2	Τριγωνομετρικά Ολοκληρώματα- Δεύτερη μορφή	13
6.2.1	Περίπτωση Ι.....	13
6.2.1.1	Παράδειγμα	13
6.2.1.2	Παράδειγμα	13
6.2.1.3	Παράδειγμα	13
6.2.1.4	Παράδειγμα	13
6.2.1.5	Παράδειγμα	13
6.2.1.6	Παράδειγμα	13
6.2.1.7	Παράδειγμα	13
6.2.1.8	Παράδειγμα	14
6.2.1.9	Παράδειγμα	14

6.2.1.10	Παράδειγμα	14
6.2.1.11	Παράδειγμα	14
6.2.1.12	Παράδειγμα	14
6.2.1.13	Παράδειγμα	14
6.2.1.14	Παράδειγμα	14
6.2.1.15	Παράδειγμα	14
6.2.1.16	Παράδειγμα	14
6.2.1.17	Πρόβλημα.....	14
6.2.2	Περίπτωση II.....	15
6.2.2.1	Παράδειγμα	15
6.2.2.2	Παράδειγμα	15
6.2.2.3	Παράδειγμα	15
6.2.2.4	Παράδειγμα	15
6.2.2.5	Παράδειγμα	15
6.2.2.6	Παράδειγμα	15
6.2.2.7	Πρόβλημα.....	15
6.2.3	Περίπτωση III.....	16
6.2.4	Περίπτωση IV.....	16
6.2.4.1	Παράδειγμα	16
6.2.5	Περίπτωση V	16
6.2.5.1	Παράδειγμα	17
6.2.5.2	Παράδειγμα	17
6.2.5.3	Παράδειγμα	17
6.2.5.4	Παράδειγμα	17
6.2.5.5	Παράδειγμα	17
6.2.5.6	Παράδειγμα	17
6.2.5.7	Παράδειγμα	17
6.2.5.8	Παράδειγμα	17
6.2.5.9	Παράδειγμα	17

6.2.5.10	Παράδειγμα	17
6.2.5.11	Παράδειγμα	18
6.2.5.12	Παράδειγμα	18
6.2.5.13	Παράδειγμα	18
6.2.5.14	Παράδειγμα	18
6.2.5.15	Παράδειγμα	18
6.2.5.16	Παράδειγμα	18
6.2.5.17	Παράδειγμα	18
6.2.5.18	Παράδειγμα	18
6.2.5.19	Παράδειγμα	18
6.2.5.20	Παράδειγμα	18
6.2.5.21	Παράδειγμα	18
6.3	Τριγωνομετρικά Ολοκληρώματα - Τρίτη Μορφή.....	19
6.3.1	Παράδειγμα	19
6.3.2	Παράδειγμα	19
6.3.3	Παράδειγμα	19
6.3.4	Παράδειγμα	19
6.4	Τριγωνομετρικά Ολοκληρώματα - Τέταρτη Μορφή.....	20
	Παρατήρηση.....	20
	Παραδείγματα	20
6.4.1	Παράδειγμα	20
6.4.2	Παράδειγμα	20
6.4.3	Παράδειγμα	20
6.4.4	Παράδειγμα	20
6.4.5	Παράδειγμα	20
6.4.6	Παράδειγμα	21
6.4.7	Παράδειγμα	21
6.4.8	Παράδειγμα	21
6.4.9	Παράδειγμα	21

6.4.10	Παράδειγμα	21
6.4.11	Παράδειγμα	21
6.4.12	Παράδειγμα	21
6.4.13	Παράδειγμα	21
6.4.14	Παράδειγμα	21
6.5	Τριγωνομετρικά Ολοκληρώματα Πέμπτη Μορφή	22
6.5.1	Περίπτωση Ι.....	22
6.5.2	Περίπτωση ΙΙ.....	22
6.5.3	Περίπτωση ΙΙΙ.....	22

Γ.06 Τριγωνομετρικά Ολοκληρώματα

6.1 Τριγωνομετρικά Ολοκληρώματα - Πρώτη Μορφή

Πρόκειται για ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων τριγωνομετρικών αριθμών, που τις συμβολίζουμε με $R(\sin x, \cos x)$, και των οποίων ο παρονομαστής είναι άθροισμα τριγωνομετρικών αριθμών.

6.1.1 Γενική περίπτωση:

$$\text{Θέτουμε} \quad \tan \frac{x}{2} = \omega \rightarrow \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \frac{dx}{2} = d\omega \rightarrow \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos x} \frac{dx}{2} = d\omega$$

$$\text{επειδή } \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 \quad \text{έχουμε } \frac{dx}{1 + \cos x} = d\omega.$$

$$\text{Επειδή όμως} \quad \cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \omega^2}{1 + \omega^2}, \quad \sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2\omega}{1 + \omega^2}$$

$$\text{Έχουμε } \frac{dx}{1 + \frac{1 - \omega^2}{1 + \omega^2}} = d\omega \rightarrow \left[\frac{1 + \omega^2 + 1 - \omega^2}{1 + \omega^2} \right] d\omega = dx. \quad \text{Τελικά} \quad dx = \frac{2}{1 + \omega^2} d\omega$$

Πρώτη Μορφή - Γενική Περίπτωση

6.1.1.1 Παράδειγμα

$$\text{Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα } I = \int \frac{dx}{5 + 4 \cos x}$$

6.1.1.2 Παράδειγμα

$$\text{Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα } I = \int \frac{\cos^2 x + \cos x + 1}{\cos x + 1} dx$$

6.1.2 Ειδικές περιπτώσεις

(i) Αν η συνάρτηση R είναι περιττή ως προς $\sin x$, αν δηλαδή ισχύει

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x) \quad \text{τότε επιλέγουμε τον μετασχηματισμό } \cos x = \omega. \text{ Έχουμε:}$$

$$dx = -\frac{d\omega}{\sqrt{1 - \omega^2}} \quad \text{καθώς και } \sin x = \sqrt{1 - \omega^2}.$$

(ii) Αν η συνάρτηση R είναι περιττή ως προς $\cos x$, ισχύει δηλαδή

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x) \quad \text{τότε επιλέγουμε τον μετασχηματισμό } \sin x = \omega \text{ και}$$

$$\text{έχουμε: } dx = \frac{d\omega}{\sqrt{1 - \omega^2}} \quad \text{και } \cos x = \sqrt{1 - \omega^2}.$$

(iii) Αν η συνάρτηση είναι άρτια ως προς $\sin x$ και $\cos x$, αν δηλαδή

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$$

τότε επιλέγουμε τον μετασχηματισμό $\tan x = \omega$ και έχουμε:

$$\tan x = \omega \rightarrow \frac{1}{\cos^2 x} dx = d\omega \rightarrow dx = \frac{d\omega}{1 + \omega^2}$$

όπου θεωρούμε γνωστά

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2}} \quad \sin x = \frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} = \frac{\omega}{\sqrt{1 + \omega^2}}$$

Πρώτη Μορφή - Ειδική Περίπτωση I

6.1.2.1 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{\cos x + 1}{3 \sin x + \sin^3 x} dx$

6.1.2.2 Παράδειγμα

6.1.2.3 Παράδειγμα

6.1.2.4 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{\sin x}{(1 - \cos x)^3} dx$

6.1.2.5 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{dx}{\sin x \cdot (2 \cos^2 x - 1)}$

6.1.2.6 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{\cos x}{2 + \sin x} dx$

6.1.2.7 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{\sin x \cdot \cos^4 x}{(1 + \cos^5 x)^5} dx$

Πρώτη Μορφή - Ειδική Περίπτωση II

6.1.2.8 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{dx}{1 + 3\cos^2 x}$

6.1.2.9 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{\cos^3 x + \cos^5 x}{\sin^2 x + \sin^4 x} \cdot dx$

6.1.2.10 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{\cos^3 x + \cos^5 x}{\sin^2 x + \sin^4 x} dx$

Πρώτη Μορφή - Ειδική Περίπτωση III

6.1.2.11 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{dx}{3\cos^2 x + 2\sin^2 x}$

6.1.2.12 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{dx}{a\sin^2 x + b\cos^2 x}$

6.1.2.13 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{1}{5\sin^2 x - 3\cos^2 x + 4} \cdot dx$

6.1.2.14 Παράδειγμα

6.1.2.15 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$

6.1.2.16 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{dx}{1 + \cos x}$

6.1.2.17 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{dx}{7 - 3\sin x + 6\cos x}$

6.1.2.18 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$

6.1.2.19 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x}$

6.1.2.20 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{\sin x \, dx}{(1 + \cos x)^2}$

6.1.2.21 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{\cos 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x} \, dx$

6.1.2.22 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{\sin 2x \, dx}{2 - \cos x}$

6.1.2.23 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} \, dx$

6.1.2.24 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{dx}{1 + \tan x}$

6.1.2.25 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{dx}{3\tan x + 2}$

6.1.2.26 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} \, dx$

6.1.2.27 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{\sin^2 x + \sin^4 x}{\cos x + \cos^3 x} dx$

6.1.2.28 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{3 \sin x + 2 \cos x}{2 \sin x + 3 \cos x} dx$

6.1.2.29 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{dx}{3 \sin^2 x + 5 \cos^2 x}$

6.1.2.30 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{dx}{\sin^2 x + 3 \sin x \cdot \cos x - \cos^2 x}$

6.1.2.31 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{dx}{(2 - \sin x)(3 - \sin x)}$

6.1.2.32 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{dx}{\sin^3 x + \cos^3 x}$

6.1.2.33 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{\sin^2 x \cdot \cos x}{\sin x + \cos x} dx$

6.1.2.34 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{2 \tan x + 3}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x} dx$

6.1.2.35 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int_0^{\pi} \frac{x \cdot \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$

6.2 Τριγωνομετρικά Ολοκληρώματα- Δεύτερη μορφή

6.2.1 Περίπτωση I

Είναι ολοκληρώματα με δυνάμεις και γινόμενα των \sin και \cos της μορφής

$$\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx \quad \text{όπου } n, \text{ ή } m \text{ είναι περιττό}$$

Έστω ότι περιττό είναι το n . Αν $n=1$ έχουμε

$$\int \sin^m x \cdot \cos x dx = \int \sin^m d \sin x = \frac{1}{m+1} \sin^{m+1} x + c$$

Αν $n>1$ τότε γράφουμε

$$\cos^n x = \cos^{n-1} x \cdot \cos x$$

όπου $n-1$ θα είναι άρτιο. Αυτό με την βοήθεια της ταυτότητας $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ μπορεί να γραφεί ως δυνάμεις του $\sin^2 x$ οπότε καταλήγουμε σε ολοκλήρωμα της μορφής

$$\int (\text{άθροισμα δυνάμεων του } x) \cdot \cos x \cdot dx$$

6.2.1.1 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \sin^2 x \cdot \cos^5 x dx$

6.2.1.2 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \cos^3 x \cdot \cos x \cdot dx$

6.2.1.3 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \cos^3 x \cdot \cos 2x \cdot dx$

6.2.1.4 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \cos^4 2x \cdot \sin^3 2x \cdot dx$

6.2.1.5 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \sin^3 x \cdot \cos^2 x \cdot dx$

6.2.1.6 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \sin^3 3x \cdot \cos^5 3x \cdot dx$

6.2.1.7 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \sin^2 x \cdot \cos^3 x \cdot dx$

6.2.1.8 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int \sin^5 x \cos x dx$

6.2.1.9 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \sin^5 x \cdot \cos^2 x \, dx$

6.2.1.10 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \sin^3 x \cdot \cos^4 x \, dx$

6.2.1.11 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \sin^3 x \cdot \cos^3 x \, dx$

6.2.1.12 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi/2} 35 \sin^4 x \cos^3 x \, dx$

6.2.1.13 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int \sin^4 x \cos^5 x \, dx$

6.2.1.14 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int \sin 2x \cos^2 2x \, dx$

6.2.1.15 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi/4} \cos^3 2\theta \sin 2\theta \, d\theta$

6.2.1.16 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi/2} \sin^2 2\theta \cos^3 2\theta \, d\theta$

6.2.1.17 Πρόβλημα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int \sin^2 x \cos^5 x \, dx$

6.2.2 Περίπτωση II

Περιλαμβάνει ολοκληρώματα της μορφής $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$ όπου τώρα τα n και m είναι άρτια.

Για την λύση τους βασίζομαστε στις ταυτότητες

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x, \quad \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x, \quad \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$$

6.2.2.1 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \sin^2 x \cos^2 x dx$

6.2.2.2 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \sin^4 x \cos^2 x dx$

6.2.2.3 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \sin^2 x \cdot \cos^4 x \cdot dx$

6.2.2.4 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \sin^4 x \cdot \cos^4 x \cdot dx$

6.2.2.5 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int_0^{2\pi} \sin^4 x \cdot \cos^2 x \cdot dx$

6.2.2.6 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int \sin^6 x \cos^2 x dx$

6.2.2.7 Πρόβλημα

Ποιο ολοκλήρωμα χρειάζεται περισσότερη δουλειά για να υπολογισθεί

$$\int \sin^{798} x \cos x dx \quad \text{ή} \quad \int \sin^4 x \cos^4 x dx$$

Εξηγείστε.

6.2.3 Περίπτωση III

Περιλαμβάνει μορφές

$$\int \sin^n x \cdot \cos^m x \cdot dx$$

όπου n και m είναι ρητοί. Εργαζόμαστε ως εξής:

1. αν ο m είναι ακέραιος περιττός τότε κάνουμε την αντικατάσταση $t = \cos x$
2. αν ο n είναι ακέραιος περιττός τότε κάνουμε την αντικατάσταση $t = \sin x$
3. αν $n+m$ είναι άρτιος τότε κάνουμε την αντικατάσταση $\tan x = t$ ή $\cos x = t$

6.2.4 Περίπτωση IV

Περιλαμβάνει τις μορφές

$$\alpha. \int \sin^m x \cdot dx, \quad \beta. \int \cos^m x \cdot dx, \quad m \text{ αρνητικός ακέραιος}$$

$\alpha.$ γράφουμε $I = \int \sin^m x \cdot dx = \int \frac{dx}{(\sin x)^{-m}} = \int \frac{dx}{\left(2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}\right)^{-m}}$ και εργαζόμαστε όπως στην

$\beta.$ μετασχηματίζουμε το \cos σε \sin γράφοντας $I = \int \cos^m x dx = \int \frac{dx}{\cos^{-m} x} = \int \frac{dx}{\sin^{-m} \left(x + \frac{\pi}{2}\right)}$

6.2.4.1 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{\cos^x}{\sqrt{\sin x}} dx$

6.2.5 Περίπτωση V

Περιλαμβάνει ολοκληρώματα της μορφής

$$1. \int \sin mx \cdot \cos nx dx \quad 2. \int \sin mx \cdot \sin nx dx \quad 3. \int \cos mx \cdot \cos nx dx$$

$\alpha.$ Εάν $m=n$ τότε με απλή αλλαγή της μεταβλητής από x σε mx ή nx το ολοκλήρωμα λύνεται εύκολα.

$\beta.$ Εάν $m \neq n$ τότε το ολοκλήρωμα λύνεται με την βοήθεια των τριγωνομετρικών ταυτοτήτων

$$\sin A \cdot \cos B = \frac{1}{2} \{ \sin(A - B) + \sin(A + B) \}$$

$$\sin A \cdot \sin B = \frac{1}{2} \{ \cos(A - B) - \cos(A + B) \}$$

$$\cos A \cdot \cos B = \frac{1}{2} \{ \cos(A - B) + \cos(A + B) \}$$

6.2.5.1 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_{-\pi}^{\pi} \sin 3x \sin 3x dx$

6.2.5.2 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi/2} \sin x \cos x dx$

6.2.5.3 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \sin 5x \cdot \sin 3x dx$

Εχουμε $I = \int \sin 5x \cdot \sin 3x dx = \frac{1}{2} \int \cos 2x dx - \frac{1}{2} \int \cos 8x dx = \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{16} \sin 8x + c$

6.2.5.4 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \sin 2x \cdot \cos 3x \cdot dx$

6.2.5.5 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi/2} \sin 2x \cos 3x dx$

6.2.5.6 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_{-\pi}^0 \sin 3x \cos 2x dx$

6.2.5.7 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \cos 3x \cdot \cos 2x \cdot dx$

6.2.5.8 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \sin 3x \cdot \sin 2x \cdot dx$

6.2.5.9 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi} \sin 4x \cos 3x dx$

6.2.5.10 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int_0^{2\pi} \sin mx \cdot \cos nx \cdot dx, m \neq n$

6.2.5.11 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int_0^{2\pi} \cos mx \cdot \cos nx \cdot dx$, $m \neq n$

6.2.5.12 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int_0^{2\pi} \sin mx \cdot \sin nx \cdot dx$, $m \neq n$

6.2.5.13 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \sin 5x \cdot \cos 2x \cdot dx$

6.2.5.14 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \sin ax \cdot \sin bx \cdot dx$

6.2.5.15 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \sin x \cdot \cos 2x \cdot dx$

6.2.5.16 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi/2} \cos x \cos 7x dx$

6.2.5.17 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi} \cos 3x \cos 4x dx$

6.2.5.18 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \cos 3x \cdot \cos 5x \cdot dx$

6.2.5.19 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \sin 5x \cdot \cos 4x \cdot dx$

6.2.5.20 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \sin 4x \cdot \cos 5x \cdot dx$

6.2.5.21 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int \sin 3x \cos 5x dx$

6.3 Τριγωνομετρικά Ολοκληρώματα - Τρίτη Μορφή

Περιλαμβάνει ολοκληρώματα της μορφής

$$1. \int \frac{\sin^{2n+1} x}{\cos^{2n} x} \, dx \quad \text{ή} \quad \int \frac{\cos^{2n+1} x}{\sin^{2n} x} \, dx$$

$$2. \int \frac{\sin^{2n} x}{\cos^{2n+1} x} \, dx \quad \text{ή} \quad \int \frac{\cos^{2n} x}{\sin^{2n+1} x} \, dx$$

Γενικά

$$3. \int \frac{\sin^k x}{\cos^\lambda x} \, dx \quad \text{ή} \quad \int \frac{\cos^\lambda x}{\sin^k x} \, dx, \quad k, \lambda \in \mathbb{N}$$

$$4. \int \frac{dx}{\text{τριγωνομετρικό γινόμενο}}$$

6.3.1 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} \cdot dx$

6.3.2 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{\sin^5 x}{\cos^8 x} \cdot dx$

6.3.3 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{\cos^4 x}{\sin^2 x} \cdot dx$

6.3.4 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{dx}{\cos x}$

6.4 Τριγωνομετρικά Ολοκληρώματα - Τέταρτη Μορφή

Περιλαμβάνει περιπτώσεις που αναφέρονται στην συνέχεια μαζί με τον μετασχηματισμό που κάνουμε για την λύση τους.

$$1. \int \sqrt{1 + \cos kx} \, dx \quad 1 + \cos kx = 2 \cos^2 \frac{kx}{2}$$

$$2. \int \sqrt{1 - \cos kx} \, dx \quad 1 - \cos kx = 2 \sin^2 \frac{kx}{2}$$

$$3. \int \sqrt{1 + \sin kx} \, dx \quad 1 + \sin kx = 1 + \cos \left(\frac{\pi}{2} - kx \right) = 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{kx}{2} \right)$$

$$4. \int \sqrt{1 - \sin kx} \, dx \quad 1 - \sin kx = 1 - \cos \left(\frac{\pi}{2} - kx \right) = 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{kx}{2} \right)$$

Παρατήρηση

Εχουμε $\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} = 1$ και $\sin kx = 2 \cos \frac{k}{2}x \cdot \sin \frac{k}{2}x$. Οπότε

$$1 \pm \sin kx = \cos^2 \frac{k}{2}x \pm 2 \cos \frac{k}{2}x \cdot \sin \frac{k}{2}x + \sin^2 \frac{k}{2}x = \left(\cos \frac{k}{2}x \pm \sin \frac{k}{2}x \right)^2$$

και το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int \sqrt{1 \pm \sin kx} \, dx = \int \left(\cos \frac{k}{2}x \pm \sin \frac{k}{2}x \right) dx = \int \cos \frac{k}{2}x \, dx \pm \int \sin \frac{k}{2}x \, dx$$

Παραδείγματα

6.4.1 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \sqrt{1 + \cos 5x} \, dx$

6.4.2 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \sqrt{1 - \cos 4x} \, dx$

6.4.3 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \sqrt{1 - \sin 4x} \, dx$

6.4.4 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \sqrt{1 - \sin 3x} \, dx$

6.4.5 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \sqrt{(1 + \cos x)^2 + \sin^2 x} \, dx$

6.4.6 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \cos 4x} \, dx$

6.4.7 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \, dx$

6.4.8 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \sin^2 t} \, dt$

6.4.9 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \tan^2 x} \, dx$

6.4.10 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi/2} \theta \sqrt{1 - \cos 2\theta} \, d\theta$

6.4.11 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} \, dx$

6.4.12 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \, d\theta$

6.4.13 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi/4} \sqrt{\sec^2 x - 1} \, dx$

6.4.14 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi} (1 - \cos^2 t)^{3/2} \, dt$

6.5 Τριγωνομετρικά Ολοκληρώματα Πέμπτη Μορφή

6.5.1 Περίπτωση I

Πρόκειται για ολοκληρώματα της μορφής

$$1. \int \tan^n x dx \quad 2. \int \cot^n x dx \quad 3. \int \sec^n x dx \quad 4. \int \csc^n x dx$$

1. Με αφετηρία τις σχέσεις $(\tan x)' = \sec^2 x$ και $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ γράφουμε

$$\tan^n x = \tan^{n-2} x \cdot \tan^2 x = \tan^{n-2} x (\sec^2 x - 1) = \tan^{n-2} x \cdot \sec^2 x - \tan^{n-2} x$$

που ολοκληρώνεται εύκολα.

2. Με αφετηρία τις σχέσεις $(\cot x)' = -\csc^2 x$ και $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$ γράφουμε

$$\cot^n x = \cot^{n-2} x \cot^2 x = \cot^{n-2} x (\csc^2 x - 1) = \cot^{n-2} x \csc^2 x - \cot^{n-2} x$$

που επίσης ολοκληρώνεται εύκολα.

6.5.2 Περίπτωση II

Πρόκειται για ολοκληρώματα της μορφής

$$\int \sec^n x dx \quad \int \csc^n x dx$$

1. Για άρτιο n , με την βοήθεια της σχέσης $\sec^2 x = \tan^2 x + 1$ γράφουμε

$$\sec^n x = \sec^{n-2} x \cdot \sec^2 x = (\tan^2 x + 1)^{\frac{n-2}{2}} \cdot \sec^2 x$$

ενώ για περιττά n κάνουμε ολοκλήρωση κατά μέρη.

2. Για άρτια n και με την βοήθεια της σχέσης $\csc^2 x = \cot^2 x + 1$ γράφουμε

$$\csc^n x = \csc^{n-2} x \cdot \csc^2 x = \csc^{n-2} x (\cot^2 x + 1)^{\frac{n-2}{2}} \csc^2 x$$

6.5.3 Περίπτωση III

Πρόκειται για ολοκληρώματα της μορφής

$$\int \tan^m x \cdot \sec^n x dx, \quad \int \cot^m x \cdot \csc^n x dx$$

- ♦ Για n άρτιο γράφουμε $\tan^m x \sec^n x = \tan^m x \sec^{n-2} x \sec^2 x$ και με την βοήθεια της σχέσης $\sec^2 x = \tan^2 x + 1$ εκφράζουμε την παράσταση σε όρους του $\tan^2 x$
- ♦ Για n και m περιττά γράφουμε

$$\tan^m x \cdot \sec^n x = \tan^{m-1} x \cdot \sec^{n-1} x \cdot \sec x \cdot \tan x$$

και εκφράζουμε το $\tan^{m-1} x$ σε όρους του $\sec^2 x$ με την βοήθεια της σχέσης

$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

- ♦ Για n περιττό και m άρτιο γράφουμε όλο το γινόμενο σε όρους του $\sec x$ και ολοκληρώνουμε κατά μέρη.

Σημειώματα

A) Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το υλικό της Μαθηματικής Ανάλυσης προέρχεται από τις σημειώσεις του Επίκουρου Καθηγητή κ. Γεωργίου Ν. Μπροδήμα για τις ανάγκες διδασκαλίας του ομώνυμου μαθήματος στο Τμήμα Φυσικής του Πανεπιστημίου Πατρών .

B) Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Γεώργιος Ν. Μπροδήμας. «Μαθηματική Ανάλυση. Ενότητα Γ.06: Τριγωνομετρικά Ολοκληρώματα». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <https://eclass.upatras.gr/courses /PHY1912/>

Γ) Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/> Ως Μη Εμπορική ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Δ) Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- ✓ το Σημείωμα Αναφοράς
- ✓ το Σημείωμα Αδειοδότησης
- ✓ τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- ✓ το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφ' όσον υπάρχει).