



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

Τίτλος Μαθήματος: Μαθηματική Ανάλυση

Ενότητα Γ. Ολοκληρωτικός Λογισμός

Κεφάλαιο Γ.05: Ολοκλήρωση Ρητών Συναρτήσεων

Όνομα Καθηγητή: Γεώργιος Ν. Μπροδήμας

Τμήμα Φυσικής

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά
μαθήματα **ΠΠ**

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Πίνακας Περιεχομένων

| | | |
|--------|--|---|
| Γ.05 | Ολοκλήρωση Ρητών Συναρτήσεων | 4 |
| 5.1 | Ολοκλήρωση Ρητής Συνάρτησης (ανάλυση σε απλά κλάσματα) | 4 |
| 5.1.1 | Παράδειγμα..... | 5 |
| 5.1.2 | Παράδειγμα..... | 5 |
| 5.1.3 | Παράδειγμα..... | 5 |
| 5.1.4 | Παράδειγμα..... | 5 |
| 5.1.5 | Παράδειγμα..... | 5 |
| 5.1.6 | Παράδειγμα..... | 5 |
| 5.1.7 | Παράδειγμα..... | 5 |
| 5.1.8 | Παράδειγμα..... | 5 |
| 5.1.9 | Παράδειγμα..... | 6 |
| 5.1.10 | Παράδειγμα..... | 6 |
| 5.1.11 | Παράδειγμα..... | 6 |
| 5.1.12 | Παράδειγμα..... | 6 |
| 5.1.13 | Παράδειγμα..... | 6 |
| 5.1.14 | Παράδειγμα..... | 6 |
| 5.1.15 | Παράδειγμα..... | 6 |
| 5.1.16 | Παράδειγμα..... | 6 |
| 5.1.17 | Παράδειγμα..... | 7 |
| 5.1.18 | Παράδειγμα..... | 7 |
| 5.1.19 | Παράδειγμα..... | 7 |
| 5.1.20 | Παράδειγμα..... | 7 |

Γ.05 Ολοκλήρωση Ρητών Συναρτήσεων

5.1 Ολοκλήρωση Ρητής Συνάρτησης (ανάλυση σε απλά κλάσματα)

Προκειμένου να ολοκληρώσουμε έκφραση της μορφής $P(x)/Q(x)$ όπου $P(x)$ και $Q(x)$ είναι πολυώνυμα που δεν περιέχουν κοινό παράγοντα, εργαζόμαστε ως ακολούθως.

1. Εάν ο βαθμός του πολυωνύμου $P(x)$ είναι μεγαλύτερος ή ίσος με τον βαθμό του πολυωνύμου $Q(x)$ κάνουμε την διαίρεση οπότε βρίσκουμε ένα πολυώνυμο συν μια έκφραση της μορφής $R(x)/Q(x)$ όπου, τώρα, ο βαθμός του πολυωνύμου $R(x)$ είναι μικρότερος από αυτόν του $Q(x)$.

Επομένως χρειάζεται να διερευνήσουμε μόνο την περίπτωση όπου ο βαθμός του πολυωνύμου $P(x)$ είναι μικρότερος του βαθμού του πολυωνύμου $Q(x)$.

2. Παραγοντοποιούμε τον παρονομαστή $Q(x)$ σε γραμμικούς και τετραγωνικούς όρους, δηλαδή σε παράγοντες της μορφής $(x-r)$ και ax^2+bx+c . Εάν $b^2-4ac > 0$ παραγοντοποιούμε.

3. Εάν ο παράγοντας $(x-r)^m$ υπάρχει μεταξύ των παραγόντων του παρονομαστή γράφουμε Ένα άθροισμα της μορφής

$$\frac{a_1}{(x-r)} + \frac{a_2}{(x-r)^2} + \frac{a_3}{(x-r)^3} + \dots + \frac{a_m}{(x-r)^m}$$

όπου a_1, a_2, \dots, a_m σταθερές. Κάνουμε το ίδιο για κάθε παράγοντα της μορφής αυτής, χρησιμοποιώντας σταθερές $b_1, b_2, \dots, c_1, c_2, \dots$ και προσθέτουμε τις παραστάσεις που παίρνουμε. Οι σταθερές θα προσδιορισθούν αργότερα.

4. Εάν ο παράγων $(ax^2+bx+c)^p$ υπάρχει στον παρονομαστή με $b^2-4ac < 0$ τότε γράφουμε ένα άθροισμα της μορφής

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \dots + \frac{A_p+B_p}{(ax^2+bx+c)^p}$$

Κάνουμε το ίδιο για κάθε παράγοντα της μορφής αυτής και προσθέτουμε τις παραστάσεις που παίρνουμε. Το άθροισμα αυτό το προσθέτουμε σε αυτό του βήματος 3. Οι σταθερές $A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots$ θα προσδιοριστούν αργότερα.

5. Εξισώνουμε τις εκφράσεις που παίρνουμε στα βήματα 3 και 4 με την $P(x)/Q(x)$. Πολλαπλασιάζουμε με το πολυώνυμο $Q(x)$ οπότε βρίσκουμε μια εξίσωση μεταξύ πολυωνύμων. Συγκρίνοντας τους συντελεστές των πολυωνύμων αυτών προκύπτουν εξισώσεις για τον προσδιορισμό των $a_1, a_2, \dots, A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots$ τις οποίες και λύνουμε.

Μερικές φορές οι σταθερές αυτές μπορεί να προσδιορισθούν με την βοήθεια κατάλληλης αντικατάστασης ή με την βοήθεια της διαφορίσης.

6. Ολοκληρώνουμε την παράσταση που παίρνουμε στο βήμα 5. με την βοήθεια των

$$\int \frac{dx}{(x-r)^j} = -\left[\frac{1}{(j-1)(x-r)^{j-1}} \right] + c, \quad j > 1 \quad \text{και} \quad \int \frac{dx}{x-r} = -\ln|x-r| + c$$

7. Οι όροι με τετραγωνικό παρονομαστή μπορούν να ολοκληρωθούν με κατάλληλους χειρισμούς Έτσι ώστε η παράγωγος του παρονομαστή να εμφανισθεί στον αριθμητή μαζί με συμπλήρωση του τετραγώνου.

5.1.1 Παράδειγμα

Να αναλυθεί σε απλά κλάσματα το $\frac{5x-13}{(x-3)(x-2)}$

5.1.2 Παράδειγμα

Να αναλυθεί σε απλά κλάσματα το $\frac{5x-7}{x^2-3x+2}$

5.1.3 Παράδειγμα

Να αναλυθεί σε απλά κλάσματα το $\frac{x+4}{(x+1)^2}$

5.1.4 Παράδειγμα

Να αναλυθεί σε απλά κλάσματα το $\frac{2x+2}{x^2-2x+1}$

5.1.5 Παράδειγμα

Να αναλυθεί σε απλά κλάσματα το $\frac{z+1}{z^2(z-1)}$

5.1.6 Παράδειγμα

Να αναλυθεί σε απλά κλάσματα το $\frac{z}{z^3-z^2-6z}$

5.1.7 Παράδειγμα

Να αναλυθεί σε απλά κλάσματα το $\frac{t^{2+8}}{t^2-5t+6}$

5.1.8 Παράδειγμα

Να αναλυθεί σε απλά κλάσματα το $\frac{t^4 + 9}{t^4 + 9t^2}$

5.1.9 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{dx}{1-x^2}$

5.1.10 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{dx}{x^2 + 2x}$

5.1.11 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{x+4}{x^2+5x-6} dx$

5.1.12 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{2x+1}{x^2-7x+12} dx$

5.1.13 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_4^8 \frac{y dy}{y^2 - 2y - 3}$

5.1.14 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_{1/2}^1 \frac{y+4}{y^2+y} dy$

5.1.15 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{dt}{t^3 + t^2 - 2t}$

5.1.16 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{x+3}{2x^3-8x} dx$

5.1.17 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{x^3 dx}{x^2 + 2x + 1}$

5.1.18 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^0 \frac{x^3 dx}{x^2 - 2x + 1}$

5.1.19 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{dx}{(x^2 - 1)^2}$

5.1.20 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{dx}{x^2 - 4}$

Σημειώματα

A) Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το υλικό της Μαθηματικής Ανάλυσης προέρχεται από τις σημειώσεις του Επίκουρου Καθηγητή κ. Γεωργίου Ν. Μπροδήμα για τις ανάγκες διδασκαλίας του ομώνυμου μαθήματος στο Τμήμα Φυσικής του Πανεπιστημίου Πατρών .

B) Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Γεώργιος Ν. Μπροδήμας. «Μαθηματική Ανάλυση. Ενότητα Γ.05: Ολοκλήρωση Ρητών Συναρτήσεων». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

<https://eclass.upatras.gr/courses/PHY1912/>

Γ) Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/> Ως Μη Εμπορική ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Δ) Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- ✓ το Σημείωμα Αναφοράς
- ✓ το Σημείωμα Αδειοδότησης
- ✓ τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- ✓ το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφ' όσον υπάρχει).