



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

Τίτλος Μαθήματος: Μαθηματική Ανάλυση

Ενότητα Γ. Ολοκληρωτικός Λογισμός

Κεφάλαιο Γ.04: Ολοκλήρωση με Αντικατάσταση

Όνομα Καθηγητή: Γεώργιος Ν. Μπροδήμας

Τμήμα Φυσικής

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά **ΠΠ**
μαθήματα

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Πίνακας Περιεχομένων

Γ.04	Ολοκλήρωση με Αντικατάσταση.....	4
4.1	Εισαγωγή.....	4
4.1.1	Παράδειγμα.....	4
4.1.2	Παράδειγμα.....	4
4.1.3	Παράδειγμα.....	4
4.1.4	Παράδειγμα.....	4
4.1.5	Παράδειγμα.....	4
4.1.6	Παράδειγμα.....	4
4.1.7	Παράδειγμα.....	4
4.2	Ολοκλήρωση με Αντικατάσταση και Αλλαγή Ορίων.....	5
4.2.1	Παράδειγμα.....	5
4.2.2	Παράδειγμα.....	5
4.2.3	Παράδειγμα.....	5
4.2.4	Παράδειγμα.....	5
4.2.5	Παράδειγμα.....	5
4.2.6	Παράδειγμα.....	5
4.2.7	Παράδειγμα.....	5
4.2.8	Παράδειγμα.....	5
4.2.9	Παράδειγμα.....	5

Γ.04 Ολοκλήρωση με Αντικατάσταση.

4.1 Εισαγωγή

Η μέθοδος αυτή συνίσταται σε μια αλλαγή (μετασχηματισμό) μεταβλητής. Η αλλαγή αυτή έχει σκοπό να φέρει το ολοκλήρωμα σε πιο απλή μορφή και, όπως είναι λογικό, το είδος της αλλαγής εξαρτάται από την μορφή του ολοκληρώματος.

4.1.1 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{dx}{x^2 + k^2}$

4.1.2 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $f = \int \frac{x dx}{\sqrt[3]{(x^2 + 1)^2}}$

4.1.3 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{x dx}{1 + \sqrt{x}}$

4.1.4 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 1}}$

4.1.5 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int 2x\sqrt{x^2 + 1} dx$

4.1.6 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx$

4.1.7 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int x^2 \sin(x^3) dx$

4.2 Ολοκλήρωση με Αντικατάσταση και Αλλαγή Ορίων

4.2.1 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int_1^2 \frac{10x^2}{(x^3 + 1)^2} \cdot dx$

4.2.2 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int_0^2 x \cdot \sqrt{4x^2 + 9} \cdot dx$

4.2.3 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int_0^{\sqrt{5}} x^5 \cdot \sqrt{x^2 + 1} \cdot dx$

4.2.4 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int_1^4 \frac{x}{1+x^4} dx$

4.2.5 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx$

4.2.6 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int_0^{\pi/2} (\cos^2 x - \sin^2 x) dx$

4.2.7 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int_1^5 \frac{x}{x^4 + 10x^2 + 25} dx$

4.2.8 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int_0^2 \sqrt{x+3} dx$

4.2.9 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^1 x\sqrt{1+x} dx$

Σημειώματα

A) Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το υλικό της Μαθηματικής Ανάλυσης προέρχεται από τις σημειώσεις του Επίκουρου Καθηγητή κ. Γεωργίου Ν. Μπροδήμα για τις ανάγκες διδασκαλίας του ομώνυμου μαθήματος στο Τμήμα Φυσικής του Πανεπιστημίου Πατρών .

B) Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Γεώργιος Ν. Μπροδήμας. «Μαθηματική Ανάλυση. Ενότητα Γ.04: Ολοκλήρωση με Αντικατάσταση». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

<https://eclass.upatras.gr/courses/PHY1912/>

Γ) Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/> Ως Μη Εμπορική ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφήμιση) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Δ) Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- ✓ το Σημείωμα Αναφοράς
- ✓ το Σημείωμα Αδειοδότησης
- ✓ τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- ✓ το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφ' όσον υπάρχει).