Τίτλος Μαθήματος: Μαθηματική Ανάλυση

Ενότητα Β. Διαφορικός Λογισμός

Κεφάλαιο Β.10: Αναπτύγματα σε Σειρά

Όνομα Καθηγητή: Γεώργιος Ν. Μπροδήμας

Τμήμα Φυσικής

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Πίνακας Περιεχομένων

B.10 Το Ανάπτυγμα TAYLOR

10.1 Εισαγωγή

Τα πολυώνυμα είναι οι πιο απλές συναρτήσεις που εμφανίζονται στην ανάλυση και διευκολύνουν σημαντικά τους υπολογισμούς, αριθμητικούς και αναλυτικούς. Έτσι, πολλές φορές επιθυμούμε να προσεγγίσουμε μια συνάρτηση, όταν αυτή είναι πολύπλοκη, με ένα πολυώνυμο, αρκεί η διαφορά της συνάρτησης από την πολυωνυμική της προσέγγιση να είναι αρκετά μικρή.

Υπάρχουν πολλοί τρόποι να προσεγγίσουμε μια δεδομένη συνάρτηση με πολυώνυμα. Η επιλογή εξαρτάται από την χρήση της προσέγγισης αυτής. Εδώ ενδιαφερόμαστε να βρούμε ένα πολυώνυμο που να έχει την ίδια τιμή με την συνάρτηση f και τις παραγώγους της σε ένα δεδομένο σημείο. Για παράδειγμα αν προσεγγίσουμε την f με ένα γραμμικό πολυώνυμο, αν δηλαδή γράψουμε

$$f(x)=P_1(x)=c_0+c_1(x-\alpha)$$

τότε θα ισχύει

$$f(\alpha)=P_1(\alpha)=c_0 \quad \text{και} \quad f'(\alpha)=P_1'(\alpha)=c_1$$

δηλαδή το πολυώνυμο και η παράγωγος θα έχουν την ίδια τιμή στο σημείο $(\alpha, f(\alpha))$. Αυτό γεωμετρικά σημαίνει ότι η γραφική παράσταση του πολυωνύμου P είναι εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f(x) στο σημείο (α, f(α)).

Αν τώρα προσεγγίσουμε την συνάρτηση f με ένα πολυώνυμο P_2 δευτέρου βαθμού

$$f(x)=P_2(x)=c_0+c_1(x-\alpha)+c_2(x-\alpha)^2$$

τότε θα ισχύει

$$f(\alpha)=P_2(\alpha)=c_0, \quad f'(\alpha)=P_2'(\alpha)=c_1, \quad f''(\alpha)=P_2''(\alpha)=c_2$$

έχουμε δηλαδή σύμπτωση της συνάρτησης αλλά και των δύο πρώτων παραγώγων στο σημείο (α, f(α)). Τώρα η γραφική παράσταση του P_2 όχι μόνο είναι εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (α, f(α)) αλλά έχει και την ίδια καμπυλότητα με την γραφική παράσταση της f στο σημείο (α, f(α)).

Ας θεωρήσουμε επομένως ότι η συνάρτηση $y=f(x)$ είναι παραγωγίσιμη μέχρι τάξεως (n+1), σε κάποιο διάστημα I που περιέχει το σημείο x=α. Προσπαθούμε τώρα να βρούμε ένα πολυώνυμο $y=P_n(x)$, βαθμού *n*, του οποίου η τιμή στο σημείο $x=\alpha$ να ισούται με την τιμή της συνάρτησης $f(x)$ στο ίδιο σημείο και επίσης οι τιμές των παραγώγων του μέχρι τάξεως n στο σημείο $x=\alpha$ να ισούνται με τις τιμές των αντιστοίχων παραγώγων της συναρτήσεως $f(x)$ στο ίδιο σημείο. Δηλαδή θέλουμε να έχουμε

$$P_n(\alpha)=f(\alpha), \quad P_n'(\alpha)=f'(\alpha), \quad P_n''(\alpha)=f''(\alpha), \quad \ldots \quad P_n^{(n)}(\alpha)=f^{(n)}(\alpha) \qquad (1.1)$$

Είναι φυσικό να περιμένουμε, σύμφωνα με τα παραπάνω, ότι ένα τέτοιο πολυώνυμο θα βρίσκεται κατά κάποιο τρόπο πολύ "κοντά" στην συνάρτηση $f(x)$.

Εάν το πολυώνυμο $P_n(x)$ είναι εκπεφρασμένο σε δυνάμεις του $(x-\alpha)$ τότε αυτό θα έχει την μορφή

$$P_n(x)=c_0+c_1(x-\alpha)+c_2(x-\alpha)^2+\ldots+c_n(x-\alpha)^n \qquad (1.2)$$

Για τον προσδιορισμό των συντελεστών $c_k, k=0,1,\ldots,n$ χρησιμοποιούμε τις σχέσεις (1.1) και έχουμε

$$\begin{aligned}
&P_n(\alpha)=c_0=f(\alpha)\\
&P_2'(\alpha)=c_1+c_2(x-\alpha)+\ldots+nc_n(x-\alpha)^{n-1}\big|_{x=\alpha}=c_1=f'(\alpha) \qquad (1.3)\\
&P_n''(\alpha)=2c_2+32c_3(x-\alpha)+\ldots+n(n-1)c_n(x-\alpha)^{n-2}\big|_{x=\alpha}=2c_2=f(\alpha)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&P_n^{(n)}(\alpha)=n!c_n=f^{(n)}(\ )
\end{aligned}$$

όπου

$$c_0=f(\alpha),\quad c_1=f'(\alpha),\quad c_2=\frac{f''(\alpha)}{2!},\quad \ldots,c_n=\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} \qquad (1.4)$$

Με την βοήθεια των σχέσεων (1.4) το πολυώνυμο (1.2) γράφεται

$$P_n(x)=f(\alpha)+\frac{f'(\alpha)}{1!}(x-\alpha)+\frac{f''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n \qquad (1.5)$$

Εάν συμβολίσουμε με $R_n(x)$ την διαφορά της συναρτήσεως $f(x)$ και $P_n(x)$ έχουμε

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x)=f(\alpha)+\frac{f'(\alpha)}{1!}(x-\alpha)+\frac{f''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n+R_n(x) \qquad (1.6)$$

Το $R_n(x)$ ονομάζεται υπόλοιπο και όταν είναι σχετικά "μικρό" το πολυώνυμο $P_n(x)$ θεωρείται "καλή" προσέγγιση για την συνάρτηση $f(x)$.

Αποδεικνύεται ότι το υπόλοιπο $R_n(x)$ μπορεί να πάρει την μορφή (Lagrange)

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}('')}{(n+1)!}(x-\alpha)^{n+1} \qquad (1.7)$$

όπου το ξ είναι μεταξύ του *a* και του *x*.

Η σχέση (1.6) ονομάζεται *ανάπτυγμα Taylor με υπόλοιπο* (και όταν x=0 *ανάπτυγμα Maclaurin με υπόλοιπο*) για την συνάρτηση f(x).

Εάν στην σχέση (1.6) το $n\to\infty$ τότε θα έχουμε

$$f(x)=f(\alpha)+\frac{f'(\alpha)}{1!}(x-\alpha)+\frac{f''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n \qquad (1.8)$$

Η σχέση 1.8) ονομάζεται *ανάπτυγμα Taylor*, (και όταν α=0 *ανάπτυγμα Maclaurin*) για την συνάρτηση f(x). Τα διάφορα P_1, P_2, ..., P_n με τα οποία, ανάλογα με την επιθυμητή ακρίβεια, προσεγγίζουμε την συνάρτηση ονομάζονται *πολυώνυμα Taylor*.

10.1.1 Παρατήρηση

Η ενότητα αυτή περιλαμβάνει και άλλα θέματα όπως η σύγκλιση των σειρών, μορφές και υπολογισμοί του υπολοίπου κ.α. τα οποία όμως αποτελούν αντικείμενο επόμενου μαθήματος.

10.2 Το Ανάπτυγμα TAYLOR - Ασκήσεις

10.2.3 Παράδειγμα

Να αναπτυχθεί η συνάρτηση $f(x)=e^{x}$ σε σειρά MacLaurin.

10.2.4 Παράδειγμα

Να αναπτυχθεί η συνάρτηση $f(x)=e^{-x}$ σε σειρά McLaurin.

10.2.5 Παράδειγμα

Να αναπτυχθεί η συνάρτηση $f(x)=e^{\frac{x}{2}}$ σε δυνάμεις του $x-3$.

10.2.6 Παράδειγμα

Να ευρεθούν οι πέντε πρώτοι μη μηδενικοί όροι του αναπτύγματος της $f(x)=e^{x}$ για α=2.

10.2.7 Παράδειγμα

Να αναπτυχθεί σε σειρά MacLaurin η συνάρτηση $f(x)=\ln(1+x)$.

10.2.8 Παράδειγμα

Να αναπτυχθεί σε σειρά MacLaurin η συνάρτηση $f(x)=\ln x$ για $0\langle x\leq 2\alpha$.

10.2.9 Παράδειγμα

Να αναπτυχθεί η συνάρτηση $f(x)=x^{2}\ln x$ σε δυνάμεις του x-1.

10.2.10 Παράδειγμα

Να ευρεθούν οι πέντε πρώτοι μη μηδενικοί όροι του αναπτύγματος της $f(x)=\ln x$ σε δυνάμεις του x-2

10.2.11 Παράδειγμα

Να αναπτυχθεί σε σειρά MacLaurin η συνάρτηση $f(x)=\sin x$.

10.2.12 Παράδειγμα

Να ευρεθεί το ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης $f(x)=\sin x$ στο σημείο $x=\pi/2$.

10.2.13 Παράδειγμα

$f(x)=\sin 3x$

10.2.14 Παράδειγμα

Να ευρεθούν οι πέντε πρώτοι μη μηδενικοί όροι του αναπτύγματος MacLaurin της $f(x)=\cos x$

10.2.15 Ασκηση

Να αναπτυχθεί σε σειρά MacLaurin η $f(x)=\cos\sqrt{x}$

10.2.16 Ασκηση

Να ευρεθεί το ανάπτυγμα της $f(x)=\tan x$

10.2.17 Παράδειγμα

Να ευρεθούν οι πέντε πρώτοι μη μηδενικοί όροι του αναπτύγματος MacLaurin της $f(x)=\sin^{-1}x$.

10.2.18 Ασκηση

Να ευρεθούν οι 3 πρώτοι μη μηδενικοί όροι του αναπτύγματος $f(x)=e^{x}\tan^{-1}x$

10.2.19 Παράδειγμα

$f(x)=\sin^{-1}x$

10.2.20 Παράδειγμα

$f(x)=\tan^{-1}x$

10.2.21 Παράδειγμα

Να ευρεθεί το ανάπτυγμα McLaurin της $f(x)=\sinh x$

10.2.22 Παράδειγμα

Να ευρεθεί το ανάπτυγμα McLaurin thw $f(x)=\cosh x$

10.2.23 Παράδειγμα

Να ευρεθεί το ανάπτυγμα MacLaurin της $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$

10.2.24 Παράδειγμα

Να ευρεθεί το ανάπτυγμα της $f(x)=\dfrac{1}{1-2x}$

η συνάρτηση $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

10.2.25 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί η βάση των φυσικών λογαρίθμων e με ακρίβεια 0.001.

10.2.26 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το $e^{0.2}$ με ακρίβεια 0.001.

10.2.27 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το $\sin 0.5$ με ακρίβεια 0.001.

10.2.28 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ln1.4 με προσέγγιση 0.01.

10.2.29 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}$

10.2.30 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{x^3}$

10.2.31 Παράδειγμα

Να ευρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x^3}$

Καταλήγουμε σε απροσδιόριστη μορφή 0/0 που μπορούμε να την μελετήσουμε με την βοήθεια του κανόνα του L'Hopital. Μπορούμε Όμως να χειρισθούμε το θέμα με την βοήθεια του αναπτύγματος Taylor. Η τεχνική αυτή πολλές φορές αποδεικνύεται ιδιαίτερα χρήσιμη.

Επειδή $\sin x = x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\dots$ *και* $\sin x - x = -\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dots$ *έχουμε*

$$\frac{\sin x-x}{x^3}=-\frac{1}{3!}+\frac{x^2}{5!}-\dots\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{6}+\frac{x^5}{5!}\dots\right).$$

Και επειδή η συνάρτηση είναι συνεχής $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x^3}=-\dfrac{1}{6}$

Το ίδιο θέμα μπορούμε να το μελετήσουμε με την βοήθεια του κανόνα του L' Hopital.

10.2.32 Παράδειγμα

Να ευρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{\tan x-x}$

10.2.33 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sinh x-\sin x}{\cosh x-\cos x}$

10.2.34 Πρόβλημα

Η ολική σχετικιστική ενέργεια ενός σωματιδίου είναι $E=mc^2\Big/\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}$ Να συγκριθεί η ενέργεια αυτή με την κλασσική κινητική ενέργεια $E=(1/2)m\upsilon^2$.

Σημειώματα

Α) Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το υλικό της Μαθηματικής Ανάλυσης προέρχεται από τις σημειώσεις του Επίκουρου Καθηγητή κ. Γεωργίου Ν. Μπροδήμα για τις ανάγκες διδασκαλίας του ομώνυμου μαθήματος στο Τμήμα Φυσικής του Πανεπιστημίου Πατρών .

Β) Σημείωμα Αναφοράς

Γ) Σημείωμα Αδειοδότησης

Δ) Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- ✓ το Σημείωμα Αναφοράς
- ✓ το Σημείωμα Αδειοδότησης
- ✓ τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- ✓ το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφ’ όσον υπάρχει).