



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΠΑΤΡΩΝ  
UNIVERSITY OF PATRAS

---

## Τίτλος Μαθήματος: Μαθηματική Ανάλυση

### Ενότητα Β. Διαφορικός Λογισμός

#### Κεφάλαιο Β.09: Το Διαφορικό

Όνομα Καθηγητή: Γεώργιος Ν. Μπροδήμας

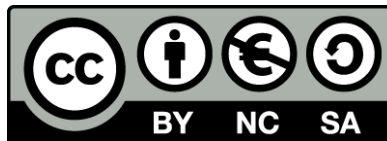
Τμήμα Φυσικής

---

**ΑΝΟΙΚΤΑ** ακαδημαϊκά **ΠΠ**  
μαθήματα

## Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



## Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



## Πίνακας Περιεχομένων

B.09	Το Διαφορικό .....	4
9.1.1	Παράδειγμα .....	4
9.1.2	Παράδειγμα .....	4
9.1.3	Γραμμική προσέγγιση.....	4
9.1.4	Παράδειγμα .....	5

## B.09 Το Διαφορικό

1. Θεωρούμε την συνάρτηση  $y=f(x)$ . Αν είναι παραγωγίσιμη θα έχω

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

2. Μπορώ να θέσω

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x) = \alpha(x)$$

οπότε θα ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$$

3. Από τα παραπάνω είναι φανερό ότι για τιμές του  $x$  που πλησιάζουν το  $x_0$  η ποσότητα  $\alpha(x)$  γίνεται όσο θέλουμε μικρή και επομένως για τις τιμές αυτές του  $x$  μπορούμε, προσεγγιστικά, να γράψουμε

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cong f'(x_0)$$

4. Στην παραπάνω αν θέσω  $x - x_0 = \Delta x$  από όπου  $x = x_0 + \Delta x$  τότε για αρκετά μικρές τιμές του  $\Delta x$  ( $\Delta x \neq 0$ ) έχουμε  $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \cong f'(x_0) \cdot \Delta x$

6. Ονομάζουμε *διαφορικό πρώτης τάξης* ή πιο απλά διαφορικό της  $f$  στο σημείο  $x_0$  την συνάρτηση  $df(x_0)(\Delta x) = f'(x_0) \cdot \Delta x$

7. Παρατηρούμε ότι το διαφορικό είναι συνάρτηση δυο μεταβλητών ανεξαρτήτων μεταξύ τους. Ενώς σημείου  $x_0$  του πεδίου ορισμού της και της μεταβολής  $\Delta x = x - x_0$ . Με άλλα λόγια η συνάρτηση διαφορικό μας επιτρέπει να υπολογίσουμε την τιμή της συνάρτησης  $f(x)$  στο σημείο  $x_0 + \Delta x$  δηλαδή την  $f(x_0 + \Delta x)$ .

### 9.1.1 Παράδειγμα

Να υπολογισθούν τα διαφορικά των συναρτήσεων

$$1. \quad x^3 + \sin x \qquad 2. \quad \frac{x}{x^3 + 2} \qquad 3. \quad e^x \cos x$$

### 9.1.2 Παράδειγμα

Να ευρεθεί το διαφορικό των συναρτήσεων

$$1. \quad f(x) = (4x + 3)^5 \qquad 2. \quad f(x) = \frac{1}{(x^4 + 3)^2} \qquad 3. \quad f(x) = \sin \sqrt{x}$$

$$4. \quad f(x) = \sin \ln x \qquad 5. \quad f(x) = \operatorname{cose}^x \qquad 6. \quad f(x) = \frac{1}{12} \ln \frac{x-6}{x+6}$$

### 9.1.3 Γραμμική προσέγγιση

Εάν γνωρίζουμε την τιμή μίας διαφορίσιμης συνάρτησης  $f$  σε ένα σημείο  $x=a$  τότε μπορούμε να βρούμε την τιμή της σε γειτονικό σημείο  $a+\Delta x$  προσθέτοντας το  $x$  στην αρχική τιμή, δηλαδή

$$f(\alpha + \Delta x) = \alpha + \Delta y$$

Επί πλέον εφ' όσον η  $f'(\alpha)$  υπάρχει, τότε μπορούμε να προσεγγίσουμε το  $\Delta y$  με το  $dy$  εάν λάβουμε  $dx = \Delta x$ . Έτσι έχουμε

$$f(\alpha + \Delta x) \approx f(\alpha) + dy$$

ή, ισοδύναμα

$$f(\alpha + \Delta x) \approx f(\alpha) + f'(\alpha) \cdot \Delta x$$

Αυτό ονομάζεται *γραμμική προσέγγιση*, καθ' όσον, στην πραγματικότητα, χρησιμοποιούμε τιμές κατά μήκος της εφαπτομένης για να προσεγγίσουμε τιμές στην καμπύλη. όπως φαίνεται και από το σχήμα (HDP 192.3.34) συχνά είναι ευκολότερο να υπολογίσουμε το  $dy$  παρά το  $\Delta y$  και, έτσι, προσεγγίζουμε την  $f(x)$ .

#### 9.1.4 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το  $\sqrt[3]{8.1}$  καθώς και η διαφορά του από το  $\sqrt[3]{8} = 2$ ;

## Σημειώματα

### A) Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το υλικό της Μαθηματικής Ανάλυσης προέρχεται από τις σημειώσεις του Επίκουρου Καθηγητή κ. Γεωργίου Ν. Μπροδήμα για τις ανάγκες διδασκαλίας του ομώνυμου μαθήματος στο Τμήμα Φυσικής του Πανεπιστημίου Πατρών .

### B) Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Γεώργιος Ν. Μπροδήμας. «Μαθηματική Ανάλυση. Ενότητα Β.09: Το Διαφορικό». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

<https://eclass.upatras.gr/courses /PHY1912/>

### Γ) Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/> Ως Μη Εμπορική ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

### Δ) Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- ✓ το Σημείωμα Αναφοράς
- ✓ το Σημείωμα Αδειοδότησης
- ✓ τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- ✓ το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφ' όσον υπάρχει).