Τίτλος Μαθήματος: Μαθηματική Ανάλυση

Ενότητα Β. Διαφορικός Λογισμός

Κεφάλαιο Β.09: Το Διαφορικό

Όνομα Καθηγητή: Γεώργιος Ν. Μπροδήμας

Τμήμα Φυσικής

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Πίνακας Περιεχομένων

Β.09 Το Διαφορικό

1. Θεωρούμε την συνάρτηση y=f(x). Αν είναι παραγωγίσιμη θα έχω

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$$

2. Μπορώ να θέσω

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x)=\alpha(x)$$

οπότε θα ισχύει

$$\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0$$

3. Από τα παραπάνω είναι φανερό ότι για τιμές του x που πλησιάζουν το x_0 η ποσότητα α(x) γίνεται όσο θέλουμε μικρή και επομένως για τις τιμές αυτές του x μπορούμε, προσεγγιστικά, να γράψουμε

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cong f'(x_0)$$

4. Στην παραπάνω αν θέσω $x-x_0=\Delta x$ από όπου $x=x_0+\Delta x$ τότε για αρκετά μικρές τιμές του Δx (Δx≠0) έχουμε $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\cong f'(x_0)\cdot\Delta x$

6. Ονομάζουμε *διαφορικό πρώτης τάξης* ή πιο απλά διαφορικό της f στο σημείο x_0 την συνάρτηση $df(x_0)(\Delta x)=f'(x_0)\cdot\Delta x$

7. Παρατηρούμε ότι το διαφορικό είναι συνάρτηση δυο μεταβλητών ανεξαρτήτων μεταξύ τους. Ενός σημείου x_0 του πεδίου ορισμού της και της μεταβολής $\Delta x=x-x_0$. Με άλλα λόγια η συνάρτηση διαφορικό μας επιτρέπει να υπολογίσουμε την τιμή της συνάρτησης f(x) στο σημείο $x_0+\Delta x$ δηλαδή την $f(x_0+\Delta x)$.

9.1.1 Παράδειγμα

Να υπολογισθούν τα διαφορικά των συναρτήσεων

1. $x^3+\sin x$ 2. $\dfrac{x}{x^3+2}$ 3. $e^x\cos x$

9.1.2 Παράδειγμα

Να ευρεθεί το διαφορικό των συναρτήσεων

1. $f(x)=(4x+3)^5$ 2. $f(x)=\dfrac{1}{(x^4+3)^2}$ 3. $f(x)=\sin\sqrt{x}$

4. $f(x)=\sin\ln x$ 5. $f(x)=\cos e^x$ 6. $f(x)=\dfrac{1}{12}\ln\dfrac{x-6}{x+6}$

9.1.3 Γραμμική προσέγγιση

Εάν γνωρίζουμε την τιμή μίας διαφορίσιμης συνάρτησης f σε ένα σημείο x=α τότε μπορούμε να βρούμε την τιμή της σε γειτονικό σημείο α+Δx προσθέτοντας το x στην αρχική τιμή, δηλαδή

$$f(\alpha+\Delta x)=\alpha+\Delta y$$

Επί πλέον εφ’ όσον η $f'(\alpha)$ υπάρχει, τότε μπορούμε να προσεγγίσουμε το Δy με το dy εάν λάβουμε dx=Δx. Έτσι έχουμε

$$f(\alpha+\Delta x)\approx f(\alpha)+dy$$

ή, ισοδύναμα

$$f(\alpha+\Delta x)\approx f(\alpha)+f'(\alpha)\cdot\Delta x$$

Αυτό ονομάζεται *γραμμική προσέγγιση*, καθ’ όσον, στην πραγματικότητα, χρησιμοποιούμε τιμές κατά μήκος της εφαπτομένης για να προσεγγίσουμε τιμές στην καμπύλη. όπως φαίνεται και από το σχήμα (HDP 192.3.34) συχνά είναι ευκολότερο να υπολογίσουμε το dy παρά το Δy και, έτσι, προσεγγίζουμε την f(x).

9.1.4 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το $\sqrt[3]{8.1}$ καθώς και η διαφορά του από το $\sqrt[3]{8}=2$;

Σημειώματα

Α) Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το υλικό της Μαθηματικής Ανάλυσης προέρχεται από τις σημειώσεις του Επίκουρου Καθηγητή κ. Γεωργίου Ν. Μπροδήμα για τις ανάγκες διδασκαλίας του ομώνυμου μαθήματος στο Τμήμα Φυσικής του Πανεπιστημίου Πατρών .

Β) Σημείωμα Αναφοράς

Γ) Σημείωμα Αδειοδότησης

Δ) Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- ✓ το Σημείωμα Αναφοράς
- ✓ το Σημείωμα Αδειοδότησης
- ✓ τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- ✓ το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφ’ όσον υπάρχει).