



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

Τίτλος Μαθήματος: Μαθηματική Ανάλυση

Ενότητα Β. Διαφορικός Λογισμός

Κεφάλαιο Β.08: Υπερβολικές Συναρτήσεις

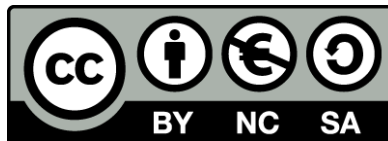
Όνομα Καθηγητή: Γεώργιος Ν. Μπροδήμας

Τμήμα Φυσικής

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά **ΠΠ**
μαθήματα

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Πίνακας Περιεχομένων

B.08	Υπερβολικές Συναρτήσεις	5
8.1	Ορισμοί.....	5
8.1.1	Το υπερβολικό ημίτονο	5
8.1.2	Παρατήρηση	5
8.1.3	Υπερβολικό συνημίτονο.....	6
8.1.4	Παράγωγοι.....	6
8.1.5	Αρτιότητα.....	6
8.1.6	Παρατήρηση	6
8.1.7	Οι άλλες Υπερβολικές Συναρτήσεις.....	7
8.1.8	Οι Παράγωγοι	7
8.1.9	Γραφικές Παραστάσεις και πεδία Ορισμού - τιμών.	7
8.1.10	Αρτιότητα.....	8
8.2	Μελέτη των υπερβολικών συναρτήσεων	8
8.2.1	Υπερβολικό Ημίτονο	8
8.2.2	Υπερβολικό συνημίτονο.....	8
8.2.3	Υπερβολική εφαπτομένη.....	8
8.3	Ασκήσεις.....	9
8.3.1	Ασκηση	9
8.3.2	Ασκηση	9
8.3.3	Ασκηση	9
8.3.4	Ασκηση	9
8.3.5	Ασκηση	9
8.3.6	Ασκηση	10
8.3.7	Ασκηση	10
8.3.8	Ασκηση	10
8.3.9	Ασκηση	10
8.3.10	Ασκηση	11

8.4	Αντίστροφες Υπερβολικές Συναρτήσεις	11
8.4.1	Οι αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις.....	11
8.4.2	Παράδειγμα.....	12
8.4.3	Οι παράγωγοι	12
8.4.4	Άσκηση	13
8.4.5	Άσκηση	13

B.08 Υπερβολικές Συναρτήσεις

Οι υπερβολικές συναρτήσεις είναι συνδυασμοί εκθετικών συναρτήσεων που ικανοποιούν ταυτότητες που ομοιάζουν πολύ με αυτές των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Είναι συναρτήσεις ιδιαίτερα χρήσιμες στην ανάλυση γενικά και ιδιαίτερα στην επίλυση ολοκληρωμάτων και διαφορικών εξισώσεων.

8.1 Ορισμοί

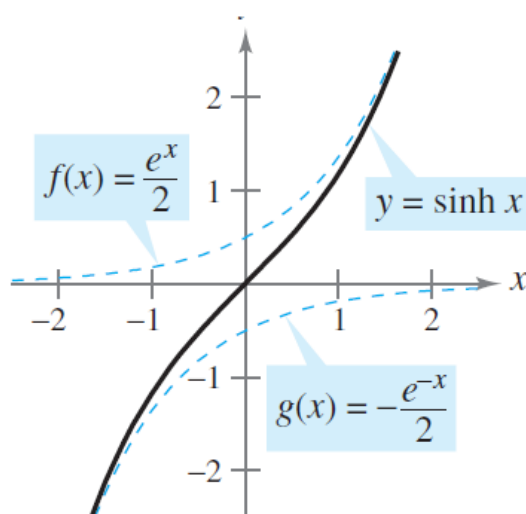
Ορίζουμε δύο συναρτήσεις που ονομάζονται *υπερβολικό ημίτονο* και *υπερβολικό συνημίτονο*, που συμβολίζονται με $\sinh x$ και $\cosh x$, αντίστοιχα, ως εξής:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

8.1.1 Το υπερβολικό ημίτονο

Η γραφική παράσταση είναι



Το πεδίο ορισμού της $\sinh x$ είναι $-\infty + \infty$ ενώ, το πεδίο τιμών, είναι, στην πραγματικότητα, $-\infty + \infty$ καθ' όσον $\sinh x \rightarrow \pm\infty$ όταν $x \rightarrow \pm\infty$.

8.1.2 Παρατήρηση

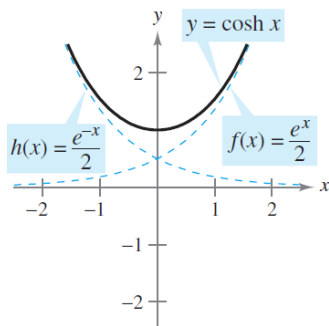
:Η συνάρτηση υπερβολικό ημίτονο

- στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο διάστημα $(-\infty, 0)$, γιατί $y'' < 0$.
- στρέφει τα κοίλα προς τα άνω στο διάστημα $(0, \infty)$, γιατί $y'' > 0$.

- iii. Το σημείο $(0, \sinh 0) = (0, 0)$ είναι το μοναδικό σημείο καμπής.
- iv. Η κλίση στην αρχή των αξόνων είναι $\cosh 0 = 1$.

8.1.3 Υπερβολικό συνημίτονο

Η γραφική παράσταση του υπερβολικού συνημιτόνου είναι



Με ορισμού το $-\infty + \infty$ και πεδίο τιμών το $[1, \infty)$

8.1.4 Παράγωγοι

Οι παράγωγοι των συναρτήσεων αυτών μπορούν εύκολα να υπολογισθούν και είναι

$$\frac{d}{dx} \sinh x = \dots =$$

Και

$$\frac{d}{dx} \cosh x = \dots =$$

8.1.5 Αρτιότητα

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι ισχύει

$$\sinh(-x) = -\sinh x$$

$$\cosh(-x) = \cosh x$$

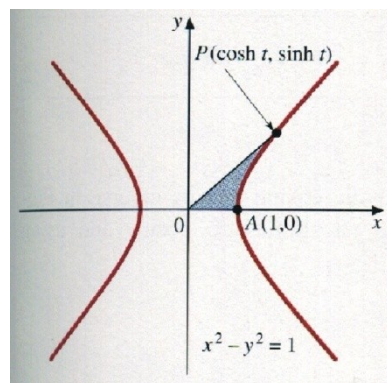
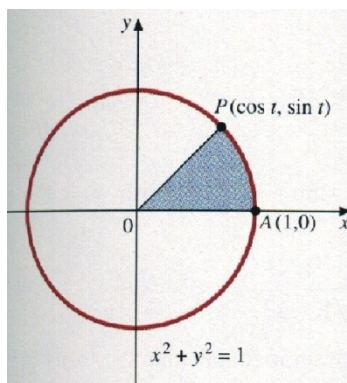
8.1.6 Παρατήρηση

Οι συνήθεις τριγωνομετρικές συναρτήσεις $\sin t$ και $\cos t$ ονομάζονται *κυκλικές συναρτήσεις* γιατί τα σημεία $(x, y) = (\cos t, \sin t)$ κείνται στον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$.

Οι συναρτήσεις $\sinh t$ και $\cosh t$ ονομάζονται *υπερβολικές συναρτήσεις* γιατί τα σημεία $(x, y) = (\sinh t, \cosh t)$ κείνται σε έναν κλάδο της υπερβολής $x^2 - y^2 = -1$ γιατί, για κάθε t ισχύει η ταυτότητα

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$$

Τα ανωτέρω φαίνονται στο σχήμα



8.1.7 Οι άλλες Υπερβολικές Συναρτήσεις

Οι συναρτήσεις υπερβολική εφαπτομένη, συνεφαπτομένη, τέμνουσα και συντέμνουσα ορίζονται ως εξής:

$$1. \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$2. \coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$3. \operatorname{sech} x = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

$$4. \operatorname{csch} x = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

8.1.8 Οι Παράγωγοι

Οι παράγωγοι των ανωτέρω συναρτήσεων υπολογίζονται εύκολα και είναι

$$1. \frac{d}{dx} \tanh x = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$2. \frac{d}{dx} \coth x = -\frac{1}{\sinh^2 x}$$

$$3. \frac{d}{dx} \operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x$$

$$4. \frac{d}{dx} \operatorname{csch} x = -\operatorname{csch} x \coth x$$

8.1.9 Γραφικές Παραστάσεις και πεδία Ορισμού - τιμών.

Πεδίο ορισμού $(-\infty, \infty)$ Πεδίο τιμών $(-1, 1)$	Πεδίο ορισμού $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ Πεδίο τιμών $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$	Πεδίο ορισμού $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ Πεδίο τιμών $(-\infty, -0) \cup (0, \infty)$	Πεδίο ορισμού $(-\infty, \infty)$ Πεδίο τιμών $(0, 1]$

8.1.10 Αρτιότητα

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι:

$$\tanh(-x) = -\tanh x \qquad \coth(-x) = -\coth x$$

$$\operatorname{csch}(-x) = -\operatorname{csch} x \qquad \operatorname{sech}(-x) = \operatorname{sech} x$$

8.2 Μελέτη των υπερβολικών συναρτήσεων

8.2.1 Υπερβολικό Ημίτονο

Η συνάρτηση υπερβολικό ημίτονο είναι *περιττή* και επομένως θα είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \sinh x$:

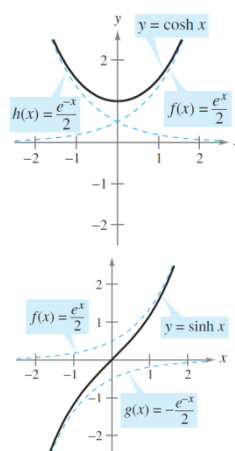
- v. στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο διάστημα $(-\infty, 0)$, γιατί $y'' < 0$.
- vi. στρέφει τα κοίλα προς τα άνω στο διάστημα $(0, \infty)$, γιατί $y'' > 0$.
- vii. Το σημείο $(0, \sinh 0) = (0, 0)$ είναι το μοναδικό σημείο καμπής.
- viii. Η κλίση στην αρχή των αξόνων είναι $\cosh 0 = 1$.

8.2.2 Υπερβολικό συνημίτονο

Στην γραφική παράσταση της συνάρτησης υπερβολικό συνημίτονο παρατηρούμε:

- i. είναι φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$
- ii. αύξουσα στο $[0, \infty)$.
- iii. το σημείο $(0, \cosh 0) = (0, 1)$ είναι τοπικό και απόλυτο ελάχιστο. Δεν υπάρχουν άλλες ακρότατες τιμές.

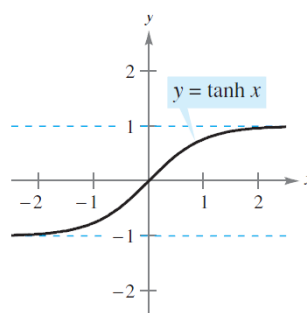
Επί πλέον η συνάρτηση $\cosh x$ είναι *άρτια συνάρτηση*.



8.2.3 Υπερβολική εφαπτομένη

Στη γραφική παράσταση της $y = \tanh x$ που φαίνεται στο σχήμα παρατηρούμε ότι:

- i. έχουμε περιττή συνάρτηση.
- ii. ότι οι γραμμές $y = 1$ και $y = -1$ είναι οριζόντιες ασύμπτωτοι.
- iii. στο διάστημα $-\infty < x < 0$ η $y = \tanh x$ στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ενώ στο διάστημα $0 < x < \infty$ προς τα κάτω.
- iv. το σημείο $(0, \tanh 0) = (0, 0)$ είναι σημείο καμπής και η



Domain: $(-\infty, \infty)$
Range: $(-1, 1)$

κλίση στην αρχή είναι $\sec^2 0 = \frac{1}{\cos^2 0} = 1$

8.3 Ασκήσεις

8.3.1 Ασκήση

Να υπολογισθούν οι τιμές των παραστάσεων

1. $\sinh 0$
2. $\sinh 1$
3. $\sinh \ln 4$
4. $\cosh \ln 2$
5. $\tanh \ln 2$
6. $\operatorname{sech} 1$
7. $\coth \ln 4$
8. $\operatorname{csch} \ln \pi$

8.3.2 Ασκήση

Να μελετηθεί η συνάρτηση $\coth x$

8.3.3 Ασκήση

Να δειχθούν οι σχέσεις

1. $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$
2. $\tanh^2 x + \operatorname{sech}^2 x = 1$

8.3.4 Ασκήση

Να δειχθούν οι σχέσεις

1. $\sinh t \pm \sinh s = \sinh(t \pm s)$
2. $\cosh t \pm \cosh s = 2 \cosh \frac{t \pm s}{2} \cosh \frac{t \mp s}{2}$
3. $\tanh t \pm \tanh s = \frac{\sinh(t \pm s)}{\cosh t \pm \cosh s}$
4. $\coth t \pm \coth s = \frac{\cosh t \pm \cosh s}{\sinh t \pm \sinh s}$

8.3.5 Ασκήση

Να δειχθούν οι σχέσεις:

1. $\sinh 2t = 2 \sinh t \cosh t$
2. $\sinh 2x = \frac{2 \sinh x \cosh x}{\cosh^2 x - 1}$
3. $\cosh 2t = \cosh^2 t + \sinh^2 t$
4. $\cosh 2t = \frac{\cosh^2 t + \sinh^2 t}{\cosh^2 t - \sinh^2 t}$
5. $\cosh 2t = \frac{\cosh^2 t + \sinh^2 t}{\cosh^2 t - \sinh^2 t}$
6. $\cosh 2x = \frac{\cosh^2 x + \sinh^2 x}{\cosh^2 x - \sinh^2 x}$
7. $\tanh 2x = \frac{2 \sinh x \cosh x}{\cosh^2 x + \sinh^2 x}$

8.3.6 Ασκήση

Να δειχθούν οι σχέσεις

$$\sinh \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{e^x - 1}{2}}$$

$$\cosh \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{e^x + 1}{2}}$$

$$\tanh \frac{x}{2} = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

$$\operatorname{sech} \frac{x}{2} = \frac{2}{e^x + 1}$$

$$2 \sinh^2 \frac{1}{2}x = \cosh x - 1$$

$$2 \cosh^2 \frac{1}{2}x = \cosh x + 1$$

8.3.7 Ασκήση

Να δειχθούν οι σχέσεις

$$1. \sinh t + \cosh t = e^t$$

$$2. \cosh t + \sinh t = e^t$$

$$3. \cosh t - \sinh t = e^{-t}$$

$$4. \cosh x + \sinh x = e^x$$

$$5. \cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

8.3.8 Ασκήση

Να δειχθούν οι σχέσεις

$$1. \sinh x \operatorname{coth} x - \cosh x = \sinh x$$

$$2. \frac{\sinh x}{\cosh x - 1} = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$$

8.3.9 Ασκήση

Να δειχθεί ότι $\cosh x + \sinh x = e^x$

Ασκήση

Να δειχθούν οι σχέσεις μεταξύ υπερβολικών συναρτήσεων

	$\sinh x =$	$\cosh x =$	$\tanh x =$	$\operatorname{coth} x =$	$\operatorname{sech} x =$	$\operatorname{csch} x =$
$\sinh x$	u	$\sqrt{u^2 - 1}$	$u/\sqrt{u^2 - 1}$	$1/\sqrt{u^2 - 1}$	$1/\sqrt{u^2 - 1}$	$1/u$
$\cosh x$	$\sqrt{u^2 + 1}$	u	$1/\sqrt{u^2 + 1}$	$u/\sqrt{u^2 + 1}$	$1/u$	$\sqrt{u^2 + 1}$
$\tanh x$	$u/\sqrt{u^2 + 1}$	$\sqrt{u^2 - 1}$	u	$1/u$	$1/\sqrt{u^2 - 1}$	$1/\sqrt{u^2 + 1}$
$\operatorname{coth} x$	$\sqrt{u^2 + 1}$	$u/\sqrt{u^2 - 1}$	$1/u$	u	$1/\sqrt{u^2 - 1}$	$\sqrt{u^2 + 1}$
$\operatorname{sech} x$	$1/\sqrt{u^2 + 1}$	$1/u$	$1/\sqrt{u^2 - 1}$	$\sqrt{u^2 - 1}$	u	$u/\sqrt{u^2 + 1}$

$\operatorname{csch} x$	$1/u$	$1/\sqrt{u^2 - 1}$	$\sqrt{1 - u^2}$	$\sqrt{u^2 - 1}$	$u/\sqrt{1 - u^2}$	u
-------------------------	-------	--------------------	------------------	------------------	--------------------	-----

8.3.10 Άσκηση

Να υπολογισθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων

1. $y = \cosh x$

2. $y = \sinh x$

3. $y = \operatorname{cosech} x$

4. $y = \operatorname{sech} x$

5. $y = \operatorname{csch} x$

6. $y = \operatorname{csch} x + \operatorname{sech} x$

7. $y = \cosh x^2$

8. $y = \sinh x^2$

9. $y = \cosh x^2$

10. $y = \sinh x^2$

11. $y = \cosh x^2$

12. $y = \sinh x^2 + \cosh x^2$

13. $y = \cosh x^2$

14. $y = \sinh x^2$

8.4 Αντίστροφες Υπερβολικές Συναρτήσεις

Οι υπερβολικές συναρτήσεις δεν είναι περιοδικές.

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι από τις έξη συναρτήσεις οι τέσσερες είναι ουσιαστικά ένα-προς-ένα, υπερβολικό ημίτονο, υπερβολική εφαπτομένη, υπερβολική τέμνουσα και υπερβολική συντέμνουσα.

Επομένως για αυτές υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση.

Οι άλλες δύο, υπερβολικό συνημίτονο και υπερβολική τέμνουσα, γίνονται ένα προς ένα αν περιορίσουμε τα πεδία ορισμού στους θετικούς πραγματικούς.

Τέλος, επειδή οι υπερβολικές συναρτήσεις ορίζονται ως συναρτήσεις των εκθετικών συναρτήσεων, μπορούμε να βρούμε για αυτές εκφράσεις συναρτήσεων των λογαριθμικών συναρτήσεων.

8.4.1 Οι αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις

$$\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad (-\infty, \infty)$$

$$\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad [1, \infty)$$

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (-1, 1)$$

$$\operatorname{coth}^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} \quad (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$$

$$\operatorname{sech}^{-1} x = \ln \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}, \quad (0, 1]$$

$$\operatorname{sech}^{-1}x = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right) \quad (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

8.4.2 Παράδειγμα

Η ακριβής έκφραση για την συνάρτηση $\sinh^{-1}x$ προκύπτει από την λύση της

$$y = \sinh^{-1}x \Rightarrow x = \sinh y$$

ως προς x . Πολλαπλασιάζοντας με $2e^x$ και αναδιατάσσοντας τους όρους έχουμε

$$y \cdot 2e^y = x - 1 \Rightarrow y \cdot 2e^y - x + 1 = 0$$

που γράφεται

$$e^{2y} - 2e^y + x - 1 = 0$$

και που έχει λύση

$$e^y = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(x-1)}}{2} = \pm \sqrt{x}$$

επειδή η συνάρτηση e^x είναι θετική θεωρούμε μόνο την θετική ρίζα. Επομένως $e^y = \sqrt{x}$ και επομένως η $x = e^{2y}$ δίδει

$$\sinh^{-1}y = \frac{1}{2} \ln x$$

Με τον ίδιο τρόπο προκύπτουν και οι άλλες εκφράσεις.

8.4.3 Οι παράγωγοι

Από την γενική έκφραση για την παράγωγο αντίστροφης συνάρτησης

$$\frac{d}{dy} f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

έχουμε ότι

$$\frac{d}{dy} \sinh^{-1}y = \frac{1}{\cosh x} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

με την βοήθεια της έκφρασης

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

έχουμε ότι

$$\frac{d}{dx} \sinh^{-1} y = \frac{1}{\cosh x} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

όπου θεωρούμε μόνο την θετική ρίζα γιατί το $\cosh x$ είναι πάντα θετικό.

Συνολικά

$$\frac{d}{dx} \sinh^{-1} y = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

$$\frac{d}{dx} \cosh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx} \tanh^{-1} x = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\frac{d}{dx} \coth^{-1} x = \frac{1}{1-x^2}$$

8.4.4 Άσκηση

Να υπολογισθούν οι παράγωγοι

1. $\cosh^{-1} x + 1$
2. $\sinh^{-1} x - 1$
3. $\sinh^{-1} \cos x + 1$
4. $\cosh^{-1} x - 1$
5. $x \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
6. $x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
7. $\frac{x+1}{\sinh^{-1} x + 1}$
8. $\frac{1+x}{1-x}$
9. e^{1+x}
10. e^{3+x}
11. $\sinh^{-1} \cos 3x$
12. $\cosh^{-1} \left[\frac{1}{2} \right]$

8.4.5 Άσκηση

Να υπολογισθούν, αριθμητικά, με την βοήθεια των λογαρίθμων, οι τιμές των συναρτήσεων.

1. $\tanh^{-1} 0.5$
2. $\coth^{-1} 1.5$
3. $\operatorname{sech}^{-1} 0.5$
4. $\operatorname{csch}^{-1} 1.2$

Σημειώματα

A) Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το υλικό της Μαθηματικής Ανάλυσης προέρχεται από τις σημειώσεις του Επίκουρου Καθηγητή κ. Γεωργίου Ν. Μπροδήμα για τις ανάγκες διδασκαλίας του ομώνυμου μαθήματος στο Τμήμα Φυσικής του Πανεπιστημίου Πατρών .

B) Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Γεώργιος Ν. Μπροδήμας. «Μαθηματική Ανάλυση. Ενότητα Β.08: Υπερβολικές Συναρτήσεις». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

<https://eclass.upatras.gr/courses /PHY1912/>

Γ) Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/> Ως Μη Εμπορική ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Δ) Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- ✓ το Σημείωμα Αναφοράς
- ✓ το Σημείωμα Αδειοδότησης
- ✓ τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- ✓ το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφ' όσον υπάρχει).