Τίτλος Μαθήματος: Μαθηματική Ανάλυση

Ενότητα Β. Διαφορικός Λογισμός

Κεφάλαιο Β.06: Αντίστροφες Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

Όνομα Καθηγητή: Γεώργιος Ν. Μπροδήμας

Τμήμα Φυσικής

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Πίνακας Περιεχομένων

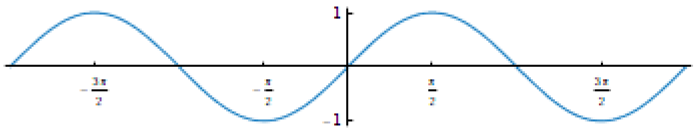
Β.06 Οι Αντίστροφες Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

6.1 Το αντίστροφο ημίτονο

6.1.1 Εισαγωγή

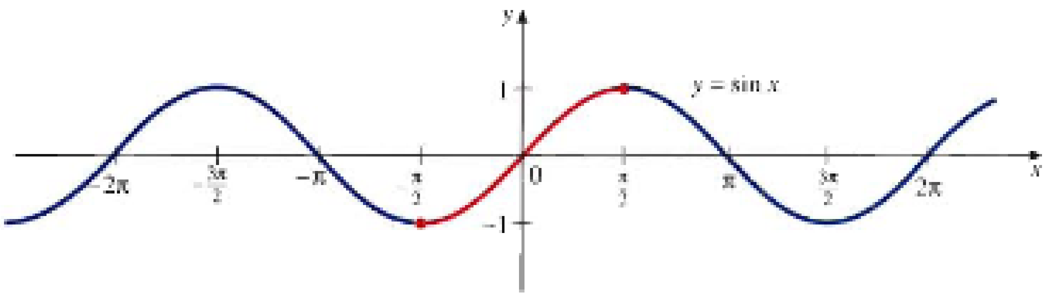
Το ημίτονο, δηλαδή η συνάρτηση $y = \sin x$ με πεδίο ορισμού το σύνολο των πραγματικών αριθμών και πεδίο τιμών το [-1, 1] είναι μια περιοδική συνάρτηση που δεν έχει αντίστροφη.

Αυτό το διαπιστώνουμε πολύ εύκολα με το κριτήριο της οριζόντιας γραμμής στην γραφική της παράσταση.



Το ίδιο διαπιστώνουμε και με την βοήθεια των άλλων κριτηρίων ύπαρξης αντίστροφης.

Αν όμως περιορίσουμε το πεδίο ορισμού στο κλειστό διάστημα $[-\pi/2, \ \ \pi/2]$ η συνάρτηση $y = \sin x$ είναι τώρα ένα προς ένα και έχει ως πεδίο τιμών πάλι το διάστημα ,$[-1, \ 1]$.



Έτσι η συνάρτηση $y = \sin x$ με πεδίο ορισμού $[-\pi/2, \ \ \pi/2]$ και πεδίο τιμών $[-1, \ 1]$ είναι ένα της ένα και συνεπώς αντιστρέψιμη.

Ονομάζεται *κύριος ή πρωτεύον κλάδος* και αποτελεί συμβατική επιλογή γιατί διαστήματα στα οποία η συνάρτηση $y = \sin x$ είναι 1-1 και συνεπώς έχει αντίστροφη μπορούμε να ορίσουμε πολλά.

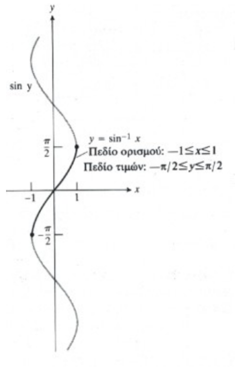
Οι τιμές της συνάρτησης $\sin^{-1} y$ ευρίσκονται από έναν πίνακα για το sinx.

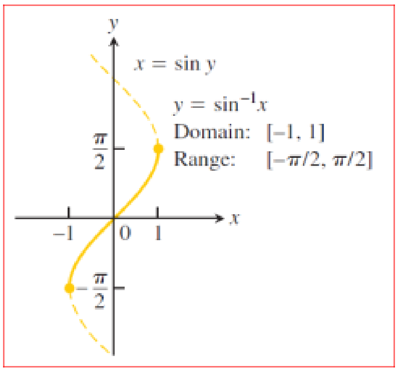
6.1.2 Ορισμός

Γράφοντας $x = \sin^{-1} y$ εννοούμε sinx=y και $-\pi/2 \le x \le \pi/2$. Ο αριθμός $\sin^{-1} y$ εκφράζεται σε ακτίνια εκτός αν ορίζεται διαφορετικά.

6.1.3 Γραφικές παραστάσεις

Η γραφική παράσταση της $\sin^{-1} y$ προκύπτει εάν εναλλάξουμε της συντεταγμένες x και y και φαίνεται

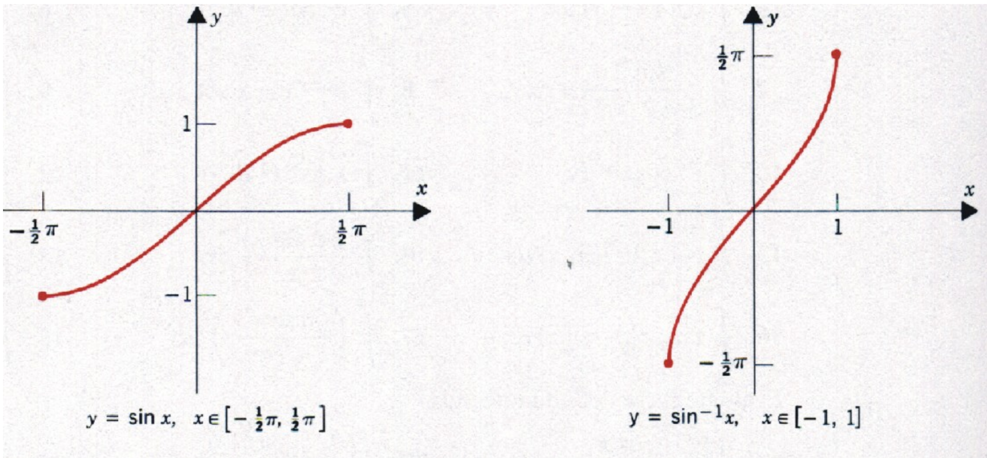




στο παρακάτω σχήμα. [693, 520]

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι ισχύει ο γενικός κανόνας ότι δηλαδή οι γραφικές παραστάσεις αυτού του ζεύγους των συναρτήσεων είναι συμμετρικές ως προς την διχοτόμο, δηλαδή την γραμμή x=y.

Οι γραφικές παραστάσεις των y=sinx και $x = \sin^{-1} y$ στο διάστημα $[-\pi/2, \pi/2]$ φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



το σχήμα που ακολουθεί

[EG, ??]

δείχνει τις γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων στο ίδιο σύστημα αξόνων από το οποίο και πάλι διαπιστώνουμε την συμμετρία ως προς την διχοτόμο.

6.1.4 Αλλοι συμβολισμοί

Στις σημειώσεις αυτές η συνάρτηση αντίστροφο ημίτονο θα συμβολίζεται ως $y = \sin^{-1} x$, *που είναι διάφορο* του $y = \dfrac{1}{\sin x}$. Στην βιβλιογραφία όμως απαντώνται και άλλοι συμβολισμοί όπως:

- **arcsinx:** από τις λατινικές λέξεις arcus=τόξο και sinus=ημίτονο. Ουσιαστικά σημαίνει τόξο ημιτόνου x, δηλαδή το arcsinx σημαίνει εκείνο το τόξο που έχει ημίτονο x
- **τοξημx**: από τις ελληνικές λέξεις τόξο και ημίτονο και σημαίνει τόξο ημιτόνου x, τόξο που έχει

ημίτονο ίσο με x.

- $\text{Sin}^{-1}x$: Επειδή πολλές φορές γίνεται σύγχυση μεταξύ του $y=\sin^{-1}x$ και του $y=(\sin x)^{-1}=\dfrac{1}{\sin x}$ μερικοί συγγραφείς τελευταία χρησιμοποιούν, επί πλέον, το κεφαλαίο S για να δηλώσουν την συνάρτηση αντίστροφο ημίτονο οπότε σε αυτή την περίπτωση συμβολίζουν $\sin^{-1}x=\dfrac{1}{\sin x}$

6.1.5 Παράδειγμα

Να ευρεθούν

1. $\sin^{-1}1$ **2.** $\sin^{-1}0$ **3.** $\sin^{-1}(-1)$ **4.** $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$, **5.** $\sin^{-1}(0.342)$

6.1.6 Ασκηση

Να υπολογισθούν

1. $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ **2.** $\sin^{-1}\left(-\sqrt{3}/2\right)$ **3.** $\sin^{-1}(2)$

6.1.7 Παρατήρηση

Θα μπορούσαμε να είχαμε χρησιμοποιήσει οποιοδήποτε άλλο διάστημα στο οποίο η συνάρτηση sinx έχει αντίστροφη, για παράδειγμα το $[\pi/2, 3\pi/2]$ για να ορίσουμε την αντίστροφή της. Εάν είχαμε κάνει αυτό η συνάρτηση που θα βρίσκαμε θα ήταν διαφορετική. Η επιλογή [-π/2, π/2] είναι *συμβατική*.

6.1.8 Το χρήσιμο τρίγωνο

Εχουμε πει ότι η συνάρτηση $y=\sin^{-1}x$ είναι ένα τόξο, μια γωνία, και πιο συγκεκριμένα εκείνο το τόξο, εκείνη η γωνία, που έχει ημίτονο ίσο με x.

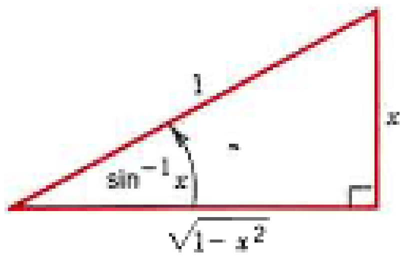
Επομένως ως τόξο, ως γωνία, θα έχει όλους τους τριγωνομετρικούς αριθμούς που έχουν όλες οι γωνίες, θα πρέπει δηλαδή να μπορούμε να βρούμε:

$$\begin{aligned}
&\sin\left(\sin^{-1}x\right)=?\\
&\cos\left(\sin^{-1}x\right)=?\\
&\tan\left(\sin^{-1}x\right)=?\\
&\cot\left(\sin^{-1}x\right)=?
\end{aligned}$$

Προκειμένου να βοηθηθούμε στην εύρεση αυτών των εκφράσεων κατασκευάζουμε το καλούμενο χρήσιμο τρίγωνο ως εξής: Γνωρίζοντας ότι $\sin\left(\sin^{-1}x\right)=x$ κατασκευάζουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο στο οποίο η μια οξεία γωνία είναι $\sin^{-1}x$. Για να είναι το sin αυτής της γωνίας ίσο με x θα πρέπει η απέναντι πλευρά να τεθεί ίση με x και η υποτείνουσα ίση με 1. Η τρίτη πλευρά προκύπτει από το Πυθαγόρειο θεώρημα.

Καταλήγουμε έτσι στο τρίγωνο του σχήματος από το οποίο εύκολα πλέον βρίσκουμε

$$\sin\left(\sin^{-1}x\right)=x$$
$$\cos\left(\sin^{-1}x\right)=\sqrt{1-x^2}$$
$$\tan\left(\sin^{-1}x\right)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\cot\left(\sin^{-1}x\right)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$



6.1.9 Άσκηση [BOOK0614, 282]

Να απλοποιηθεί η παράσταση $y=\tan\left(\sin^{-1}y\right)$

6.1.10 Η παράγωγος του αντιστρόφου ημιτόνου

Προκειμένου να υπολογίσουμε την παράγωγο της $\sin^{-1}y$ εφαρμόζουμε τον γνωστό γενικό τύπο και έχουμε

$$\frac{d}{dy}\left(\sin^{-1}y\right)=\frac{1}{(d/dx)\sin x}=\frac{1}{\cos x}$$

όπου y=sinx. Επειδή $\cos^2x+\sin^2x=1$ έχουμε $\cos x=\sqrt{1-y^2}$. Απορρίπτουμε την αρνητική ρίζα.

Εχουμε

$$y=\sin\theta$$

$$\theta=\sin^{-1}y$$

Παραγωγίζοντας έχουμε

$$\frac{d\theta}{d\theta}=1=\frac{d\sin^{-1}y}{d\theta}=\frac{d\sin^{-1}y}{dy}\cdot\frac{dy}{d\theta}=\frac{d\sin^{-1}y}{dy}\cdot\frac{d\sin\theta}{d\theta}=\frac{d\sin^{-1}y}{dy}\cdot\cos\theta=1$$

Αρα

$$\frac{d\sin^{-1}y}{dy}=\frac{1}{\cos\theta}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Τελικά

$$\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1}x\right)=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}=\left(1-y^2\right)^{-1/2},-1<y<1$$

Παρατηρούμε ότι η παράγωγος της $\sin^{-1}y$ δεν ορίζεται στο $y=\pm1$ αλλά είναι "άπειρη" στο σημείο αυτό. Αυτό είναι σε συμφωνία με το σχήμα (6.1.3).

6.1.11 Παράδειγμα [HDP, 536]

Να ευρεθούν οι παράγωγοι των

$$\text{α. } y=\sin^{-1}(1/x) \qquad \text{β. } y=x\cdot\sin^{-1}2x$$

6.1.12 Παράδειγμα [MW, 282]

Να υπολογισθούν οι παράγωγοι

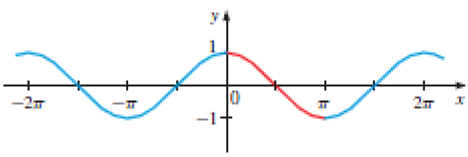
$$\textbf{1. } h(x)=\sin^{-1}\left(3y^2\right) \qquad \textbf{2. } f(x)=x\sin^{-1}2x \qquad \textbf{3. } (d/dx)\left(\sin^{-1}2x\right)^{3/2}$$

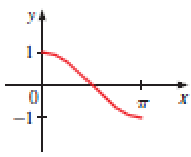
6.1.13 Παρατήρηση

Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι αν και η συνάρτηση $\sin^{-1}y$ ορίζεται με την βοήθεια τριγωνομετρικών συναρτήσεων, η παράγωγός της είναι μια αλγεβρική συνάρτηση. Θυμίζουμε ότι οι παράγωγοι τριγωνομετρικών συναρτήσεων είναι τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

6.2 Το αντίστροφο συνημίτονο

Η συνάρτηση $\cos^{-1}y$ ορίζεται με τρόπο ανάλογο όπως και η $\sin^{-1}y$. Συμβατικά επιλέγουμε ως πεδίο ορισμού το [0,π]

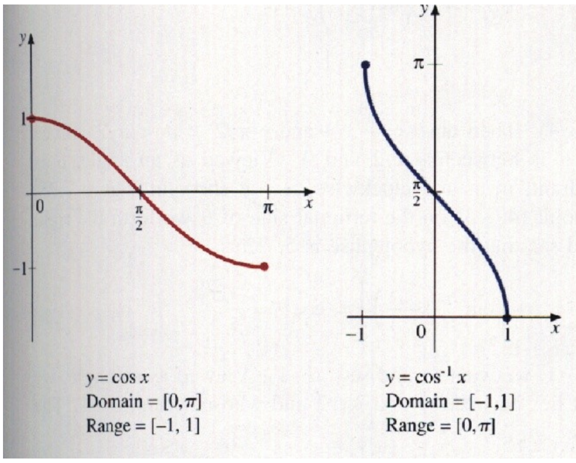




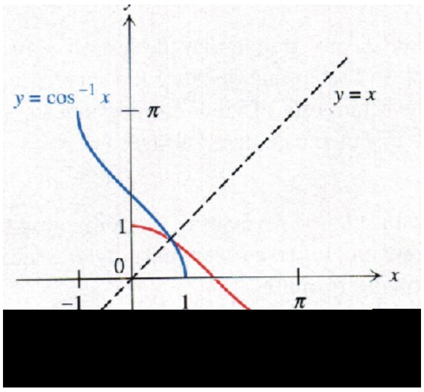
Οπότε η νέα συνάρτηση $y=\cos x$ με πεδίο ορισμού το [0,π] και πεδίο τιμών το [-1,1] είναι 1-1 και συνεπώς έχει αντίστροφη.

6.2.1 Γραφική Παράσταση

Η γραφική παράσταση της $\cos^{-1} y$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



Στο σχήμα που ακολουθεί



φαίνονται και οι δύο παραστάσεις στο ίδιο σύστημα αξόνων. Παρατηρούμε αυτό που έχουμε αναφέρει ότι δηλαδή οι γραφικές παραστάσεις μιας συνάρτησης και της αντίστροφής της είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y=x.

6.2.2 Αλλοι Συμβολισμοί

Στις σημειώσεις αυτές η συνάρτηση αντίστροφο ημίτονο θα συμβολίζεται ως $y = \cos^{-1} x$, *που είναι διάφορο* του $y = \dfrac{1}{\cos x}$. Στην βιβλιογραφία όμως απαντώνται και άλλοι συμβολισμοί όπως:

- **arccosx:** από τις λατινικές λέξεις arcus=τόξο και sinus=ημίτονο. Ουσιαστικά σημαίνει τόξο ημιτόνου x, δηλαδή το arcsinx σημαίνει εκείνο το τόξο που έχει ημίτονο x
- **τοξσυνx**: από τις ελληνικές λέξεις τόξο και συνημίτονο και σημαίνει τόξο συνημιτόνου x, τόξο που έχει συνημίτονο ίσο με x.
- $\mathrm{Cos}^{-1}x$: Επειδή πολλές φορές γίνεται σύγχυση μεταξύ του $y = \cos^{-1} x$ και του

$y=(\cos x)^{-1}=\dfrac{1}{\cos x}$ μερικοί συγγραφείς τελευταία χρησιμοποιούν, επί πλέον, το κεφαλαίο C για να δηλώσουν την συνάρτηση αντίστροφο ημίτονο οπότε σε αυτή την περίπτωση συμβολίζουν $\cos^{-1} x=\dfrac{1}{\cos x}$

6.2.3 Χρήσιμο Τρίγωνο

Για να μπορέσουμε τώρα να βρούμε τα

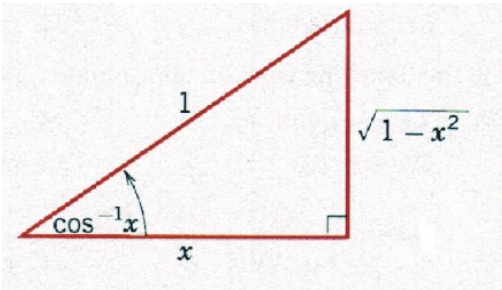
$$\begin{aligned}
&\sin\left(\cos^{-1} x\right)=?\\
&\cos\left(\cos^{-1} x\right)=?\\
&\tan\left(\cos^{-1} x\right)=?\\
&\cot\left(\cos^{-1} x\right)=?
\end{aligned}$$

γνωρίζοντας ότι $\cos\left(\cos^{-1} x\right)=x$ κατασκευάζουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο στο οποίο η μια οξεία γωνία είναι $\cos^{-1} x$.

Για να είναι το συνημίτονο αυτής της γωνίας ίσο με x θα πρέπει η προσκείμενη πλευρά να τεθεί ίση με x και η υποτείνουσα ίση με 1. Η τρίτη πλευρά προκύπτει από το Πυθαγόρειο θεώρημα.

Επομένως

$$\begin{aligned}
&\sin\left(\cos^{-1} x\right)=\sqrt{1-x^2}\\
&\cos\left(\cos^{-1} x\right)=1\\
&\tan\left(\cos^{-1} x\right)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\\
&\cot\left(\cos^{-1} x\right)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}$$



6.2.4 Παράδειγμα [BB, 509]

Έστω $-1\le x\le 1$. Να εκφρασθεί η $y=\sin\left(\cos^{-1} x\right)$ ως αλγεβρική συνάρτηση του x.

6.2.5 Η παράγωγος του αντιστρόφου συνημιτόνου

Η παράγωγος της $\cos^{-1} x$ ευρίσκεται με τον ίδιο τρόπο που βρήκαμε την παράγωγο της $(d/dx)\left(\sin^{-1} y\right)$. Πράγματι έχουμε

$$\frac{d}{dx}\cos^{-1} y=\frac{1}{(d/dx)\cos x}=\frac{1}{-\sin x}=\frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Αρα

$$\frac{d}{dx}\cos^{-1}x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

6.2.6 Παράδειγμα [BB, 513]

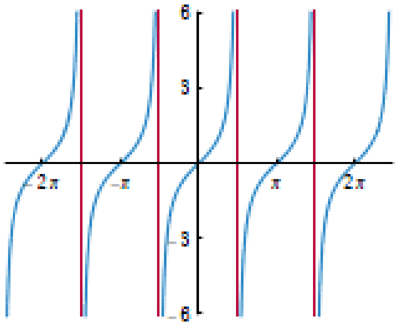
Να υπολογισθεί η παράγωγος της $y = x^3 \sin^{-1}x + \cos^{-1}\sqrt{x}$

6.2.7 Παράδειγμα [MW, 282]

Να υπολογισθεί η παράγωγος της $\tan\left(\cos^{-1}x\right)$

6.3 Η αντίστροφη εφαπτομένη

Η εφαπτομένη, δηλαδή η συνάρτηση $y = \tan x$ με πεδίο ορισμού R, $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$ και πεδίο τιμών το $(-\infty, \infty)$ και γραφική παράσταση



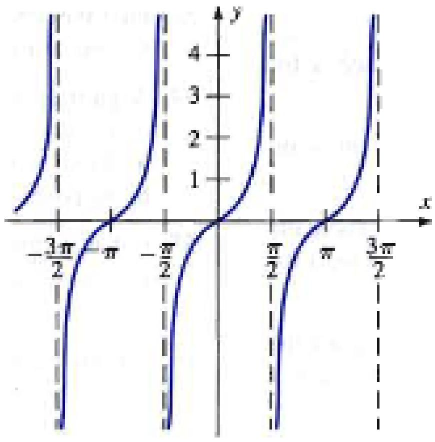
Δεν έχει αντίστροφη όπως προκύπτει από το κριτήριο της οριζόντιας γραμμής.

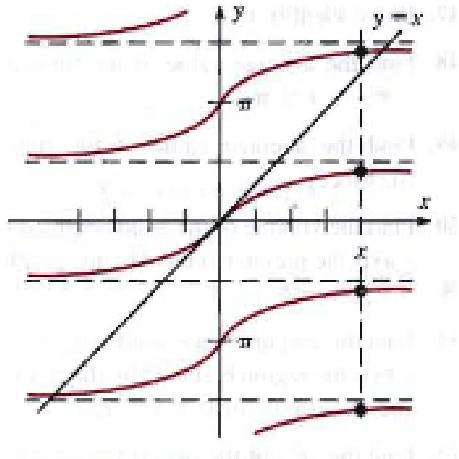
Αν εξετάσουμε τώρα τα άλλα κριτήρια ύπαρξης αντίστροφης διαπιστώνουμε ότι

…………………………..…..

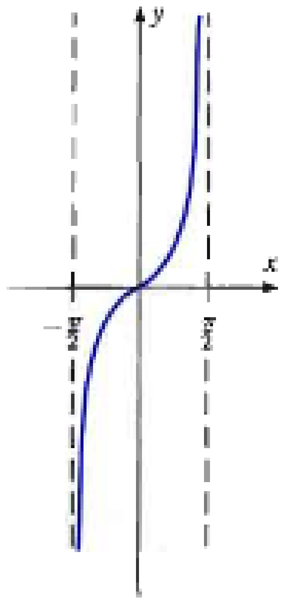
Σε ό,τι αφορά τώρα τις έννοιες Μονοτονία, Αρτιότητα, Συνέχεια, Διαφορισιμότητα, …. Της εφαπτομένης να θυμίσουμε ότι ….

Επί πλέον, αν θεωρήσουμε τα γραφικά της $y = \tan x$ και της αντίστροφής της σύμφωνα με τα ???





Παρατηρούμε ότι δεν ικανοποιείται το κριτήριο της κάθετης γραμμής.



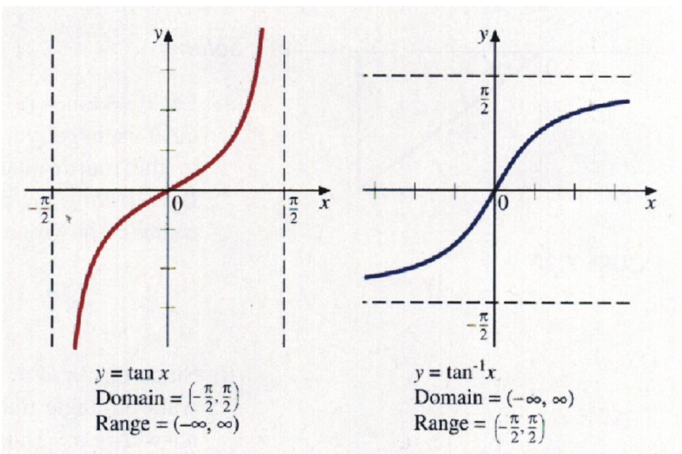
Για να ξεπεράσουμε αυτά τα προβλήματα και να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη αντίστροφης συνάρτησης για την συνάρτηση $y = \tan x$, όπως και προηγουμένως, ορίζουμε την συνάρτηση $y = \tan x$ με πεδίο ορισμού $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ και πεδίο τιμών $(-\infty, \infty)$.

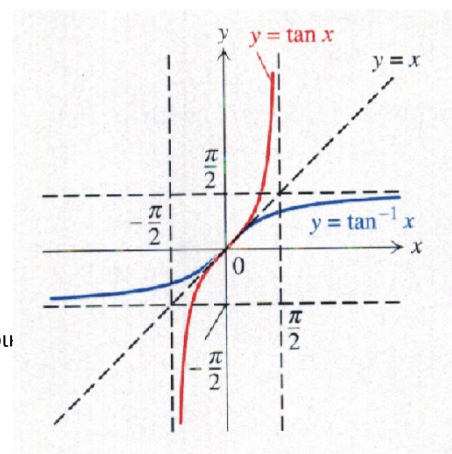
Η συνάρτηση αυτή τώρα ικανοποιεί και τα δύο κριτήρια, και αυτό της οριζόντιας γραμμής αλλά και αυτό της κάθετης γραμμής και επομένως η νέα συνάρτηση, δηλαδή η παλιά $y = \tan x$ αλλά ορισμένη στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ έχει αντίστροφη.

Επί πλέον η νέα συνάρτηση ικανοποιεί και τα άλλα κριτήρια σχετικά με την ύπαρξη αντίστροφης.

6.3.1 Γραφική Παράσταση

Οι παραστάσεις της tanx και $\tan^{-1} x$ φαίνονται στα παρακάτω σχήματα.





6.3.2 Αλλοι Συμβολισμοί

Στις σημειώσεις αυτές η συνάρτηση αντίστροφη εφαπτομένη θα συμβολίζεται ως $y = \tan^{-1} x$, *που είναι διάφορο* του $y = \dfrac{1}{\tan x}$. Στην βιβλιογραφία όμως απαντώνται και άλλοι συμβολισμοί όπως:

- **arctanx:** από τις λατινικές λέξεις arcus=τόξο και tangent=εφαπτομένη. Ουσιαστικά σημαίνει τόξο εφαπτομένης x, δηλαδή το arctanx σημαίνει εκείνο το τόξο που έχει εφαπτομένη x
- **τοξεφx**: από τις ελληνικές λέξεις τόξο και εφαπτομένη και σημαίνει τόξο εφαπτομένης x, τόξο που έχει εφαπτομένη ίση με x.
- $\mathrm{Tan}^{-1}x$: Επειδή πολλές φορές γίνεται σύγχυση μεταξύ του $y = \tan^{-1} x$ και του $y = (\tan x)^{-1} = \dfrac{1}{\tan x}$ μερικοί συγγραφείς τελευταία χρησιμοποιούν, επί πλέον, το κεφαλαίο T για να δηλώσουν την συνάρτηση αντίστροφη εφαπτομένη οπότε σε αυτή την περίπτωση συμβολίζουν $\tan^{-1} x = \dfrac{1}{\tan x}$

6.3.3 Παράδειγμα [BB, 506]

Να ευρεθούν

α. $\tan^{-1} 1$ β. $\tan^{-1} 0$ c. $\sin\left(\tan^{-1}\left(1/\sqrt{3}\right)\right)$ d. $\tan^{-1}\left(\tan(\pi/4)\right)$ e. $\tan^{-1}\left(\tan(5\pi/4)\right)$

6.3.4 Χρήσιμο Τρίγωνο

Για να μπορέσουμε τώρα να βρούμε τα

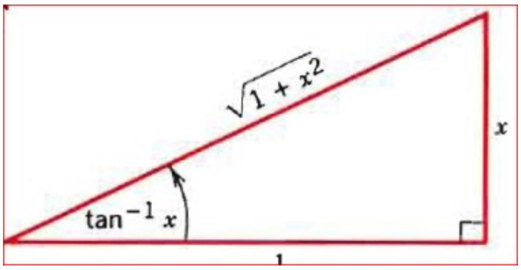
$$\begin{aligned}
&\sin\left(\tan^{-1} x\right) = ?\\
&\cos\left(\tan^{-1} x\right) = ?\\
&\tan\left(\tan^{-1} x\right) = ?\\
&\cot\left(\tan^{-1} x\right) = ?
\end{aligned}$$

γνωρίζοντας ότι $\tan\left(\tan^{-1} x\right) = x$ κατασκευάζουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο στο οποίο η μια οξεία γωνία είναι $\tan^{-1} x$.

Για να είναι το tan αυτής της γωνίας ίσο με x θα πρέπει η απέναντι πλευρά να τεθεί ίση με x και η προσκείμενη ίση με 1. Η τρίτη πλευρά προκύπτει από το Πυθαγόρειο θεώρημα.

Επομένως

$$\sin\left(\tan^{-1} x\right) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\cos\left(\tan^{-1} x\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\tan\left(\tan^{-1} x\right) = 1$$
$$\cot\left(\tan^{-1} x\right) = \frac{1}{x}$$



6.3.5 Η παράγωγος της αντίστροφης εφαπτομένης

Εργαζόμενοι όπως και πριν για την παράγωγο της αντίστροφης εφαπτομένης έχουμε

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1} y = \frac{1}{(d/dx)\tan x} = \frac{1}{\sec^2} = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$$

από όπου τελικά βρίσκουμε

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1} y = \frac{1}{1+y^2}$$

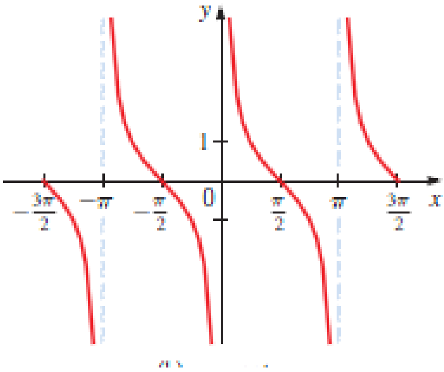
6.3.6 Παράδειγμα (MW 284)

Να ευρεθεί η παράγωγος της $f(x) = \frac{\tan^{-1}\sqrt{x}}{\cos^{-1} x}$ και να ευρεθεί το πεδίο ορισμού των f και f'.

6.3.7 Παράδειγμα [BB, 511]

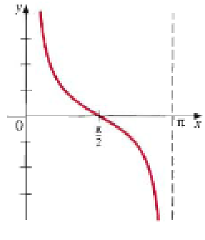
6.4 Η αντίστροφη συνεφαπτομένη

Η συνεφαπτομένη, δηλαδή η συνάρτηση $y = \cot x$ με πεδίο ορισμού R, $x \neq n\pi$ και πεδίο τιμών $(-\infty, \infty)$ έχει γραφική παράσταση την παρακάτω



Με την βοήθεια του κριτηρίου της οριζόντιας γραμμής διαπιστώνουμε εύκολα ότι δεν είναι συνάρτηση 1-1 και επομένως δεν έχει αντίστροφη.

Αν εξετάσουμε τώρα τα άλλα κριτήρια ύπαρξης αντίστροφης διαπιστώνουμε ότι …………………………..…..



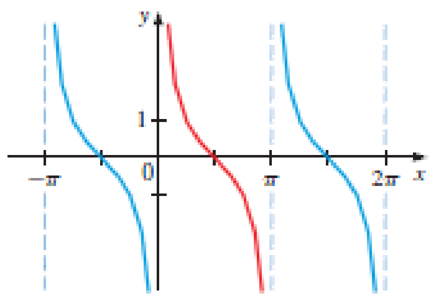
y = cot x
Domain = (0, π)
Range = (−∞, ∞)

Σε ό,τι αφορά τώρα τις έννοιες Μονοτονία, Αρτιότητα, Συνέχεια, Διαφορισιμότητα, …. της συνεφαπτομένης να θυμίσουμε ότι ….

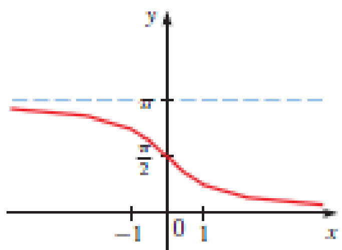
Ετσι, όπως και προηγουμένως, ορίζουμε μια νέα συνάρτηση, την $y = \cot x$ με πεδίο ορισμού $(0, \pi)$ και πεδίο τιμών $(-\infty, \infty)$, περιοριζόμαστε δηλαδή στο διάστημα $(0, \pi)$ οπότε η νέα συνάρτηση που ορίσαμε έχει αντίστροφη.

6.4.1 Γραφικές Παραστάσεις

Η γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων φαίνονται στα παρακάτω σχήματα



$y = \cot x,\ 0 < x < \pi$



$y = \cot^{-1} x$

Το σχήμα που ακολουθεί δείχνει την γραφική παράσταση των δύο συναρτήσεων στο ίδιο σύστημα αξόνων.

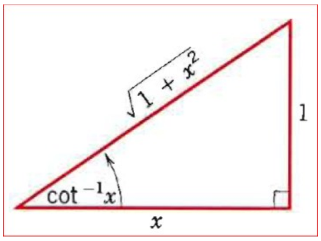
6.4.2 Αλλοι Συμβολισμοί

Στις σημειώσεις αυτές η συνάρτηση αντίστροφη συνεφαπτομένη θα συμβολίζεται ως $y = \cot^{-1} x$, *που είναι διάφορο* του $y = \dfrac{1}{\cot x}$. Στην βιβλιογραφία όμως απαντώνται και άλλοι συμβολισμοί όπως:

- **arcotx:** από τις λατινικές λέξεις arcus=τόξο και cotangent=συνεφαπτομένη. Ουσιαστικά σημαίνει τόξο συνεφαπτομένης x, δηλαδή το arcotx σημαίνει εκείνο το τόξο που έχει συνεφαπτομένη x
- **τοξσφχ**: από τα αρχικά των ελληνικών λέξεων τόξο και συνεφαπτομένη και σημαίνει τόξο συνεφαπτομένης x, τόξο που έχει συνεφαπτομένη ίση με x.
- $\mathrm{Cot}^{-1} x$: Επειδή πολλές φορές γίνεται σύγχυση μεταξύ του $y = \cot^{-1} x$ και του

$y=(\cot x)^{-1}=\dfrac{1}{\cot x}$ μερικοί συγγραφείς τελευταία χρησιμοποιούν, επί πλέον, το κεφαλαίο C για να δηλώσουν την συνάρτηση αντίστροφη συνεφαπτομένη οπότε σε αυτή την περίπτωση συμβολίζουν $\tan^{-1} x=\dfrac{1}{\tan x}$

6.4.3 Χρήσιμο Τρίγωνο



6.4.4 Η παράγωγος

Εργαζόμενοι με ανάλογο τρόπο έχουμε για $y=\cot x$ και $x=\cot^{-1} y$

$$\frac{d\cot^{-1} y}{dy}=\frac{1}{\frac{d}{dx}\cot x}=-\frac{1}{\csc^2 x}=-\sin^2 x=-\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x+\cos^2 x}=-\frac{1}{1+\cot^2 x}=-\frac{1}{1+y^2}$$

6.4.5 Παράδειγμα

6.4.6 Παράδειγμα

Να υπολογισθεί η παράγωγος της $f(x)=\cot^{-1}\dfrac{1+x}{1-x}$

6.5 Ταυτότητες

6.5.1 Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι

$$\sin^{-1} x+\cos^{-1} x=\frac{\pi}{2} \quad \text{για όλα τα } x\in[-1,1]$$

$$\tan^{-1} x+\cot^{-1} x=\frac{\pi}{2} \quad \text{για όλα τα πραγματικά } x$$

6.5.2 Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι

$$\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2} \quad \text{για όλα τα } x\in[-1,1]$$

$$\tan^{-1}x+\cot^{-1}x=\frac{\pi}{2} \quad \text{για όλα τα πραγματικά } x$$

6.5.3 Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι $2\sin^{-1}x=\cos^{-1}\left(1-2x^2\right), \quad x\geq 0$

6.5.4 Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι $\tan^{-1}\frac{x-1}{x+1}=2\tan\sqrt{x}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

6.5.5 Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι εάν $0\langle x\langle 1$ τότε $\sin^{-1}x+\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}=\frac{\pi}{2}$

6.5.6 Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι $\tan^{-1}x+\tan^{-1}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$

6.5.7 Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι, για $xy\neq 1$ ισχύει

$$\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$$

εάν το αριστερό μέρος βρίσκεται μεταξύ $-\pi/2$ και $\pi/2$. Στη συνέχεια να αποδειχθούν

α. $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$

β. $2\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7}=\frac{\pi}{4}$

6.6 Προβλήματα

6.6.1 Πρόβλημα

Σε μια κινηματογραφική αίθουσα η οθόνη έχει ύψος 1.5M ενώ κάτω μέρος βρίσκεται 0.5m πάνω από το επίπεδο των ματιών των θεατών. Σε ποια απόσταση πρέπει να σταθεί ένας θεατής που θέλει να έχει καλλίτερη ορατότητα;

6.6.2 Πρόβλημα [HDP, 543]

Η κεραία εκπομπής ενός τηλεοπτικού σταθμού έχει ύψος 10m και είναι τοποθετημένη στην κορυφή λόφου ύψους 330m. Σε ποια απόσταση πρέπει να τοποθετηθεί μια τηλεόραση Για να έχει την καλλίτερη λήψη; Σημειώνουμε ότι η τηλεόραση βρίσκεται σε ύψος 2m από το έδαφος. Υποθέτουμε ότι καλλίτερη λήψη έχουμε όταν η οπτική γωνία είναι μέγιστη.

6.6.3 Πρόβλημα [HDP, 546]

Ένα ελικόπτερο βρίσκεται αρχικά 2Km πάνω από έναν παρατηρητή που βρίσκεται στο έδαφος και στη συνέχεια κινείται οριζόντια με ταχύτητα 30m/s. Με ποιο ρυθμό μεταβάλλεται η γωνία παρατήρησης του ελικοπτέρου από τον παρατηρητή όταν το ελικόπτερο έχει διανύσει 0.5 Km.

Σημειώματα

Α) Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το υλικό της Μαθηματικής Ανάλυσης προέρχεται από τις σημειώσεις του Επίκουρου Καθηγητή κ. Γεωργίου Ν. Μπροδήμα για τις ανάγκες διδασκαλίας του ομώνυμου μαθήματος στο Τμήμα Φυσικής του Πανεπιστημίου Πατρών .

Β) Σημείωμα Αναφοράς

Γ) Σημείωμα Αδειοδότησης

Δ) Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- ✓ το Σημείωμα Αναφοράς
- ✓ το Σημείωμα Αδειοδότησης
- ✓ τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- ✓ το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφ’ όσον υπάρχει).