



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

Τίτλος Μαθήματος: Μαθηματική Ανάλυση

Ενότητα Β. Διαφορικός Λογισμός

Κεφάλαιο Β.05.3: Μέγιστα και Ελάχιστα

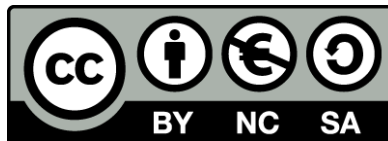
Όνομα Καθηγητή: Γεώργιος Ν. Μπροδήμας

Τμήμα Φυσικής

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά **ΠΠ**
μαθήματα

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Πίνακας Περιεχομένων

5.3	Μέγιστα Ελάχιστα.....	4
5.3.1	Πρόβλημα	4
5.3.2	Πρόβλημα	4
5.3.3	Πρόβλημα	4
5.3.4	Πρόβλημα	4
5.3.5	Παράδειγμα.....	4
5.3.6	Πρόβλημα	4
5.3.7	Πρόβλημα	4
5.3.8	Πρόβλημα	4
5.3.9	Πρόβλημα	5
5.3.10	Πρόβλημα	5
5.3.11	Πρόβλημα	5
5.3.12	Πρόβλημα	5
5.3.13	Παράδειγμα.....	5
5.3.14	Πρόβλημα	5
5.3.15	Πρόβλημα	5
5.3.16	Πρόβλημα	5
5.3.17	Πρόβλημα	5
5.3.18	Πρόβλημα	6
5.3.19	Πρόβλημα	6
5.3.20	Πρόβλημα	6
5.3.21	Πρόβλημα	6
5.3.22	Πρόβλημα	6
5.3.23	Πρόβλημα	6
5.3.24	Πρόβλημα	6
5.3.25	Πρόβλημα	6
5.3.26	Πρόβλημα	7
5.3.27	Πρόβλημα	7
5.3.28	Πρόβλημα	7
5.3.29	Πρόβλημα	7
	Από την Φυσική.....	7
5.3.30	Πρόβλημα	7
5.3.31	Πρόβλημα	8
5.3.32	Πρόβλημα	8

5.3 Μέγιστα Ελάχιστα

5.3.1 Πρόβλημα

Να ευρεθούν οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου κουτιού με το ελάχιστο κόστος εάν το κόστος κατασκευής είναι 10 cents ανά τ.μ. ο πυθμένας, 5 cents ανά τ.μ. οι πλευρές και 7 cents ανά τ.μ. η οροφή. Ο όγκος πρέπει να είναι 2 κ.μ. και το ύψος 1 μ.

5.3.2 Πρόβλημα

Για την κατασκευή κυλινδρικών δοχείων γάλακτος ορισμένου τύπου χρησιμοποιούνται 96cm^2 χαρτιού. Οι διαστάσεις των δοχείων είναι τέτοιες ώστε να χωράνε τον μέγιστο δυνατό όγκο γάλακτος. Να βρεθούν η ακτίνα R και το ύψος h του κυλίνδρου.

5.3.3 Πρόβλημα

Να ευρεθούν οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου κουτιού που να έχει το ελάχιστο κόστος και του οποίου το κατασκευαστικό κόστος είναι 1.0 €/m^2 η επιφάνεια του πυθμένα, 5 €/m^2 οι πλευρικές επιφάνειες και 7 €/m^2 η πάνω επιφάνεια και του οποίου το ύψος είναι 1m. Ο όγκος πρέπει να είναι $V=2\text{m}^3$.

5.3.4 Πρόβλημα

Ένα κομμάτι πάγου έχει σχήμα κυλινδρικό και όγκο $V = 400\text{ cm}^3$. Να ευρεθούν η ακτίνα και το ύψος που πρέπει να έχει ο κύλινδρος ώστε ο πάγος να αργήσει όσο το δυνατόν να λιώσει.

5.3.5 Παράδειγμα

Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα δοχείο, χωρητικότητας 1lt, σε σχήμα ορθού κυκλικού κυλίνδρου. Να ευρεθούν οι διαστάσεις με το μικρότερο κόστος.

5.3.6 Πρόβλημα

Μία σκάφη πρόκειται να κατασκευασθεί από τρία μεταλλικά φύλλα το καθένα πλάτους 1 m και μήκους 6 m συν τα πλευρικά τοιχώματα που έχουν το σχήμα του τραπεζοειδούς. Να ευρεθεί η γωνία που πρέπει να σχηματίζουν τα τρία φύλλα μεταξύ τους ώστε η χωρητικότητα της σκάφης να είναι μέγιστη.

5.3.7 Πρόβλημα

Να ευρεθούν η ακτίνα της βάσης και το ύψος ενός ορθού κυκλικού κυλίνδρου που είναι εγγεγραμμένος σε μία σφαίρα ακτίνας R και έχει τον μέγιστο δυνατό όγκο.

5.3.8 Πρόβλημα

Από όλα τα ορθογώνια τα εγγεγραμμένα σε κύκλο μοναδιαίας ακτίνας να ευρεθεί αυτό που έχει:

- α) το μέγιστο εμβαδόν
- β) την μέγιστη περίμετρο.

5.3.9 Πρόβλημα

Από όλα τα ορθογώνια τα εγγεγραμμένα σε ημικύκλιο ακτίνας 2, να ευρεθεί εκείνο με το μεγαλύτερο εμβαδό. Ποιές οι διαστάσεις του;

5.3.10 Πρόβλημα

Να δειχθεί ότι από όλα τα ορθογώνια με περίμετρο 8m αυτό με το μεγαλύτερο εμβαδό είναι τετράγωνο.

5.3.11 Πρόβλημα

Το σχήμα δείχνει ένα ορθογώνιο εγγεγραμμένο σε ισοσκελές τρίγωνο του οποίου η υποτείνουσα έχει μήκος 2.

1. Να εκφραστεί η y συντεταγμένη του σημείου P ως συνάρτηση του x
2. Να εκφραστεί το εμβαδό του ορθογωνίου ως συνάρτηση του x
3. Να ευρεθεί το μέγιστο εμβαδό που μπορεί να έχει ένα τέτοιο ορθογώνιο καθώς και οι διαστάσεις του.

5.3.12 Πρόβλημα

Ποιά η ελάχιστη περίμετρος ενός ορθογωνίου με εμβαδό 16 και ποιές οι διαστάσεις του;

5.3.13 Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι από όλα τα ορθογώνια με περίμετρο 8 αυτό που έχει το μεγαλύτερο εμβαδό είναι τετράγωνο

5.3.14 Πρόβλημα

Ένα ισοσκελές τραπέζιο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R . Η μία βάση έχει μήκος $2R$. Να ευρεθεί το μήκος της άλλης βάσης αν το εμβαδόν είναι μέγιστο.

5.3.15 Πρόβλημα

Να προσδιορισθούν οι διαστάσεις του ορθογωνίου με το μεγαλύτερο εμβαδόν που να είναι εγγεγραμμένο σε ένα 3-4-5 ορθογώνιο τρίγωνο και η μία πλευρά του να εφάπτεται στην υποτείνουσα

5.3.16 Πρόβλημα

Να ευρεθεί ο μέγιστος όγκος ενός κυλίνδρου εγγεγραμμένου σε ορθό κυκλικό κώνο ύψους h και ακτίνας βάσης r αν δίδεται ότι:

- I. ο άξονας συμμετρίας του κυλίνδρου συμπίπτει με τον άξονα συμμετρίας του κώνου και,
- II. το ύψος του κυλίνδρου δεν είναι μικρότερο από $\frac{1}{2} \cdot h$.

5.3.17 Πρόβλημα

Να ευρεθεί ο όγκος του μεγαλύτερου ορθού κυκλικού κώνου που είναι εγγεγραμμένος σε σφαίρα ακτίνας 3.

5.3.18 Πρόβλημα

Οι πλευρές ενός τριγώνου έχουν μήκος a και b και η μεταξύ τους γωνία είναι θ . Για ποια τιμή της γωνίας θ το εμβαδό του τριγώνου είναι μέγιστο;

5.3.19 Πρόβλημα

Δίδεται τραπέζιο με πλευρές a , a , a και x . Να βρεθεί το x ώστε το τραπέζιο να έχει μέγιστο εμβαδόν.

5.3.20 Πρόβλημα

Να δειχθεί ότι το ισοσκελές τρίγωνο με το μέγιστο εμβαδόν που εγγράφεται σε κύκλο σταθερής ακτίνας a είναι ισοπλευρο.

5.3.21 Πρόβλημα

Να ευρεθεί το ορθογώνιο με το μεγαλύτερο εμβαδόν που είναι εγγεγραμμένο σε ημικύκλιο ακτίνας r .

5.3.22 Πρόβλημα

Ένα ορθογώνιο πρόκειται να εγγραφεί στην έλλειψη

$$4x^2 + y^2 = 4$$

έτσι ώστε οι πλευρές του να είναι παράλληλες προς τους άξονες. Να ευρεθούν τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου έτσι ώστε αυτό να έχει το μέγιστο εμβαδόν.

5.3.23 Πρόβλημα

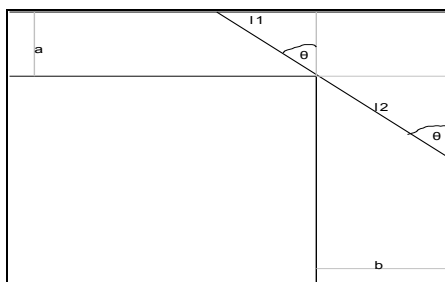
Ένα ορθογώνιο έχει την βάση πάνω στον άξονα των x και τις άλλες δύο κορυφές του στην παραβολή $y = 12 - x^2$. Ποιό το μέγιστο εμβαδό που μπορεί να έχει το ορθογώνιο και ποιές οι διαστάσεις του;

5.3.24 Πρόβλημα

Να ευρεθεί το πλησιέστερο σημείο της παραβολής $y^2 = 2x$ στο σημείο $(1,4)$.

5.3.25 Πρόβλημα

Ένας διάδρομος πλάτους a μέτρων σχηματίζει ορθή γωνία με ένα διάδρομο πλάτους b μέτρων. Ποίο είναι το μέγιστο Ποίο είναι το μέγιστο μήκος l μίας δοκού που χωράει να περάσει από τον διάδρομο αυτό; (Θεωρούμε ότι η δοκός καθώς μεταφέρεται παραμένει οριζόντια).



5.3.26 Πρόβλημα

Ένα σύρμα μήκους l κόβεται σε δύο κομμάτια. Με το ένα κομμάτι φτιάχνουμε ένα τετράγωνο και με το άλλο ένα ισόπλευρο τρίγωνο. Πως πρέπει να κοπεί το σύρμα ώστε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων να είναι α) μέγιστο β) ελάχιστο;

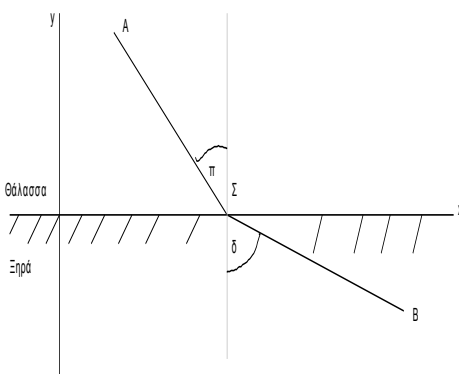
5.3.27 Πρόβλημα

Ένα αμφίβιο όχημα, που κινείται με ταχύτητα u_1 στην θάλασσα και με ταχύτητα u_2 στην ξηρά κινείται από το σημείο $A(x_A, y_A)$ που βρίσκεται στην ξηρά στο σημείο $B(x_B, y_B)$ που βρίσκεται στην ξηρά. Θεωρούμε ότι ο άξονας Ox συμπίπτει με την διαχωριστική γραμμή ξηράς - θάλασσας.

α. Να ευρεθεί ποια σχέση πρέπει να ικανοποιεί η συντεταγμένη x του σημείου Σ , στο οποίο το όχημα θα βγει στην ξηρά, ώστε η διαδρομή $A\Sigma B$ να διανυθεί στον ελάχιστο χρόνο.

β. Αν π και δ είναι οι γωνίες που σχηματίζουν τα ευθύγραμμα τμήματα $A\Sigma$ και ΣB με την κάθετο

προς τον άξονα Ox στο σημείο Σ δείξτε ότι ο χρόνος διαδρομής είναι ακρότατος όταν $\frac{\sin \pi}{\sin \delta} = \frac{u_1}{u_2}$.



5.3.28 Πρόβλημα

Μεταξύ δύο πόλεων που τις συμβολίζουμε με A και B πρόκειται να κατασκευασθεί υπόγειος αγωγός. Η μελέτη του εδάφους δίνει ότι το κόστος κατασκευής ανά Km είναι c_1 στην περιοχή I ($y > 0$) και c_2 στην περιοχή II όπου $y \leq 0$. Ποία πρέπει να είναι η διαδρομή έτσι ώστε να ελαχιστοποιηθεί το ολικό κόστος κατασκευής;

5.3.29 Πρόβλημα

Να αποδειχθεί ότι η γωνία πρόσπτωσης ισούται με την γωνία ανάκλασης.

Από την Φυσική

5.3.30 Πρόβλημα

Η φωτεινότητα μιας σημειακής φωτεινής πηγής είναι ανάλογη της έντασης της πηγής και αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης μεταξύ πηγής και σημείου παρατήρησης. Εάν δύο σημειακές φωτεινές πηγές βρίσκονται σε μεταξύ τους απόσταση $10m$ και η ένταση της μιας είναι

τετραπλάσια της έντασης της άλλης να ευρεθεί το σκοτεινότερο σημείο πάνω στην ευθεία που ενώνει τις δύο πηγές.

5.3.31 Πρόβλημα

Δίδεται τετράγωνο πλευρά a . Από κάθε κορυφή του αφαιρούμε ένα τετραγωνάκι πλευράς x . Να βρεθεί ο μέγιστος όγκος της ανοικτής δεξαμενής που μπορεί να κατασκευασθεί με την αναδίπλωση του υπολοίπου τετραγώνου.

5.3.32 Πρόβλημα

Κάποια χρονική στιγμή ένα ιστιοπλοϊκό σκάφος βρίσκεται 20 Km νότια ενός φορτηγού πλοίου. Το ιστιοπλοϊκό ταξιδεύει ανατολικά με ταχύτητα 20 Km/h ενώ το φορτηγό ταξιδεύει νότια με ταχύτητα 40 Km/h. Εάν η ορατότητα είναι 10 Km θα μπορέσει το ένα πλοίο να "δει" το άλλο; όπου a είναι σταθερά με τιμή περίπου 5.29×10^{-11} ενώ η απόσταση r μετριέται σε μέτρα. Να ευρεθεί η πιο πιθανή απόσταση του ηλεκτρονίου από το κέντρο.

Σημειώματα

A) Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το υλικό της Μαθηματικής Ανάλυσης προέρχεται από τις σημειώσεις του Επίκουρου Καθηγητή κ. Γεωργίου Ν. Μπροδήμα για τις ανάγκες διδασκαλίας του ομώνυμου μαθήματος στο Τμήμα Φυσικής του Πανεπιστημίου Πατρών .

B) Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Γεώργιος Ν. Μπροδήμας. «Μαθηματική Ανάλυση. Ενότητα Β.053: Μέγιστα και Ελάχιστα». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

<https://eclass.upatras.gr/courses /PHY1912/>

Γ) Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/> Ως Μη Εμπορική ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Δ) Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- ✓ το Σημείωμα Αναφοράς
- ✓ το Σημείωμα Αδειοδότησης
- ✓ τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- ✓ το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφ' όσον υπάρχει).