



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

Τίτλος Μαθήματος: Μαθηματική Ανάλυση

Ενότητα Β. Διαφορικός Λογισμός

Κεφάλαιο Β.05.2: Ρυθμός Μεταβολής

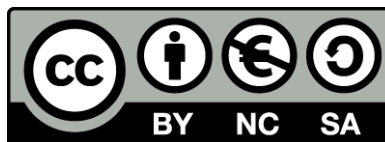
Όνομα Καθηγητή: Γεώργιος Ν. Μπροδήμας

Τμήμα Φυσικής

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά **ΠΠ**
μαθήματα

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Πίνακας Περιεχομένων

8.5.2	Προβλήματα Ρυθμού Μεταβολής.....	4
8.5.2.1	Πρόβλημα.....	4
8.5.2.2	Πρόβλημα.....	4
8.5.2.3	Παράδειγμα.....	4
8.5.2.4	Παράδειγμα.....	4
8.5.2.5	Παράδειγμα.....	4
8.5.2.6	Παράδειγμα.....	4
8.5.2.7	Παράδειγμα.....	4
8.5.2.8	Πρόβλημα.....	5
8.5.2.9	Πρόβλημα.....	5
8.5.2.10	Πρόβλημα.....	5
8.5.2.11	Παράδειγμα.....	5
8.5.2.12	Πρόβλημα.....	5
8.5.2.13	Πρόβλημα.....	5
8.5.2.14	Πρόβλημα.....	6
8.5.2.15	Πρόβλημα.....	6
8.5.2.16	Πρόβλημα.....	6
8.5.2.17	Πρόβλημα.....	6
8.5.2.18	Πρόβλημα.....	6
8.5.2.19	Πρόβλημα.....	7
8.5.2.20	Πρόβλημα.....	7
8.5.2.21	Πρόβλημα.....	7
8.5.2.22	Πρόβλημα.....	7
8.5.2.23	Πρόβλημα.....	7

8.5.2 Προβλήματα Ρυθμού Μεταβολής

8.5.2.1 Πρόβλημα

Ένας σφαιρικός αεροθάλαμος διογκώνεται. Εάν η ακτίνα του αυξάνει με ρυθμό 5 cm/min να ευρεθεί ο ρυθμός αύξησης του όγκου όταν $r=5$ cm. .

8.5.2.2 Πρόβλημα

Ένας κύκλος ακτίνας r mm έχει εμβαδόν $A = \pi r^2$. Να ευρεθεί ο ρυθμός αύξησης του εμβαδού συναρτήσει της ακτίνας για $r_0 = 5$ και να ερμηνευθεί γεωμετρικά η απάντηση.

8.5.2.3 Παράδειγμα

Το εμβαδό ενός κύκλου σχετίζεται με την διάμετρό του με την σχέση:

$$A = \frac{\pi}{4} D^2$$

Με ποίο ρυθμό μεταβάλλεται το εμβαδό σε σχέση με την διάμετρο, όταν η διάμετρος είναι 10 m;

8.5.2.4 Παράδειγμα

Να ευρεθεί το ποσοστό αύξησης του εμβαδού ενός κύκλου όταν η ακτίνα του αυξάνεται κατά 2%.

8.5.2.5 Παράδειγμα

Εστω $A = \pi r^2$ το εμβαδό κύκλου ακτίνας r .

1. Να υπολογισθεί το dA/dr για $r=2$ και $r=5$.
2. Γιατί το dA/dr είναι μεγαλύτερο για $r=5$.

8.5.2.6 Παράδειγμα

Ποιός ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού ενός ορθογωνίου όταν η μια πλευρά έχει μήκος 10 cm και αυξάνεται με ρυθμό 2cm/s και η άλλη πλευρά έχει μήκος 8 cm και μειώνεται με ρυθμό 3 cm/s.

8.5.2.7 Παράδειγμα

Ένα αεροπλάνο πετά οριζόντια με ταχύτητα 600 Km/h και περνά ακριβώς πάνω από έναν ραδιοφάρο σε ύψος 5Km. Ποιός ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης μεταξύ του αεροπλάνου και του ραδιοφάρου 1 m μετά το πέρασμα;

8.5.2.8 Πρόβλημα

Ο πληθυσμός μιας πόλης αυξάνεται με ρυθμό 10.000 άτομα/ ημέρα στις 30 Μαρτίου 1984. Η έκταση της πόλης αυτής αυξάνεται επίσης έτσι ώστε να διατηρεί την αναλογία 1 ανά 1.000 άτομα. Πόσο γρήγορα αυξάνεται ανά ημέρα η έκταση της πόλης αυτής κατά την ημερομηνία αυτή;

8.5.2.9 Πρόβλημα

Μία σκάλα μήκους 13 μέτρων ολισθαίνει κατά μήκος της πλευράς τοίχου ενός κτιρίου. Εάν το κάτω μέρος της σκάλας απομακρύνεται από τον τοίχο του κτιρίου με ρυθμό 0.1 m/sec ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας που σχηματίζει η σκάλα με το έδαφος όταν η κορυφή της σκάλας απέχει από το έδαφος 12m;

8.5.2.10 Πρόβλημα

Ένας ηλεκτρικός λαμπτήρας βρίσκεται σε στύλο ύψους $h=5\text{m}$. Σε απόσταση $l=3\text{m}$ από το λαμπτήρα και από το ίδιο ύψος, ρίχνεται χωρίς αρχική ταχύτητα μία μπάλα. Να υπολογισθεί η ταχύτητα της σκιάς της μπάλας στο έδαφος.

8.5.2.11 Παράδειγμα

Ο Α και ο Β κινούνται σε ευθείες που τέμνονται σε ορθή γωνία. Ο Α πλησιάζει την τομή με ρυθμό 2m/sec, ενώ ο Β απομακρύνεται από αυτήν με ρυθμό 1m/sec. Με ποιο ρυθμό μεταβάλλεται η γωνία θ όταν ο Α βρίσκεται 10m και ο Β 20m από την τομή;

8.5.2.12 Πρόβλημα

Ένα αυτοκίνητο ξεκινά από την πόλη Α με βόρεια κατεύθυνση και με μέση ταχύτητα 40 Km/h. Την ίδια χρονική στιγμή ένα άλλο αυτοκίνητο ξεκινά από την πόλη Β, που απέχει 50 Km από την πόλη Α, και κινείται νότια με μέση ταχύτητα 80 Km/h. Να ευρεθεί ο ρυθμός αύξησης της απόστασης μεταξύ των δύο αυτοκινήτων 1 ώρα αργότερα.

8.5.2.13 Πρόβλημα

Ένα αερόστατο ανυψώνεται κατακόρυφα από το έδαφος και ένας παρατηρητής βρίσκεται 500 από το σημείο

ανύψωσης. Την στιγμή που η γωνία παρατήρησης είναι $\pi/4$ η αυξάνει με ρυθμό 0.14 rad/min . Με ποιο ρυθμό ανυψώνεται το αερόστατο εκείνη την στιγμή ?

8.5.2.14 Πρόβλημα

Μια τηλεοπτική κάμερα απέχει 30 m από την ευθεία τερματισμού ενός αγώνα αυτοκινήτων και παρακολουθεί το αυτοκίνητο που προηγείται καθώς αυτό πλησιάζει την γραμμή τερματισμού. Εάν το αυτοκίνητο πλησιάζει με ταχύτητα 150 Km/h να ευρεθεί ο ρυθμός (ακτίνα ανα δευτερόλεπτο) με τον οποίο περιστρέφεται η κάμερα την στιγμή που το αυτοκίνητο βρίσκεται 40 m από την γραμμή τερματισμού.

8.5.2.15 Πρόβλημα

Ένα μπαλόνι υφώνεται κατακόρυφα από ένα σημείο A του εδάφους με ταχύτητα 5 m/sec . Ένα σημείο B στο έδαφος απέχει 20 m από το A . Όταν το μπαλόνι φθάσει σε ύψος 15 m με ποίο ρυθμό θα μεταβάλλεται:

- α. η απόσταση του μπαλονιού από το σημείο B ;
- β. η γωνία μεταξύ εδάφους και άξονα παρατηρητή-μπαλονιού

8.5.2.16 Πρόβλημα

Να ευρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της στάθμης του υγρού σε ένα κυλινδρικό δοχείο εάν αντλούμε με ρυθμό 3.000 L/min ?

8.5.2.17 Πρόβλημα

Μια δεξαμενή έχει σχήμα ορθού κυκλικού κώνου. Το ύψος είναι $h=10 \text{ m}$ και η ακτίνα της βάσης $R=4 \text{ m}$. Στη δεξαμενή χύνεται νερό με ρυθμό $5 \text{ m}^3/\text{min}$. Με ποία ταχύτητα ανεβαίνει η στάθμη του νερού τη στιγμή που το βάθος του είναι 5 m όταν α) η κορυφή του κώνου είναι προς τα πάνω β) η κορυφή του κώνου είναι προς τα κάτω.

8.5.2.18 Πρόβλημα

Ένα κυλινδρικό δοχείο σταθερού όγκου περιέχει ζεστό υγρό. Να ευρεθούν οι διαστάσεις του δοχείου ώστε το περιεχόμενο υγρό να αργήσει όσο το δυνατόν να κρυώσει.

8.5.2.19 Πρόβλημα

Θεωρούμε κυκλικό κύλινδρο με μεταβλητές διαστάσεις. Θεωρούμε ακόμη ότι η ακτίνα r και το ύψος h μεταβάλλονται με τέτοιο τρόπο ώστε ο όγκος V να παραμένει σταθερός. Να ευρεθεί ο συντελεστής μεταβολής του h συναρτήσει του r .

8.5.2.20 Πρόβλημα

Να μελετηθεί η αύξηση του εμβαδού ενός τετραγώνου πλευράς x cm όταν η πλευρά αυξάνεται κατά μονάδα. Με την βοήθεια της παραγώγου να παρασταθεί γραφικά η μεταβολή αυτή.

8.5.2.21 Πρόβλημα

Οι ακμές ενός κύβου διαστέλλονται με ρυθμό 1 cm/sec . Ποία η ταχύτητα μεταβολής του όγκου του κύβου την στιγμή που το μήκος της ακμής είναι: α) 5 cm , β) 10 cm , γ) $x \text{ cm}$.

8.5.2.22 Πρόβλημα

Οι δύο πλευρές ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου απομακρύνονται με ρυθμό 2 cm/sec ενώ οι δύο άλλες πλευρές πλησιάζουν με τέτοιο τρόπο ώστε το σχήμα να παραμένει ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με σταθερό εμβαδόν. Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής της περιμέτρου P όταν το αρχικό μήκος της αυξανόμενης πλευρά είναι 5 cm ;

8.5.2.23 Πρόβλημα

Ενας σφαιρικός αεροθάλαμος φουσκώνεται έτσι ώστε, την χρονική στιγμή t (που μετρείται σε sec) η ακτίνα του είναι 21 cm .

1. Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής της επιφάνειά του από $t=1$ έως $t=2$;
2. Με ποιο στιγμιαίο ρυθμό αυξάνεται η επιφάνειά του όταν $t=2$;

Σημειώματα

A) Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το υλικό της Μαθηματικής Ανάλυσης προέρχεται από τις σημειώσεις του Επίκουρου Καθηγητή κ. Γεωργίου Ν. Μπροδήμα για τις ανάγκες διδασκαλίας του ομώνυμου μαθήματος στο Τμήμα Φυσικής του Πανεπιστημίου Πατρών .

B) Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Γεώργιος Ν. Μπροδήμας. «Μαθηματική Ανάλυση. Ενότητα Β.05.2: Ρυθμός Μεταβολής». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <https://eclass.upatras.gr/courses /PHY1912/>

Γ) Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/> Ως Μη Εμπορική ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Δ) Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- ✓ το Σημείωμα Αναφοράς
- ✓ το Σημείωμα Αδειοδότησης
- ✓ τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- ✓ το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφ' όσον υπάρχει).