ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΉΣ

ΘΕΩΡΙΑ ΟΜΑΔΩΝ
ΚΑΙ
ΤΕΛΕΣΤΩΝ

Δημήτρης Σουρλάς
Αναπλ. Καθηγητής

Πάτρα 2012

Email: dsourlas@physics.upatras.gr

www.physics.upatras.gr/

Πίνακας περιεχομένων

ΜΕΡΟΣ Α

ΘΕΩΡΙΑ ΟΜΑΔΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η έννοια της αλγεβρικής δομής της **ομάδας** εμφανίστηκε στα μαθηματικά στις αρχές του 19ου αιώνα. Η ανάπτυξη της αντίστοιχης θεωρίας οφείλεται στην πρωτοποριακή συμβολή των μαθηματικών Gauss, Cauchy, Abel, Hamilton, Galois, Sylvester, Caley και άλλων. Όμως η θεωρία αυτή δεν βρήκε εφαρμογή στη φυσική παρά μόνο ύστερα από την θεμελίωση της κβαντομηχανικής το 1925.

Η θεωρία των ομάδων έγινε χρήσιμη στη φυσική από τη στιγμή που διαπιστώθηκε ότι οι **μετασχηματισμοί συμμετρίας**, που αφήνουν ένα φυσικό σύστημα αναλλοίωτο, αποτελούν ομάδα. Η έννοια της συμμετρίας δεν είναι βέβαια καινούργια. Ήταν γνωστό ότι το ανθρώπινο σώμα παρουσιάζει συμμετρία ως προς επίπεδο, ότι η σφαίρα είναι ίσως το πιο συμμετρικό σχήμα, ότι ο κύβος έχει αρκετή συμμετρία κ.λ.π. Οι γεωμετρικές συμμετρίες ήταν οι πρώτες που αναγνωρίστηκαν και η εφαρμογή της θεωρίας των ομάδων ήταν π.χ. στην κρυσταλλογραφία πιο άμεση. Η αναγνώριση των δυναμικών συμμετριών, δηλ. εκείνων που αφήνουν τις εξισώσεις της κίνησης αναλλοίωτες, ήρθε αργότερα.

Στα πλαίσια της κλασικής φυσικής τα αποτελέσματα της θεωρίας των ομάδων είναι σχεδόν προφανή. Στην κβαντομηχανική τα αποτελέσματα υπήρξαν σχεδόν αναπάντεχα. Εδώ οι συμμετρίες γεννούν μετασχηματισμούς, οι οποίοι αφήνουν αναλλοίωτο τον τελεστή του Hamilton. Η αναγνώριση τέτοιων συμμετριών διευκολύνει πολύ στη λύση προβλημάτων της κβαντομηχανικής.

Η θεωρία ομάδων αναγνωρίζεται σήμερα από όλους τους φυσικούς σαν πάρα πολύ χρήσιμο εργαλείο ιδιαίτερα στις εξής περιπτώσεις:

α) Όταν υπάρχει γεωμετρική συμμετρία, όπως π.χ. στις περιπτώσεις συμμετρικών μορίων ή στην κρυσταλλογραφία.

β) Όταν το σύστημα χαρακτηρίζεται από μεγάλο βαθμό δυναμικής συμμετρίας, όπως π.χ. το πρόβλημα του ατόμου του υδρογόνου. Με την θεωρία των ομάδων αποφεύγονται πολύπλοκες πράξεις.

γ) Όταν θέλουμε να κατασκευάσουμε τις εξισώσεις κινήσεως. Τότε οι συμμετρίες χρησιμοποιούνται σαν περιορισμοί που πρέπει αναγκαστικά να πληρούν οι υπό κατασκευήν εξισώσεις, π.χ. οι συναρτήσεις Lagrange και Hamilton, που περιγράφουν συστήματα της κβαντικής θεωρίας, θα πρέπει να είναι αναλλοίωτοι ως προς τους μετασχηματισμούς Lorentz της ειδικής θεωρίας σχετικότητας.

δ) Όταν το σύστημα έχει κατά προσέγγιση συμμετρίες. Τότε η αναγνώριση και χρησιμοποίηση τους μας βοηθάει να διαλέξουμε την κατάλληλη βάση, η οποία μειώνει αρκετά τις διαστάσεις των αναγκαίων πινάκων

Τελειώνοντας την μικρή αυτή εισαγωγή πρέπει να πούμε ότι ο φυσικός δεν ενδιαφέρεται για την αφηρημένη θεωρία των ομάδων, όπως ο μαθηματικός, αλλά κυρίως για την **θεωρία αναπαραστάσεων**, (**representation**), των αφηρημένων ομάδων. Όμως για λόγους ευνόητους πρέπει και ο φυσικός να ασχοληθεί έστω και λίγο με την αφηρημένη έννοια της ομάδας. Γι' αυτό είναι απαραίτητο να εισάγουμε τις βασικές μαθηματικές έννοιες που χρειάζονται για την κατανόηση των αναπαραστάσεων.

1. ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΕΣ ΟΜΑΔΕΣ

1.1 Ορισμός της Ομάδας.

Ας θεωρήσουμε το σύνολο των ακεραίων αριθμών $\boldsymbol{Z}=\{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$. Παρατηρούμε ότι το σύνολο αυτό σε σχέση με την πράξη της πρόσθεσης, έχει τις εξής ιδιότητες:

α) Το άθροισμα δυο οιονδήποτε ακεραίων είναι πάλι ακέραιος αριθμός:

$(\forall n,m\in\boldsymbol{Z})[m+n\in\boldsymbol{Z}]$

β) Το σύνολο $\boldsymbol{Z}$ περιέχει ένα στοιχείο 0, το μηδέν, με την ιδιότητα:

$(\forall n\in\boldsymbol{Z})[n+0=0+n=n]$

γ) Για κάθε στοιχείο $n\in\boldsymbol{Z}$ υπάρχει ένα μοναδικό στοιχείο n' του $\boldsymbol{Z}$ τέτοιο ώστε $n+n'=n'+n=0$, (προφανώς $n'=-n$), δηλ.:

$(\forall n\in\boldsymbol{Z})(\exists n'\in\boldsymbol{Z})[n+n'=n'+n=0]$

δ) Ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα:

$(\forall n,m,p\in\boldsymbol{Z})[(n+m)+p=n+(m+p)]$

Υπάρχουν και άλλα σύνολα με τα ίδια χαρακτηριστικά, όπως είναι το σύνολο U(n) των μοναδιαίων πινάκων[1]. Συγκεκριμένα:

α) εάν A, B είναι δυο μοναδιαίοι πίνακες τότε το γινόμενο AB τους είναι πάλι ένας μοναδιαίος πίνακας.

β) το σύνολο U(n) περιέχει τον ταυτοτικό πίνακα I με την ιδιότητα: $AI=IA=A$ για κάθε $A\in U(n)$.

γ) Για κάθε πίνακα A υπάρχει ένας μοναδικός πίνακας A′ τέτοιος ώστε $AA'=A'A=I$, (προφανώς ο A′ είναι ο αντίστροφος του A, δηλ, $A'=A^{-1}$).

δ) Για τρεις οποιουσδήποτε πίνακες Α,Β,Γ ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα: (ΑΒ)Γ=Α(ΒΓ).

Οι τέσσερις ιδιότητες που ικανοποιούνται από τα δυο σύνολα, $\boldsymbol{Z}$ και U(n) είναι χαρακτηριστικές και πολλών άλλων συνόλων, που απαντώνται τόσο στα μαθηματικά όσο και

[1] Ένας πίνακας U λέγεται μοναδιαίος όταν ο συζυγοανάστροφος του συμπίπτει με τον αντίστροφο του, δηλ. $U^{t}=U^{-1}$.

στη φύση. Οι ιδιότητες αυτές προσδίδουν στα σύνολα αυτά την **δομή της ομάδας**. Έτσι σε γενικό και αφηρημένο επίπεδο ο ορισμός της ομάδας έχει ως εξής:

***Ορισμός* 1**: Ένα σύνολο $\boldsymbol{G}\neq\varnothing$ εφοδιασμένο με μια πράξη εσωτερικής συνθέσεως[2], που θα την συμβολίζουμε με $*$, (που συνήθως είναι η πρόσθεση ή ο πολλαπλασιασμός), λέγεται **ομάδα**, (**group**), εάν ικανοποιούνται οι εξής ιδιότητες:

α) $(\forall \alpha,\beta,\gamma\in \boldsymbol{G})[(\alpha*\beta)*\gamma=\alpha*(\beta*\gamma)]$ προσεταιριστική ιδιότητα

β) $(\exists e\in \boldsymbol{G})(\forall \alpha\in \boldsymbol{G})[\alpha*e=e*\alpha=\alpha]$ ύπαρξη **ουδετέρου στοιχείου**

γ) $(\forall \alpha\in \boldsymbol{G})\ (\exists \alpha'\in \boldsymbol{G})[\alpha*\alpha'=\alpha'*\alpha=e]$ ύπαρξη **συμμετρικού στοιχείου**

Παρατήρηση 1: α) Στις ιδιότητες του ορισμού της ομάδας δεν συμπεριλαμβάνεται η **ιδιότητα της κλειστότητας**: $\forall \alpha,\ \beta\in \boldsymbol{G},\ \alpha*\beta\in \boldsymbol{G}$, διότι αυτό εξυπακούεται από τον ορισμό της πράξεως που είναι πράξη εσωτερικής συνθέσεως. Στις εφαρμογές όμως, όπου πρέπει να αποδείξουμε ότι ένα σύνολο $\boldsymbol{G}$ αποτελεί ομάδα ως προς κάποια πράξη, πρέπει να ελέγξουμε ότι αυτή η πράξη είναι κλειστή ώστε να είμαστε σίγουροι ότι ποτέ δεν θα βγούμε έξω από το σύνολο όταν εφαρμόζουμε την πράξη αυτή.

β) Το συμμετρικό στοιχείο α' θα ονομάζεται **αντίθετο**, όταν η πράξη έχει τα χαρακτηριστικά της πρόσθεσης, ή **αντίστροφο** όταν η πράξη έχει τα χαρακτηριστικά του πολλαπλασιασμού. Το δε αποτέλεσμα $\alpha*\beta$ θα ονομάζεται **άθροισμα** ή **γινόμενο** αντίστοιχα.

γ) Το ουδέτερο στοιχείο e θα λέγεται και **ταυτοτικό**. Εάν δε η πράξη είναι προσθετική ή πολλαπλασιαστική το e θα ονομάζεται **μηδέν** ή **μονάδα** αντίστοιχα.

Ορισμός 2: Εάν η πράξη $*$ της ομάδας $\boldsymbol{G}$ ικανοποιεί επί πλέον την ιδιότητα :

δ) $(\alpha,\beta\in \boldsymbol{G})[\alpha*\beta=\beta*\alpha]$

τότε η ομάδα $\boldsymbol{G}$ λέγεται **αντιμεταθετική** ή **αβελιανή**.

Ορισμός 3: Μια ομάδα που περιέχει πεπερασμένο πλήθος στοιχείων ονομάζεται **πεπερασμένη ομάδα**, ενώ αν περιέχει άπειρο πλήθος στοιχείων ονομάζεται **άπειρη ομάδα**. Μια άπειρη ομάδα ονομάζεται **διακεκριμένη** ή **συνεχής** ανάλογα εάν το πλήθος των στοιχείων είναι αριθμήσιμο ή συνεχές. Το πλήθος των στοιχείων μιας πεπερασμένης ομάδας ονομάζεται **τάξη της ομάδας**.

Παραδείγματα ομάδων :

1) Η ομάδα τάξης 1, που αποτελείται από ένα μόνο στοιχείο, την μονάδα, με πράξη εσωτερικής συνθέσεως τον πολλαπλασιασμό.

2) Η ομάδα τάξεως 2, που αποτελείται από τους πραγματικούς αριθμούς {1, -1,} με πράξη εσωτερικής συνθέσεως τον πολλαπλασιασμό.

---

[2] Πράξη εσωτερικής συνθέσεως επί ενός συνόλου $\boldsymbol{G}$ ονομάζεται μια απεικόνιση f: $\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{G} \to \boldsymbol{G}$ με την ιδιότητα σε κάθε ζεύγος $(\alpha,\beta)\in\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{G}$ να αντιστοιχεί ένα και μόνο ένα στοιχείο γ του $\boldsymbol{G}$ ώστε $\gamma=f(\alpha,\beta)$.

3) Η ομάδα τάξεως 3, που αποτελείται από τους μιγαδικούς αριθμούς $\{1, e^{i2\pi/3}, e^{i4\pi/3}\}$, (οι οποίοι αποτελούν τις κυβικές ρίζες της μονάδας), με πράξη εσωτερικής συνθέσεως τον πολλαπλασιασμό.

4) Η ομάδα τάξεως 4, που αποτελείται από τους μιγαδικούς αριθμούς $\{1,i,-1,-i\}$, με $i^2=-1$, και με πράξη εσωτερικής συνθέσεως τον πολλαπλασιασμό.

5) Η διακεκριμένη άπειρη ομάδα των πραγματικών ακεραίων με πράξη την πρόσθεση.

6) Η συνεχής ομάδα των πραγματικών αριθμών με πράξη την πρόσθεση.

7) Η ομάδα τάξεως 2, που αποτελείται από τους δυο πίνακες:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ και } \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

με πράξη τον πολλαπλασιασμό.

8) Η συνεχής ομάδα των μη ιδιαζόντων πινάκων τάξεως n, (που έχουν ορίζουσα διάφορη του μηδενός), με πράξη τον πολλαπλασιασμό των πινάκων.

9) Εάν k είναι ένας θετικός ακέραιος, τότε το σύνολο G των k ακεραίων $\{0,1,2,\ldots,k-1\}$ αποτελεί ομάδα με πράξη την modulo(k)-πρόσθεση. Η πράξη αυτή ορίζεται ως εξής: Κατ' αρχάς ορίζουμε για τον θετικό ακέραιο n το n-mod(k) να είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης n/k. Έτσι το modulo(k)-άθροισμα των θετικών ακεραίων m και n είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης (m+n)/k. Το ταυτοτικό στοιχείο e είναι το μηδέν και το συμμετρικό m′ ενός στοιχείου m της ομάδας είναι το k-m. (Βλέπε άσκηση 5)

10) Εάν k είναι ένας πρώτος αριθμός μεγαλύτερος του 1, τότε το σύνολο G των k-1 αριθμών $\{1,2,\cdots k-1\}$ αποτελεί ομάδα με πράξη τον modulo(k)- πολλαπλασιασμό, που ορίζεται κατά αναλογία με την modulo(k)-πρόσθεση. Το ταυτοτικό στοιχείο e είναι το 1 και το συμμετρικό m′ ενός στοιχείου m είναι το m′=(sk+1)/r, όπου s είναι ο μικρότερος θετικός ακέραιος, που καθιστά το sk+1 ένα ακέραιο πολλαπλάσιο του m με την συνήθη έννοια. (Βλέπε άσκηση 6)

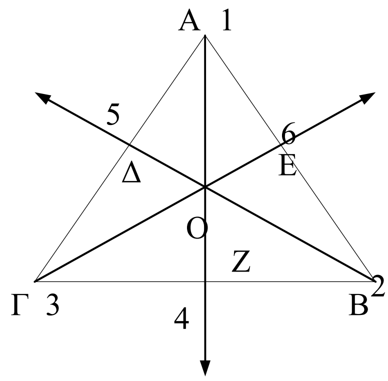
1.2 Η ομάδα των μετασχηματισμών

Για τους φυσικούς, οι ομάδες που παρουσιάζουν μεγάλο ενδιαφέρον είναι οι ομάδες των μετασχηματισμών των φυσικών συστημάτων και ιδίως των συμμετρικών μετασχηματισμών, που αφήνουν ένα σύστημα αναλλοίωτο. Π.χ. οποιαδήποτε περιστροφή ενός κύκλου γύρω από έναν άξονα κάθετο στο επίπεδο του κύκλου και που διέρχεται από το κέντρο του, είναι ένας μετασχηματισμός συμμετρίας για τον κύκλο. Μια μετάθεση δυο ομοίων ατόμων σ' ένα μόριο είναι ένας μετασχηματισμός συμμετρίας για το μόριο.

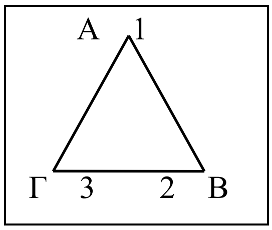
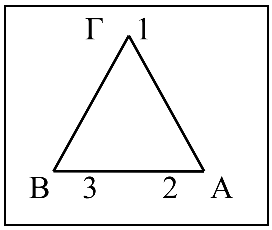
Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι το σύνολο όλων των μετασχηματισμών συμμετρίας ενός συστήματος αποτελεί ομάδα. Πρώτα παρατηρούμε ότι εάν εκτελέσουμε διαδοχικά δυο μετασχηματισμούς συμμετρίας, το σύστημα παραμένει αναλλοίωτο. Έτσι η σύνθεση δυο οποιωνδήποτε μετασχηματισμών συμμετρίας είναι πάλι ένας μετασχηματισμός συμμετρίας και επομένως το σύνολο των μετασχηματισμών συμμετρίας είναι κλειστό ως προς την σύνθεση των μετασχηματισμών. Μπορούμε να ορίσουμε το ταυτοτικό στοιχείο να είναι ο ταυτοτικός μετασχηματισμός, που αφήνει το σύστημα αμετάβλητο και προφανώς ανήκει στο σύνολο. Για κάθε μετασχηματισμό συμμετρίας υπάρχει ο αντίστροφος του με την έννοια ότι ο αντίστροφος ξαναφέρνει το σύστημα στην αρχική του θέση. Τέλος η διαδοχική εφαρμογή των μετασχηματισμών συμμετρίας υπακούει την προσεταιριστική ιδιότητα.

Παράδειγμα: 1 **Η ομάδα συμμετρίας του ισοπλεύρου τριγώνου.** Θεωρούμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο κατασκευασμένο από χαρτόνι και τοποθετημένο πάνω σ' ένα επίπεδο. Με Α, Β, Γ συμβολίζουμε τις κορυφές και με Δ, Ε και Ζ τα μέσα των πλευρών ΓΑ, ΑΒ, ΒΓ αντίστοιχα και με Ο το ορθόκεντρο του τριγώνου. Με τους αριθμούς 1,2,3,4,5,6 συμβολίζουμε τα αντίστοιχα σημεία του επιπέδου.

Ας περιστρέψουμε τώρα το τρίγωνο γύρω από τον άξονα **u** που είναι κάθετος στο τρίγωνο και διέρχεται από το κέντρο του Ο κατά γωνία 120 μοιρών και κατά την αρνητική[3] φορά. Καμμία αλλαγή δεν έχει επέλθει εκτός από την αλλαγή των γραμμάτων Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ. Η νέα θέση του τρίγωνου δεν θα διαφέρει από την αρχική. Η περιστροφή αυτή αποτελεί για το τρίγωνο έναν μετασχηματισμό συμμετρίας. Υπάρχουν και άλλοι μετασχηματισμοί συμμετρίας, όπως περιστροφή γύρω από τον προηγούμενο άξονα κατά 240 μοίρες, όπως και οι περιστροφές, (ανακλάσεις), γύρω από τους άξονες που διέρχονται από τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΖ, ΒΔ και ΓΕ κατά γωνία 180 μοιρών. Συνολικά για το τρίγωνο υπάρχουν 6 μετασχηματισμοί συμμετρίας, που ταξινομούνται και συμβολίζονται ως εξής:

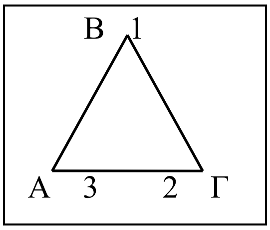


Πίνακας των συμμετρικών μετασχηματισμών του ισοπλεύρου τριγώνου

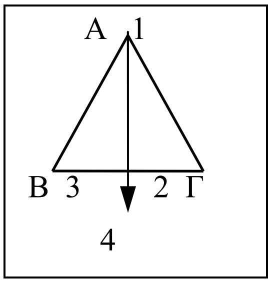
Σύμβολο	Πράξη	Αποτέλεσμα
Ε	Το ταυτοτικό στοιχείο	
C_3	Αρνητική περιστροφή κατά 120^0 γύρω από τον άξονα **u**	

[3] Αρνητική φορά περιστροφής είναι εκείνη που συμπίπτει με την φορά περιστροφής των δεικτών του ωρολογίου

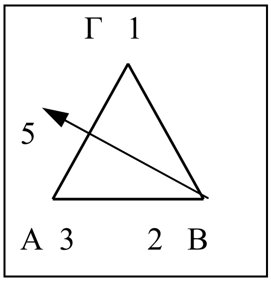
C_3^2 Αρνητική περιστροφή κατά 240^0 γύρω από τον u



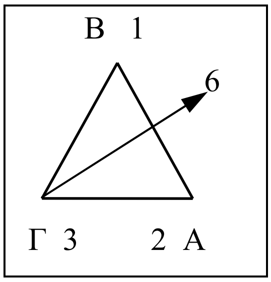
σ_1 Ανάκλαση κατά τον άξονα 1-4



σ_2 Ανάκλαση κατά τον άξονα 2-5



σ_3 Ανάκλαση κατά τον άξονα 3-6



Οι 6 αυτοί μετασχηματισμοί συνθέτονται μεταξύ τους βάσει του παρακάτω πολλαπλασιαστικού πίνακα:

Πολλαπλασιαστικός πίνακας του ισοπλεύρου τριγώνου

	E	C_3	C_3^2	σ_1	σ_2	σ_3
E	E	C_3	C_3^2	σ_1	σ_2	σ_3
C_3	C_3	C_3^2	E	σ_3	σ_1	σ_2
C_3^2	C_3^2	E	C_3	σ_2	σ_3	σ_1
σ_1	σ_1	σ_2	σ_3	E	C_3	C_3^2
σ_2	σ_2	σ_3	σ_1	C_3^2	E	C_3

σ_3	σ_3	σ_1	σ_2	C_3	C_3^2	E

Όπου εύκολα αποδεικνύεται ότι το σύνολο $\{E, C_3, C_3^2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ αποτελεί ομάδα με πράξη εσωτερικής συνθέσεως την σύνθεση των μετασχηματισμών. Η ομάδα των μετασχηματισμών συμμετρίας του ισοπλεύρου τριγώνου συμβολίζεται με C_{3v}.

Παρατήρηση 1: Στον παραπάνω πίνακα παρατηρούμε ότι κάθε στοιχείο της ομάδας εμφανίζεται σε μια και μόνο σε μια θέση σε κάθε γραμμή και σε κάθε στήλη. Το χαρακτηριστικό αυτό ισχύει σε κάθε ομάδα και αποτελεί το **θεώρημα της αναδιατάξεως** ή **θεώρημα του Cayley**. Πιο συγκεκριμένα αν $\boldsymbol{G}=\{E, A_1, A_2, \ldots, A_{g-1}\}$ μια ομάδα τάξης g, τότε τα σύνολα $\{EA_i, A_1A_i, A_2 A_i, \ldots, A_{g-1}A_i\}$ και $\{A_iE, A_iA_1, A_iA_2, \ldots, A_iA_{g-1}\}$ είναι απλές αναδιατάξεις των στοιχείων της ομάδας $\boldsymbol{G}$.

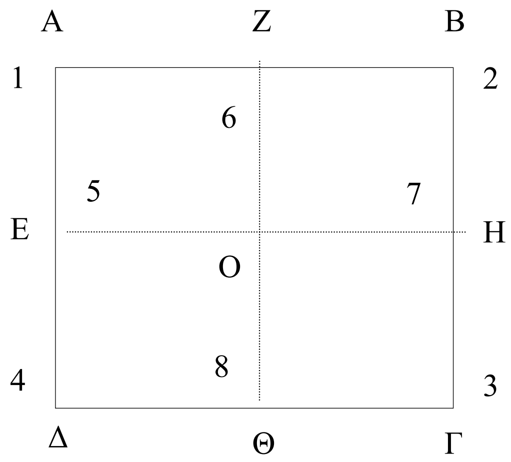
Παρατήρηση 2: Η διάταξη των στοιχείων στις στήλες και τις σειρές μπορεί να είναι οποιαδήποτε. Εδώ ακολουθήσαμε την "φυσική" σειρά των στοιχείων. Στο επόμενο κεφάλαιο των αναπαραστάσεων μιας ομάδας, θα δούμε ότι έχει σημασία η διάταξη εκείνη των στοιχείων κατά την οποία κάθε στοιχείο της πρώτης στήλης είναι το συμμετρικό στοιχείο του αντίστοιχου στοιχείου της πρώτης γραμμής. Σ' αυτή την περίπτωση η πρώτη στήλη αναδιατάσσεται κατάλληλα και ο πολλαπλασιαστικός πίνακας γίνεται:

	E	C_3	C_3^2	σ_1	σ_2	σ_3
E	E	C_3	C_3^2	σ_1	σ_2	σ_3
C_3^2	C_3^2	E	C_3	σ_2	σ_3	σ_1
C_3	C_3	C_3^2	E	σ_3	σ_1	σ_2
σ_1	σ_1	σ_2	σ_3	E	C_3	C_3^2
σ_2	σ_2	σ_3	σ_1	C_3^2	E	C_3
σ_3	σ_3	σ_1	σ_2	C_3	C_3^2	E

στον οποίο παρατηρούμε ότι η διαγώνιος περιέχει μόνο το ταυτοτικό στοιχείο E, το οποίο αργότερα θα το αντιστοιχίσουμε με τον ταυτοτικό πίνακα $n\times n$ όπου n η τάξη της ομάδας.

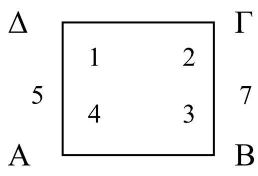
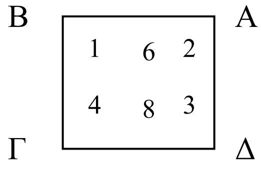
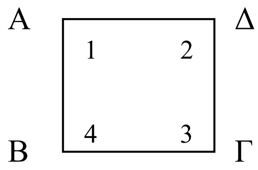
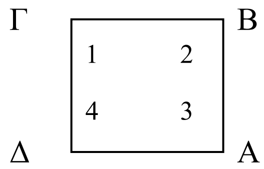
Παράδειγμα 2: **Η ομάδα συμμετρίας του τετραγώνου**. Θεωρούμε ένα τετράγωνο κατασκευασμένο από χαρτόνι και τοποθετημένο πάνω σ' ένα επίπεδο. Με Α, Β, Γ, Δ συμβολίζουμε τις κορυφές, με Ε, Ζ, Η, Θ τα μέσα των πλευρών ΔΑ, ΑΒ, ΒΓ και ΓΔ αντίστοιχα και με Ο το κέντρο του τετραγώνου. Με τους αριθμούς 1,2,…,8 συμβολίζουμε τα αντίστοιχα σημεία του επιπέδου.

Ας περιστρέψουμε τώρα το τετράγωνο γύρω από τον άξονα που είναι κάθετος στο τετράγωνο και διέρχεται από το κέντρο του Ο κατά μια ορθή γωνία και κατά την αρνητική φορά. Καμμία αλλαγή δεν έχει επέλθει εκτός από την αλλαγή των γραμμάτων Α,Β,…,Θ. Η νέα θέση του τετραγώνου δεν θα διαφέρει από την αρχική. Η περιστροφή αυτή αποτελεί για το τετράγωνο έναν μετασχηματισμό συμμετρίας. Υπάρχουν και άλλοι μετασχηματισμοί συμμετρίας, όπως περιστροφή γύρω από τον προηγούμενο άξονα κατά 180 μοίρες ή 270 μοίρες, όπως και οι περιστροφές, (ανακλάσεις), γύρω από τους άξονες που διέρχονται από τα ευθύγραμμα τμήματα ΕΗ, ΖΘ, ΑΓ και ΒΔ κατά γωνία 180 μοιρών. Συνολικά για το τετράγωνο υπάρχουν 8 μετασχηματισμοί συμμετρίας, που ταξινομούνται και συμβολίζονται ως εξής:



Πίνακας των συμμετρικών μετασχηματισμών του τετραγώνου

Σύμβολο	Πράξη	Αποτέλεσμα
Ε	Το ταυτοτικό στοιχείο	Α Β 1 2 4 3 Δ Γ
C_4	Αρνητική περιστροφή κατά 90^o γύρω από τον άξονα **u** κάθετο στο τετράγωνο και διερχόμενο από το κέντρο του Ο.	Δ Α 1 2 4 3 Γ Β
C_4^2	Αρνητική περιστροφή κατά 180^o γύρω από τον άξονα **u**.	Γ Δ 1 2 4 3 Β Α
C_4^3	Αρνητική περιστροφή κατά 270^o γύρω από τον άξονα **u**.	Β Γ 1 2 4 3 Α Δ

m_x	Ανάκλαση κατά τον άξονα 5-7	
m_y	Ανάκλαση κατά τον άξονα 6-8	
σ_u	Ανάκλαση κατά τον άξονα 1-3	
σ_v	Ανάκλαση κατά τον άξονα 2-4	

Οι 8 αυτοί μετασχηματισμοί συνθέτονται μεταξύ τους βάσει του παρακάτω πολλαπλασιαστικού πίνακα:

Πολλαπλασιαστικός Πίνακας του τετραγώνου

	E	C_4	C_4^2	C_4^3	m_x	m_y	σ_u	σ_v
E	E	C_4	C_4^2	C_4^3	m_x	m_y	σ_u	σ_v
C_4	C_4	C_4^2	C_4^3	E	σ_u	σ_v	m_y	m_x
C_4^2	C_4^2	C_4^3	E	C_4	m_y	m_x	σ_v	σ_u
C_4^3	C_4^3	E	C_4	C_4^2	σ_v	σ_u	m_x	m_y
m_x	m_x	σ_v	m_y	σ_u	E	C_4^2	C_4^3	C_4
m_y	m_y	σ_u	m_x	σ_v	C_4^2	E	C_4	C_4^3
σ_u	σ_u	m_x	σ_v	m_y	C_4	C_4^3	E	C_4^2
σ_v	σ_v	m_y	σ_u	m_x	C_4^3	C_4	C_4^2	E

και εύκολα αποδεικνύεται ότι το σύνολο {E, C_4, C_4^2, C_4^3, m_x, m_y, σ_u, σ_v } αποτελεί ομάδα με πράξη εσωτερικής συνθέσεως την σύνθεση των μετασχηματισμών. Η ομάδα των μετασχηματισμών του τετραγώνου συμβολίζεται με C_{4v}.

Όπως και στην περίπτωση του ισοπλεύρου τριγώνου, μπορούμε να αναδιατάξουμε τα στοιχεία της πρώτης στήλης έτσι ώστε το ουδέτερο στοιχείο E να εμφανισθεί στην διαγώνιο. Τότε ο πολλαπλασιαστικός πίνακας παίρνει την μορφή:

	E	C_4	C_4^2	C_4^3	m_x	m_y	σ_u	σ_v
E	E	C_4	C_4^2	C_4^3	m_x	m_y	σ_u	σ_v
C_4^3	C_4^3	E	C_4	C_4^2	σ_v	σ_u	m_x	m_y
C_4^2	C_4^2	C_4^3	E	C_4	m_y	m_x	σ_v	σ_u
C_4	C_4	C_4^2	C_4^3	E	σ_u	σ_v	m_y	m_x
m_x	m_x	σ_v	m_y	σ_u	E	C_4^2	C_4^3	C_4
m_y	m_y	σ_u	m_x	σ_v	C_4^2	E	C_4	C_4^3
σ_u	σ_u	m_x	σ_v	m_y	C_4	C_4^3	E	C_4^2
σ_v	σ_v	m_y	σ_u	m_x	C_4^3	C_4	C_4^2	E

1.3 Γεννήτορες μιας πεπερασμένης ομάδας.

Είναι δυνατό τα στοιχεία μιας ομάδας να παράγονται από ορισμένα στοιχεία χρησιμοποιώντας τις δυνάμεις και τα γινόμενα αυτών των στοιχείων. Τα στοιχεία αυτά, των οποίων το πλήθος είναι το μικρότερο δυνατό λέμε ότι αποτελούν **γεννήτορες της ομάδας**.

Παράδειγμα 1 : Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να κατασκευάσουμε μια ομάδα ***G*** τάξης n με γεννήτορες ένα μόνο στοιχείο A. Επειδή το A είναι στοιχείο της ομάδας τότε στοιχεία της ομάδας θα είναι και όλες οι δυνάμεις του. Έτσι παράγουμε νέα στοιχεία τα: A^2, A^3,… και η διαδικασία αυτή σταματά στο $A^n=\underbrace{A\circ A\circ\cdots\circ A}_{\text{n φορες}}=E$, όπου n ο μικρότερος φυσικός αριθμός, που ικανοποιεί αυτή την σχέση. Οι μεγαλύτερες από την A^n δυνάμεις δεν δίνουν νέα στοιχεία διότι $A^{n+k}=A^k$. Τελικά η ομάδα που επιθυμούμε να κατασκευάσουμε από το στοιχείο A θα περιέχει τα στοιχεία: {A, A^2,…,A^{n-1}, A^n=E}, της οποίας η τάξη είναι n, ο δε γεννήτορας αυτής της ομάδας είναι το στοιχείο A.

Παράδειγμα 2: Για την ομάδα **G**={1, -1, i, -i} με νόμο εσωτερικής συνθέσεως τον πολλαπλασιασμό, το στοιχείο {i} είναι γεννήτορας, διότι οι δυνάμεις του γεννούν τα υπόλοιπα στοιχεία: $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$.

Παράδειγμα 3: Ας κατασκευάσουμε τώρα την ομάδα από δυο στοιχεία Α, Β, που να ικανοποιούν τις σχέσεις: $A^2=B^3=(AB)^2=E$.

Η ομάδα πρέπει να περιέχει τα στοιχεία Ε, Α, Β και B^2, (εφ' όσον $A^2=E$ και $B^3=E$), όπως επίσης και όλα τα γινόμενα των Α, Β και B^2, δηλ. τα ΑΒ, ΒΑ, AB^2, B^2A. Εξετάζουμε εάν τα στοιχεία ΑΒ και ΒΑ μετατίθενται. Έστω ότι μετατίθενται. Τότε από την σχέση $(AB)^2=E$ θα έχουμε:

$$E=ABAB=A(BA)B=A(AB)B=A^2B^2=B^2 \quad \text{δηλ. } E=B^2$$

που δεν αληθεύει. Επομένως τα ΑΒ και ΒΑ είναι διαφορετικά στοιχεία. Τα δε στοιχεία AB^2, B^2A ισούνται με ΒΑ και ΑΒ αντίστοιχα, δηλ. $AB^2=BA$ και $B^2A=AB$. Πράγματι, από τις σχέσεις:

$$A^2=E=(AB)^2 \Rightarrow A^2=(AB)(AB) \Rightarrow A=BAB \Rightarrow AB^2=BAB^3=BA \Rightarrow AB^2=BA$$

επίσης από τις σχέσεις:

$$B^3=E=(AB)^2 \Rightarrow B^3=(AB)(AB) \Rightarrow B^2=ABA \Rightarrow B^2A=ABA^2 \Rightarrow B^2A=AB.$$

Επομένως τα στοιχεία που έχουμε δημιουργήσει είναι τα εξής 6:

Ε, Α, Β, B^2, ΑΒ, ΒΑ

Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι το σύνολο αυτών των στοιχείων αποτελεί ομάδα, της οποίας η τάξη είναι 6 και οι γεννήτορες της τα δυο στοιχεία Α και Β. Ο αντίστοιχος πολλαπλασιαστικός πίνακας είναι:

	E	A	B	AB	BA	B^2
E	E	A	B	AB	BA	B^2
A	A	E	AB	B	B^2	BA
B	B	BA	B^2	A	AB	E
AB	AB	B^2	BA	E	B	A
BA	BA	B	A	B^2	E	AB
B^2	B^2	AB	E	BA	A	B

Παρατήρηση: Οι γεννήτορες μιας ομάδας δεν είναι μοναδικοί. Π.χ. η ομάδα τάξης 6 του προηγουμένου παραδείγματος μπορεί να γεννηθεί από κάθε ένα από τα παρακάτω σύνολα: (Α,Β), (A,B^2), (Α,ΑΒ), (Β,ΑΒ). Όπως επίσης οι γεννήτορες της ομάδας C_{3v} είναι:

$\{(C_3, \sigma_1), (C_3, \sigma_2), (C_3, \sigma_3)\}$ και της C_{4v}: $\{(C_4, m_x), (C_4, m_y), (C_4, \sigma_u), (C_4, \sigma_v)\}$.

Ελέγξτε εάν τα στοιχεία (C_4^2, m_x) αποτελούν γεννήτορες της ομάδας C_{4v}.

1.4 Κυκλικές ομάδες.

Εάν Α είναι ένα στοιχείο μιας ομάδας ***G***, τότε όλες οι δυνάμεις του Α: A^2, A^3,…. πρέπει να είναι στοιχεία της ***G***, αλλά εάν η ***G*** είναι μια πεπερασμένη ομάδα τότε κάποια από αυτές τις δυνάμεις θα είναι το ταυτοτικό στοιχείο δηλ. $A^n=E$. Ο μικρότερος θετικός ακέραιος n που ικανοποιεί την σχέση $A^n=E$ ονομάζεται **τάξη του στοιχείου** Α.

Μια ομάδα, που γεννάται από ένα μόνο στοιχείο Α, ονομάζεται **κυκλική ομάδα**. Μια τέτοια ομάδα είναι η ομάδα του παραδείγματος 1 της παρ. 1.3 δηλ. η ομάδα $\{A,A^2,\ldots,A^{n-1}, A^n=E\}$.

Παράδειγμα κυκλικής ομάδας είναι το σύνολο των n-οστών μιγαδικών ριζών της μονάδας, δηλ. το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $\{z_k=\exp(i2\pi k/n),\ k=0,1,\cdots n-1\}$ αποτελεί κυκλική ομάδα τάξης n ως προς τον μιγαδικό πολλαπλασιασμό με γεννήτορα το στοιχείο $A=\exp(i2\pi/n)$ και $A^n=1$, (βλέπε άσκηση 4).

1.5 Υποομάδες

Ένα υποσύνολο Η μιας ομάδας ***G*** ονομάζεται **υποομάδα** της ***G*** εάν από μόνο του είναι ομάδα ως προς την ίδια πράξη εσωτερικής συνθέσεως. Κάθε ομάδα ***G*** έχει δυο τετριμμένες υποομάδες, το ταυτοτικό στοιχείο και την ίδια την ομάδα, δηλ. όταν $\boldsymbol{H}=\{E\}$ και $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{G}$. Κάθε άλλη υποομάδα $\boldsymbol{H}\neq E,\boldsymbol{G}$ θα λέγεται **γνήσια υποομάδα**.

Αποδεικνύεται[4] ότι ένα υποσύνολο $\boldsymbol{H}\subset\boldsymbol{G}$ είναι υποομάδα εάν ισχύει:

$$(\forall x,y\in\boldsymbol{H})[xy^{-1}\in\boldsymbol{H}]$$

Η ομάδα C_{3v} των μετασχηματισμών συμμετρίας του ισοπλεύρου τριγώνου έχει τις εξής υποομάδες: $\{E, C_3, C_3^2\}$, $\{E, \sigma_1\}$, $\{E, \sigma_2\}$, $\{E, \sigma_3\}$.

Τα τέσσερα στοιχεία $\{E, C_4,C_4^2,C_4^3\}$ της ομάδας C_{4v} αποτελούν υποομάδα, όπως και τα υποσύνολα: $\{E\}$, $\{E, C_4^2\}$, $\{E, C_4^2, m_x, m_y\}$, $\{E, C_4^2, \sigma_u, \sigma_v\}$, $\{E, \sigma_u\}$, $\{E, \sigma_v\}$ $\{E, m_x\}$ $\{E, m_y\}$

Άσκηση: Να γράψετε τους πολλαπλασιαστικούς πίνακες των παραπάνω υποομάδων.

Εάν το ***H*** είναι μια υποομάδα τάξης h της ομάδας ***G*** τάξης g, τότε το g είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του h και ο ακέραιος g/h ονομάζεται **δείκτης της *H* ως προς την *G***.. Επίσης η τάξη κάθε στοιχείου Α της ***G*** είναι διαιρέτης της τάξης g της ομάδας.

(Για την απόδειξη των ανωτέρω βλέπε παράγραφο 1.7 Θεώρημα Lagrange).

1.6 Συζυγή στοιχεία και κλάσεις μιας ομάδας

Θεωρούμε δυο στοιχεία Α, Β μιας ομάδας ***G***. Τα στοιχεία αυτά θα λέγονται **συζυγή στοιχεία** εάν υπάρχει ένα στοιχείο Ρ της ομάδας τέτοιο ώστε να ικανοποιείται η σχέση: $B=P^{-1}AP$, η δε αντίστοιχη πράξη θα λέγεται **μετασχηματισμός ομοιότητας**, δηλ. η μετάβαση από το στοιχείο Α στο στοιχείο Β. Εύκολα μπορούμε να βρούμε τέτοιες σχέσεις μεταξύ των στοιχείων της ομάδας C_{4v}. Π.χ. $C_4^{-1}m_xC_4=m_y$. Η τελευταία σχέση δείχνει ότι τα στοιχεία m_x και m_y είναι συζυγή το ένα με το άλλο.

Είναι προφανές ότι εάν $B=P^{-1}AP$, τότε και $A=Q^{-1}BQ$ με $Q=P^{-1}$ δηλ. η σχέση της συζυγίας είναι συμμετρική, που σημαίνει ότι εάν ένα στοιχείο Α είναι συζυγές προς το Β,

---

[4] α) Εάν y=x τότε $xx^{-1}=e\in\boldsymbol{H}$, ύπαρξη ουδετέρου.

β) Εάν x=e τότε $ey^{-1}=y^{-1}\in\boldsymbol{H}$, ύπαρξη συμμετρικού

γ) Εάν $x,y\in\boldsymbol{H}$ τότε και το $y^{-1}\in\boldsymbol{H}$ και επομένως $x(y^{-1})^{-1}=xy\in\boldsymbol{H}$, κλειστότητα του νόμου εσωτερικής συνθέσεως.

δ) Η προσεταιριστική ιδιότητα είναι προφανής αφού ισχύει σ' όλη την ομάδα ***G***.

τότε και το B είναι συζυγές προς το A. Επίσης είναι και αυτοπαθής, διότι $A=E^{-1}AE$, (δηλ. κάθε στοιχείο είναι συζυγές προς τον εαυτόν του), όπως και μεταβατική, δηλ. εάν $A=P^{-1}B\,P$ και $B=Q^{-1}CQ$ τότε $A=P^{-1}(Q^{-1}CQ)P=(QP)^{-1}C(QP)$. Είναι δηλ. σχέση ισοδυναμίας[5] και σαν τέτοια χωρίζει την ομάδα σε υποσύνολα, που ονομάζονται **κλάσεις συζυγίας** ή απλώς κλάσεις. Τα στοιχεία κάθε κλάσης είναι μεταξύ τους συζυγή. Δεν είναι όμως συζυγή τα στοιχεία που ανήκουν σε διαφορετικές κλάσεις.

Το ταυτοτικό στοιχείο κάθε ομάδας αποτελεί από μόνο του κλάση, διότι για κάθε στοιχείο A ισχύει $A^{-1}EA=E$. Δεν μπορεί όμως το E να είναι συζυγές με οποιοδήποτε άλλο στοιχείο A, διότι τότε θα υπήρχε ένα στοιχείο P τέτοιο ώστε $A=P^{-1}EP$, που είναι αδύνατο διότι θα είχαμε A=E. Επίσης και κάθε άλλο στοιχείο αποτελεί από μόνο του κλάση εάν και μόνο εάν μετατίθεται με όλα τα άλλα στοιχεία. Έτσι σε μια αβελιανή ομάδα κάθε στοιχείο αποτελεί και κλάση. Πράγματι $P^{-1}AP=P^{-1}PA=A$

Παράδειγμα 1: Από την Γραμμική Άλγεβρα είναι γνωστό ότι σε κάθε τελεστή T, που δρα σ' ένα διανυσματικό χώρο V, αντιστοιχεί ένας πίνακας T_e, ως προς την βάση $B_e=\{e_1, e_2,\ldots, e_n\}$, που προκύπτει από την επίδραση του T πάνω στα βασικά διανύσματα $e_1, e_2, \ldots, e_n$ δηλ.:

$$Te_i=T_{1i}e_1+ T_{2i}e_2+\ldots+ T_{ni}e_n$$

Τα στοιχεία του πίνακα T_e είναι $(T_e)_{ij}=T_{ij}$. Εάν θεωρήσουμε μια νέα βάση $B_f=\{f_1, f_2,\ldots, f_n\}$, τότε στον τελεστή T, (που παραμένει ο ίδιος), αντιστοιχεί ένας νέος πίνακας T_f. Οι δυο πίνακες T_e και T_f, που αναπαριστούν τον ίδιο τελεστή T, αποδεικνύεται ότι συνδέονται μεταξύ τους με τη σχέση:

$$T_f=P^{-1}T_eP$$

όπου P ο πίνακας που συνδέει τις βάσεις B_e και B_f δηλ. $f_i=Pe_i$.

---

[5] Σ' ένα σύνολο A θεωρούμε μια **διμελή σχέση**, που θα την συμβολίζουμε με ~, και η οποία δεν είναι τίποτε άλλο παρά ένα υποσύνολο R του καρτεσιανού γινομένου A×A, δηλ. $R\subseteq A\times A$.. Θα λέμε τότε ότι το στοιχείο $\alpha\in A$ πληροί τη σχέση R με το στοιχείο $\beta\in A$ εάν $(\alpha,\beta)\in R$. Και θα γράφουμε $\alpha\sim\beta$. Εάν η διμελής αυτή σχέση ικανοποιεί τις τρεις παρακάτω ιδιότητες:

1) $\alpha\sim\alpha \quad \forall\alpha\in A$ (αυτοπαθής)

2) εάν $\alpha\sim\beta \Rightarrow \beta\sim\alpha$ (συμμετρική)

3) εάν $\alpha\sim\beta$ και $\beta\sim\gamma \Rightarrow \alpha\sim\gamma$ (μεταβατική)

τότε η διμελής σχέση ~ ονομάζεται **σχέση ισοδυναμίας**.

Παραδείγματα: α) Η ισότητα A=B δυο στοιχείων ενός συνόλου X είναι σχέση ισοδυναμίας

β) Έστω X το σύνολο των τριγώνων σ' ένα επίπεδο. Η σχέση "το τρίγωνο A είναι όμοιο με το τρίγωνο B" είναι σχέση ισοδυναμίας, της οποίας οι κλάσεις περιέχουν τρίγωνα που είναι όμοια μεταξύ τους.

γ) Στο σύνολο Z των ακεραίων αριθμών η σχέση $\alpha\sim\beta$: η διαφορά α-β είναι άρτιος αριθμός είναι σχέση ισοδυναμίας, η οποία διαιρεί τους ακεραίους σε άρτιους και περιττούς.

δ) Στο σύνολο N των φυσικών αριθμών η σχέση $\alpha=\beta\bmod(\gamma)$ με $\alpha,\beta\in N$ και γ συγκεκριμένος φυσικός αριθμός είναι σχέση ισοδυναμίας. Δηλ. όλοι οι φυσικοί αριθμοί, που αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο όταν διαιρούνται με το γ είναι ισοδύναμοι. (Το ίδιο είναι να πούμε: όλοι οι φυσικοί αριθμοί, των οποίων η διαφορά α-β διαιρείται με τον γ). Οι κλάσεις ισοδυναμίας, στις οποίες διαιρείται το σύνολο των φυσικών αριθμών N για ένα συγκεκριμένο γ είναι: $\{k\gamma / k\in N\}$, $\{k\gamma+1 / k\in N\}$, $\{k\gamma+2 / k\in N\}$, ···, $\{k\gamma+\gamma-1 / k\in N\}$, Οι πίνακες T_e και T_f σε σχέση με την επενέργεια του τελεστή T έχουν την ίδια δράση πάνω στα διανύσματα του χώρου V, (όταν αυτά παρασταθούν υπό μορφή στηλών ως προς τις αντίστοιχες βάσεις B_e, B_f), και γι' αυτό ονομάζονται **όμοιοι**, (**similar**), και ανήκουν στην ίδια κλάση.

Παράδειγμα 2: Να βρεθούν οι κλάσεις της ομάδας C_{3v}.

Μια κλάση {E} είναι αυτή που περιέχει μόνο το ουδέτερο στοιχείο E. Για να βρούμε τις υπόλοιπες κλάσεις εργαζόμαστε ως εξής: Διαλέγουμε ένα στοιχείο, έστω το C_3 και σχηματίζουμε τα γινόμενα $P^{-1}C_3P$, $P\in C_{3v}$ και έχουμε:

$$
\begin{array}{ll}
P=E & E^{-1}C_3E = C_3 \\
P=C_3 & C_3^{-1}C_3C_3 = C_3 \\
P=C_3^2 & (C_3^2)^{-1}C_3C_3^2 = (C_3^2)^{-1}E= C_3 \\
P=\sigma_1 & \sigma_1^{-1}C_3\sigma_1 = \sigma_1C_3\sigma_1= \sigma_2\sigma_1= C_3^2 \\
P= \sigma_2 & \sigma_2^{-1}C_3\sigma_2 = \sigma_2C_3\sigma_2= \sigma_3\sigma_2= C_3^2 \\
P= \sigma_3 & \sigma_3^{-1}C_3\sigma_3 = \sigma_3C_3\sigma_3= \sigma_1\sigma_3= C_3^2
\end{array}
$$

Η δεύτερη κλάση $\{C_3, C_3^2\}$ περιλαμβάνει τα δυο στοιχεία C_3, C_3^2. Για να βρούμε την επόμενη κλάση διαλέγουμε ένα στοιχείο, που δεν ανήκει στις δυο προηγούμενες κλάσεις, έστω το σ_1. Εργαζόμαστε όπως και πριν και βρίσκουμε την κλάση $\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\}$. Επειδή εξαντλήθηκαν όλα τα στοιχεία της ομάδας C_{3v} δεν υπάρχει άλλη κλάση. Άρα οι κλάσεις της ομάδας C_{3v} είναι οι: $\{E\}$ $\{C_3, C_3^2\}$ και $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$. Βλέπουμε ότι δεν υπάρχει μόνο μαθηματική ομοιότητα των στοιχείων μιας κλάσης αλλά και φυσική ομοιότητα. Δηλαδή οι τελεστές ανακλάσεως δεν αναμειγνύονται με τους τελεστές στροφής. Το ταυτοτικό στοιχείο προτιμά τη «μοναχική ζωή».

Παράδειγμα 3 : Να βρεθούν οι κλάσεις της ομάδας C_{4v}.

Μια από τις κλάσεις είναι αυτή που περιέχει μόνο το ουδέτερο στοιχείο {E}. Για να βρούμε τις υπόλοιπες κλάσεις, διαλέγουμε ένα στοιχείο, έστω το C_4 και σχηματίζουμε τα γινόμενα $P^{-1}C_4P$ με $P\in C_{4v}$. Έχουμε:

$$
\begin{array}{ll}
P=E & E^{-1}C_4E=C_4 \\
P=C_4 & C_4^{-1}C_4C_4^{-}=C_4 \\
P=C_4^2 & (C_4^2)^{-1}C_4C_4^2=(C_4^2)^{-1}C_4^3= C_4^2C_4^3=C_4 \\
P=C_4^3 & (C_4^3)^{-1}C_4C_4^3=(C_4^3)^{-1}E=C_4 \\
P=m_x & (m_x)^{-1}C_4m_x=(m_x)^{-1}\sigma_u=m_x\sigma_v=C_4 \\
P=m_y & (m_y)^{-1}C_4m_y=(m_y)^{-1}\sigma_v=m_y\sigma_v=C_4^3 \\
P=\sigma_u & (\sigma_u)^{-1}C_4\sigma_u=(\sigma_u)^{-1}m_y=\sigma_u m_y=C_4^3 \\
P=\sigma_v & (\sigma_v)^{-1}C_4\sigma_v=(\sigma_v)^{-1}m_x=\sigma_v m_x=C_4^3
\end{array}
$$

Επομένως η κλάση που περιέχει το στοιχείο C_4 είναι η $\{C_4, C_4^3\}$. Στη συνέχεια θεωρούμε το επόμενο στοιχείο, που δεν ανήκει στις δυο κλάσεις {E}, $\{C_4, C_4^3\}$, που ήδη βρήκαμε, π.χ. το C_4^2 και εργαζόμαστε με τον ίδιο τρόπο. Βρίσκουμε δε ότι η κλάση, στην οποία ανήκει το C_4^2

αποτελείται μόνο από αυτό το στοιχείο. Επομένως η τρίτη κλάση είναι η $\{C_4^2\}$. Τέλος οι υπόλοιπες κλάσεις είναι: $\{m_x, m_y\}$ και $\{\sigma_v, \sigma_u\}$. Τελικά για την ομάδα C_{4v} οι κλάσεις είναι: $\{E\}$, $\{C_4, C_4^3\}$, $\{C_4^2\}$, $\{m_x, m_y\}$, $\{\sigma_v, \sigma_u\}$.

Παρατήρηση 1: Εάν $\boldsymbol{H}$ είναι μια υποομάδα της $\boldsymbol{G}$ και $A\in\boldsymbol{G}$ τότε το σύνολο

$$\boldsymbol{H}'=A\boldsymbol{H}A^{-1}=\{ AH_iA^{-1} \,/\, H_i\in\boldsymbol{H} \}$$

αποτελεί υποομάδα, η οποία ονομάζεται **συζυγής υποομάδα** της $\boldsymbol{H}$. Και η υποομάδα $\boldsymbol{H}$ ονομάζεται συζυγής της $\boldsymbol{H}'$.

Ερώτημα: Εάν το στοιχείο Α αντικατασταθεί με άλλο στοιχείο Β, τότε η συζυγής υποομάδα $\boldsymbol{H}'=B\boldsymbol{H}B^{-1}$ ταυτίζεται με την $\boldsymbol{H}'$. (Απάντηση: όχι κατ' ανάγκη)

Παρατήρηση 2: Όταν τα στοιχεία μιας ομάδας είναι μετασχηματισμοί ενός φυσικού συστήματος, οι οποίοι παριστάνουν περιστροφές, αντιστροφές και ανακλάσεις ενός φυσικού συστήματος, τότε υπάρχουν κάποιοι απλοί κανόνες, οι οποίοι επιτρέπουν να καθορίσουμε τις κλάσεις της ομάδας χωρίς να χρειάζεται να εκτελέσουμε τις πράξεις για όλα τα στοιχεία. Οι κανόνες αυτοί είναι:

1) *Οι περιστροφές, που αναφέρονται σε διαφορετικές γωνίες, δεν πρέπει να ανήκουν στην ίδια κλάση*. Και αυτό διότι όλα τα στοιχεία που ανήκουν σε μια κλάση μιας ομάδας έχουν την ίδια τάξη. Πράγματι εάν Α και Β ανήκουν στην ίδια κλάση, τότε θα ισχύει: $A=P^{-1}BP$. Εάν υποθέσουμε τώρα ότι η τάξη του στοιχείου Α είναι n δηλ. $A^n=E$, τότε

$$A^n=(P^{-1}BP)^n=(P^{-1}BP)(P^{-1}BP)\cdots(P^{-1}BP)=P^{-1}B^nP \Rightarrow B^n=PEP^{-1}=E$$

δηλ. και η τάξη του στοιχείου Β είναι n. Το αντίστροφο δεν ισχύει εν γένει. Έτσι οι περιστροφές C_4, C_4^2 της ομάδας μετασχηματισμών του τετραγώνου C_{4v} ανήκουν σε διαφορετικές τάξεις αφού η τάξη του στοιχείου C_4 είναι 4, $(C_4)^4=E$ και η τάξη του C_4^2 είναι 2, $(C_4^2)^2=E$. Απεναντίας οι περιστροφές C_4 και C_4^3 αναφέρονται σε γωνίες π/2 και 3π/2. Η τελευταία όμως γωνία μπορεί να αντικατασταθεί με την γωνία -π/2, της οποίας το μέτρο συμπίπτει με το μέτρο της πρώτης.

2) *Οι περιστροφές γύρω από τον ίδιο άξονα και κατά την θετική ή αρνητική φορά ανήκουν στην ίδια κλάση εάν και μόνο εάν υπάρχει ένας μετασχηματισμός, στοιχείο της ομάδας, ο οποίος αντιστρέφει την διεύθυνση του άξονα ή μετατρέπει το δεξιόστροφο σύστημα αξόνων σε αριστερόστροφο ή αντίστροφα*. Π.χ. οι περιστροφές C_4 και C_4^3 της ομάδας C_{4v} ανήκουν στην ίδια κλάση, διότι μια ανάκλαση, (όπως η m_x ή σ_u) αλλάζει το σύστημα συντεταγμένων.

3) *Οι περιστροφές κατά την ίδια γωνία αλλά γύρω από διαφορετικούς άξονες, ή ανακλάσεις ως προς δυο διαφορετικά επίπεδα, ανήκουν στην ίδια κλάση εάν και μόνο εάν οι δυο άξονες ή τα δυο επίπεδα μπορούν να έρθουν σε σύμπτωση από κάποιο στοιχείο της ομάδας*. Π.χ. οι ανακλάσεις m_x και m_y ανήκουν στην ίδια κλάση διότι ο άξονας 5-7 μπορεί να συμπέσει με τον άξονα 6-8 εφαρμόζοντας την περιστροφή C_4, ενώ τα στοιχεία σ_u και m_x δεν ανήκουν στην ίδια κλάση διότι δεν υπάρχει κανένα στοιχείο της ομάδας C_{4v} που μπορεί να φέρει σε ταύτιση τον άξονα 1-3 και 5-7.

1.7 Συσύνολα

Έστω μια υποομάδα $\boldsymbol{H}$=$\{H_1$=E, H_2, …, $H_h\}$ τάξης h μιας ομάδας $\boldsymbol{G}$ τάξης g και X ένα τυχαίο στοιχείο της $\boldsymbol{G}$. Κατασκευάζουμε τώρα όλα τα γινόμενα: XE, XH_2, … των οποίων το σύνολο συμβολίζουμε με X$\boldsymbol{H}$:

$$X\boldsymbol{H}=\{XE, XH_2,\dots, XH_h\}$$

Διακρίνουμε τώρα δυο περιπτώσεις: το X να ανήκει στο $\boldsymbol{H}$ ή όχι.

α) Εάν το X ανήκει στο $\boldsymbol{H}$ τότε το σύνολο X$\boldsymbol{H}$ ταυτίζεται με την υποομάδα $\boldsymbol{H}$. Προφανώς το X$\boldsymbol{H}$ είναι μια ανακατάταξη των στοιχείων της $\boldsymbol{H}$.

β) Εάν τώρα το X δεν ανήκει στην $\boldsymbol{H}$, τότε κανένα στοιχείο της X$\boldsymbol{H}$ δεν ανήκει στο $\boldsymbol{H}$, διότι σε αντίθετη περίπτωση θα υπάρχει ένα στοιχείο H_i της $\boldsymbol{H}$ τέτοιο ώστε το $XH_i\in\boldsymbol{H}$. Όμως επειδή το $H_i^{-1}\in\boldsymbol{H}$, το γινόμενο $(XH_i)H_i^{-1}$ =X θα ανήκει στην $\boldsymbol{H}$, όπερ άτοπο.

Επομένως τα σύνολα $\boldsymbol{H}$ και X$\boldsymbol{H}$ είναι ξένα μεταξύ τους. Στην περίπτωση αυτή το σύνολο X$\boldsymbol{H}$ ονομάζεται **αριστερό συσύνολο της $\boldsymbol{H}$ ως προς X**. Όμοια μπορούμε να ορίσουμε και τα δεξιά συσύνολα. Εάν X$\boldsymbol{H}$=$\boldsymbol{H}$X τότε μιλάμε απλά για **συσύνολο**.

Παράδειγμα 1: Έστω η ομάδα C_{3v}, η οποία έχει τις εξής υποομάδες:

$\boldsymbol{H}_0=\{E,C_3,C_3^2\}$, $\boldsymbol{H}_1=\{E,\sigma_1\}$, $\boldsymbol{H}_2=\{E,\sigma_2\}$, $\boldsymbol{H}_3=\{E,\sigma_3\}$

α) Θεωρούμε την υποομάδα $\boldsymbol{H}_0=\{E,C_3,C_3^2\}$. Τότε

$\sigma_1\boldsymbol{H}_0=\{\sigma_1E, \sigma_1C_3, \sigma_1C_3^2\}=\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$

$\sigma_2\boldsymbol{H}_0=\{\sigma_2E, \sigma_2C_3, \sigma_2C_3^2\}=\{\sigma_2, \sigma_3, \sigma_1\}$

$\sigma_3\boldsymbol{H}_0=\{\sigma_3E, \sigma_3C_3, \sigma_3C_3^2\}=\{\sigma_3, \sigma_1, \sigma_2\}$

Όμοια βρίσκουμε $\boldsymbol{H}_0\sigma_1=\{E\sigma_1, C_3\sigma_1, C_3^2\sigma_1\}=\{\sigma_1, \sigma_3, \sigma_2\}$ κ.τ.λ.

Επομένως υπάρχει ένα μόνο συσύνολο.

β) Θεωρούμε την υποομάδα $\boldsymbol{H}_1=\{E,\sigma_1\}$. Τότε

$C_3\boldsymbol{H}_1=\{C_3E, C_3\sigma_1\}=\{C_3, \sigma_3\}$	$\boldsymbol{H}_1C_3=\{EC_3, \sigma_1C_3\}=\{C_3, \sigma_2\}$
$C_3^2\boldsymbol{H}_1=\{C_3^2E, C_3^2\sigma_1\}=\{C_3^2, \sigma_2\}$	$\boldsymbol{H}_1C_3^2=\{EC_3^2, \sigma_1C_3^2\}=\{C_3^2, \sigma_3\}$
$\sigma_2\boldsymbol{H}_1=\{\sigma_2E, \sigma_2\sigma_1\}=\{\sigma_2, C_3^2\}$	$\boldsymbol{H}_1\sigma_2=\{E\sigma_2, \sigma_1\sigma_2\}=\{\sigma_2, C_3\}$
$\sigma_3\boldsymbol{H}_1=\{\sigma_3E, \sigma_3\sigma_1\}=\{\sigma_3, C_3\}$	$\boldsymbol{H}_1\sigma_3=\{E\sigma_3, \sigma_1\sigma_3\}=\{\sigma_3, C_3^2\}$

Για την υποομάδα $\boldsymbol{H}_1=\{E,\sigma_1\}$ υπάρχουν 2 αριστερά συσύνολα: $\{C_3, \sigma_3\}$, $\{C_3^2, \sigma_2\}$ και 2 δεξιά: $\{C_3, \sigma_2\}$, , $\{C_3^2, \sigma_3\}$

γ) Θεωρούμε την υποομάδα $\boldsymbol{H}_2=\{E,\sigma_2\}$. Τότε

$C_3\boldsymbol{H}_2=\{C_3E, C_3\sigma_2\}=\{C_3, \sigma_1\}$

$C_3^2\boldsymbol{H}_2=\{C_3^2E, C_3^2\sigma_2\}=\{C_3^2, \sigma_3\}$

$\sigma_1\boldsymbol{H}_2=\{\sigma_1E, \sigma_1\sigma_2\}=\{\sigma_1, C_3\}$

$\sigma_3\boldsymbol{H}_2=\{\sigma_3E, \sigma_3\sigma_2\}=\{\sigma_3, C_3^2\}$

Για την υποομάδα $\boldsymbol{H}_2=\{E,\sigma_2\}$ υπάρχουν 2 αριστερά συσύνολα: $\{C_3, \sigma_1\}$, $\{C_3^2, \sigma_3\}$ και εύκολα επίσης προκύπτει ότι υπάρχουν 2 δεξιά συσύνολα: $\{C_3^2, \sigma_1\}$, $\{C_3, \sigma_3\}$, δ) Θεωρούμε την υποομάδα $\boldsymbol{H}_3$={E,σ_3}. Τότε

$C_3\boldsymbol{H}_3=\{C_3E, C_3\sigma_3\}=\{C_3, \sigma_2\}$

$C_3^2\boldsymbol{H}_3=\{C_3^2E, C_3^2\sigma_3\}=\{C_3^2, \sigma_1\}$

$\sigma_1\boldsymbol{H}_3=\{\sigma_1E, \sigma_1\sigma_3\}=\{\sigma_1, C_3^2\}$

$\sigma_2\boldsymbol{H}_3=\{\sigma_2E, \sigma_2\sigma_3\}=\{\sigma_2, C_3\}$

Για την υποομάδα $\boldsymbol{H}_3$={E,σ_3} υπάρχουν 2 αριστερά συσύνολα: {C_3, σ_2}, , {C_3^2, σ_1} , όπως επίσης και 2 δεξιά συσύνολα: {C_3, σ_1}, {C_3^2, σ_2}

***Παράδειγμα 2*: Η ομάδα C_{4v} έχει τις εξής υποομάδες:**

$\boldsymbol{H}_0$={E, C_4, C_4^2, C_4^3}, $\boldsymbol{H}_1$={E, C_4^2, m_x, m_y}, $\boldsymbol{H}_2$={E, C_4^2, σ_u, σ_v}, $\boldsymbol{H}_3$={E, σ_u}, $\boldsymbol{H}_4$={E, σ_v}, $\boldsymbol{H}_5$={E, m_x}, $\boldsymbol{H}_6$= {E, m_y}

α) Θεωρούμε την υποομάδα $\boldsymbol{H}_0$={E, C_4, C_4^2, C_4^3}. Τότε

$m_x\boldsymbol{H}_0=\{m_xE, m_xC_4, m_xC_4^2, m_xC_4^3\}=\{m_x, \sigma_v, m_y, \sigma_u\}$

$m_y\boldsymbol{H}_0=\{m_yE, m_yC_4, m_yC_4^2, m_yC_4^3\}=\{m_y, \sigma_u, m_x, \sigma_v\}$

$\sigma_u\boldsymbol{H}_0=\{\sigma_uE, \sigma_uC_4, \sigma_uC_4^2, \sigma_uC_4^3\}=\{\sigma_u, m_x, \sigma_v, m_y\}$

$\sigma_v\boldsymbol{H}_0=\{\sigma_vE, \sigma_vC_4, \sigma_vC_4^2, \sigma_vC_4^3\}=\{\sigma_v, m_y, \sigma_u, m_y\}$

Για την υποομάδα $\boldsymbol{H}_0$={E, C_4, C_4^2, C_4^3} υπάρχει ένα μόνο αριστερό συσύνολο: {m_x, m_y, σ_u, σ_v}

β) Θεωρούμε την υποομάδα $\boldsymbol{H}_1$= {E, C_4^2, m_x, m_y}. Τότε

$C_4\boldsymbol{H}_1=\{C_4E, C_4C_4^2, C_4m_x, C_4m_y\}=\{C_4, C_4^3, \sigma_u, \sigma_v\}$

$C_4^3\boldsymbol{H}_1=\{C_4^3E, C_4^3C_4^2, C_4^3m_x, C_4^3m_y\}=\{C_4^3, C_4, \sigma_v, \sigma_u\}$

$\sigma_u\,\boldsymbol{H}=\{\sigma_uE, \sigma_uC_4^2, \sigma_um_x, \sigma_u\,m_y\}=\{\sigma_u, \sigma_v, C_4, C_4^3\}$

$\sigma_v\,\boldsymbol{H}_1=\{\sigma_vE, \sigma_vC_4^2, \sigma_vm_x, \sigma_v\,m_y\}=\{\sigma_v, \sigma_u, C_4^3, C_4\}$

Για την υποομάδα $\boldsymbol{H}_1$= {E, C_4^2, m_x, m_y} υπάρχει ένα μόνο αριστερό συσύνολο: {C_4, C_4^3, σ_u, σ_v}

Με όμοιο τρόπο βρίσκουμε και τα υπόλοιπα συσύνολα.

Παρατήρηση 1: Ένα συσύνολο X***H*** με X$\notin$***H*** δεν μπορεί να είναι υποομάδα, διότι προφανώς δεν περιέχει το ουδέτερο στοιχείο E. Πράγματι εάν XH_i=E τότε $X=H_i^{-1}$. Επειδή όμως $H_i^{-1}\in\boldsymbol{H}$ τότε και το X$\in$***H***, όπερ άτοπο.

Θεώρημα 1: Δύο συσύνολα X***H***, Y***H*** ή ταυτίζονται ή δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο.

Απόδειξη: Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:

α) Εάν $Y\notin X\boldsymbol{H}$, τότε $X\boldsymbol{H}\cap Y\boldsymbol{H}=\varnothing$.

Πράγματι αν υπήρχαν στοιχεία $XH_i=YH_j$ τότε $Y= XH_iH_j^{-1} \Rightarrow Y\in X\boldsymbol{H}$ πράγμα άτοπο.

β) Εάν $Y\in X\boldsymbol{H}$ τότε $X\boldsymbol{H}=Y\boldsymbol{H}$

Πράγματι τότε υπάρχει στοιχείο $H_i \in \boldsymbol{H}$ τέτοιο ώστε $Y=XH_i$ (1) $\Rightarrow X=YH_i^{-1}$ (2). 'Αρα

(1) $\Rightarrow Y\boldsymbol{H}=XH_i\boldsymbol{H} \Rightarrow Y\boldsymbol{H}\subset X\boldsymbol{H}$ και (2) $\Rightarrow X\boldsymbol{H}= YH_i^{-1}\boldsymbol{H} \Rightarrow X\boldsymbol{H}\subset Y\boldsymbol{H}$. Τελικά $X\boldsymbol{H}=Y\boldsymbol{H}$

Άλλος τρόπος: Εάν $Y\in X\boldsymbol{H}$ τότε υπάρχουν δυο στοιχεία H_i, H_j τέτοια ώστε $XH_i=YH_j \Rightarrow$

$Y^{-1}X=H_jH_i^{-1}$ δηλ. το στοιχείο $Y^{-1}X$ είναι ένα στοιχείο της υποομάδας $\boldsymbol{H}$ και επομένως το σύνολο $Y^{-1}X\boldsymbol{H}$ συμπίπτει με την $\boldsymbol{H}$: $Y^{-1}X\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H} \Rightarrow X\boldsymbol{H}=Y\boldsymbol{H}$.

Εάν τώρα δεν υπάρχουν στοιχεία $H_i,H_j\in\boldsymbol{H}$ ώστε να ισχύει η σχέση $XH_i=YH_j$ τότε τα συσύνολα έχουν τομή το κενό σύνολο.

Θεώρημα 2 (Lagrange): Εάν το $\boldsymbol{H}$ είναι μια υποομάδα τάξης h της ομάδας $\boldsymbol{G}$ τάξης g, τότε το g είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του h και ο ακέραιος g/h ονομάζεται **δείκτης της *H* ως προς την *G***.. Επίσης η τάξη κάθε στοιχείου A της $\boldsymbol{G}$ είναι διαιρέτης της τάξης g της ομάδας.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $\boldsymbol{H}$ υποομάδα $\boldsymbol{H}=\{A_1=E, A_2, A_3,\cdots,A_h\}$ με $h<g$. Υπάρχει συνεπώς ένα στοιχείο $X\in\boldsymbol{G}$ και δεν ανήκει στην $\boldsymbol{H}$. Κατασκευάζουμε τότε το συσύνολο:

$$X\boldsymbol{H}=\{XA_1, XA_2, XA_3,\cdots,XA_h\}$$

το οποίο δεν έχει κανένα κοινό στοιχείο με την υποομάδα $\boldsymbol{H}$. Άρα η ομάδα $\boldsymbol{G}$ έχει τουλάχιστον 2h σε πλήθος στοιχεία: h στοιχεία από την υποομάδα $\boldsymbol{H}$ και h στοιχεία από το συσύνολο $X\boldsymbol{H}$. Αν τώρα $g=2h$ η απόδειξη τελείωσε. Εάν $2h<g$, υπάρχει στοιχείο $Y\in\boldsymbol{G}$ τέτοιο ώστε $Y\notin\boldsymbol{H}$, $Y\notin X\boldsymbol{H}$. Κατασκευάζουμε τώρα το συσύνολο

$$Y\boldsymbol{H}=\{YA_1, YA_2, YA_3,\cdots,YA_h\}$$

Επειδή $X\boldsymbol{H}\cap Y\boldsymbol{H}=\varnothing$ τότε θα είναι $g=3h$ ή υπάρχει $Z\in G$, $Z\notin\boldsymbol{H}$, $Z\notin Y\boldsymbol{H}$, $Z\notin X\boldsymbol{H}$

Η διαδικασία όμως αυτή δεν μπορεί να συνεχιστεί επ' άπειρον καθ΄όσον

$$\{\boldsymbol{H}\}\cup\{X\boldsymbol{H}\}\cup\{Y\boldsymbol{H}\}\cup\cdots=\boldsymbol{G}$$

και η τάξη της $\boldsymbol{G}$ είναι πεπερασμένη. Συνεπώς υπάρχει θετικός ακέραιος k τέτοιος ώστε $kh=g$ $\Rightarrow k=g/h=$ακέραιος.

Εάν η τάξη ενός στοιχείου A είναι n, τότε το σύνολο $\{A, A^2, A^3, \cdots, A^n=E\}$ αποτελεί υποομάδα, όπως είδαμε στο παράδειγμα 1 της παραγράφου 1.3, Επομένως το n θα διαιρεί το g.

1.8 Κανονική υποομάδα και ομάδα πηλίκο.

Εάν τα αριστερά και δεξιά συσύνολα μιας υποομάδας $\boldsymbol{H}$ ως προς όλα τα στοιχεία $X\in\boldsymbol{G}$ συμπίπτουν, τότε η $\boldsymbol{H}$ ονομάζεται **κανονική υποομάδα** ή **αναλλοίωτη υποομάδα** της $\boldsymbol{G}$,(**normal**, **invariant**) δηλ. θα έχουμε:

$$X\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}X \;\Rightarrow\; \boldsymbol{H}=X^{-1}\boldsymbol{H}X \quad \forall X\in\boldsymbol{G}$$

ή ισοδύναμα κάθε στοιχείο του $X\boldsymbol{H}$ θα ισούται με κάποιο στοιχείο του $\boldsymbol{H}X$, δηλ.

$$XH_i=H_jX \;\Rightarrow\; X^{-1}H_jX=H_i \qquad 1\le i,j\le h$$

Αλλά η σχέση αυτή είναι η σχέση συζυγίας μεταξύ των στοιχείων H_i και H_j και δείχνει ότι εάν ένα στοιχείο H_i ανήκει σε μια κανονική υποομάδα $\boldsymbol{H}$ της $\boldsymbol{G}$, τότε όλα τα στοιχεία τα συζυγή του H_i ανήκουν και αυτά στην υποομάδα $\boldsymbol{H}$. Τα παραπάνω συχνά διατυπώνονται λέγοντας ότι *μια κανονική υποομάδα αποτελείται από κλάσεις*. Το αντίστροφο επίσης αληθεύει, δηλ. *εάν μια υποομάδα αποτελείται από κλάσεις, τότε είναι κανονική*.

Επίσης η σχέση $\boldsymbol{H}=X^{-1}\boldsymbol{H}X \quad \forall X\in \boldsymbol{G}$ δικαιολογεί την έκφραση αναλλοίωτη υποομάδα, με την έννοια ότι *η υποομάδα **H** παραμένει αναλλοίωτη ως προς τους μετασχηματισμούς ομοιότητας*.

Για την ομάδα C_{4v} η υποομάδα $\{E, C_4^2, m_x, m_y\}$είναι κανονική, ενώ η υποομάδα $\{E, m_x\}$ δεν είναι. (Υπάρχουν άλλες κανονικές υποομάδες;[6]). Να βρεθούν οι κανονικές υποομάδες της ομάδας C_{3v}.

Κάθε ομάδα ***G*** έχει τουλάχιστον δυο τετριμένες κανονικές υποομάδες την {Ε} και την ***G***.

Μία ομάδα ονομάζεται **απλή**, (**simple**), όταν περιέχει μόνο τις τετριμμένες κανονικές υποομάδες και **ημιαπλή**, (**semi-simple**), εάν περιέχει κανονική υποομάδα που δεν είναι αβελιανή.

Παρατήρηση 1: Έστω τώρα μια κανονική υποομάδα ***H*** της ***G***. Σχηματίζουμε τα δυνατά συσύνολα:

$$K_i=X_i\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}X_i \quad \text{όπου } X_i\in\boldsymbol{G},\ X_i\notin\boldsymbol{H},\ i=1,2,3,\cdots,k$$

Τα απαραίτητα για τον σκοπό αυτό στοιχεία X_i της ***G*** διαλέγονται σύμφωνα με το θεώρημα του Lagrange. Εάν η υποομάδα ***H*** έχει h στοιχεία και k είναι το πλήθος των συσυνόλων $X_i\boldsymbol{H}$, $i=1,\cdots,k$, τότε η ομάδα ***G***, σαν σύνολο, μπορεί να θεωρηθεί σαν ένωση της ***H*** και των συσυνόλων $X_i\boldsymbol{H}$, δηλ. $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{H}\bigcup\left(\bigcup_{i=1}^{k}X_i\boldsymbol{H}\right)$ και θα έχουμε: $kh+h=g \Rightarrow k=g/h-1$ και επομένως από την υποομάδα ***H*** τάξης h μπορούμε να κατασκευάσουμε $k=g/h-1$ σε πλήθος συσύνολα.

Εάν ***H*** είναι μια κανονική υποομάδα της ***G***, τότε το σύνολο όλων των συσυνόλων της ***H*** αποτελεί ομάδα με πράξη εσωτερικής συνθέσεως τον πολλαπλασιασμό συσυνόλων, που ορίζεται ως εξής: εάν $X\boldsymbol{H}$ και $Y\boldsymbol{H}$ δυο συσύνολα, ορίζουμε σαν γινόμενο αυτών το συσύνολο $Z\boldsymbol{H}$ όπου $Z=XY$ [7]. Αποδεικνύεται ότι το ίδιο συσύνολο παίρνουμε εάν πολλαπλασιάσουμε κάθε στοιχείο του πρώτου συσυνόλου $X\boldsymbol{H}$ με κάθε στοιχείο του δεύτερου συσυνόλου $Y\boldsymbol{H}$. Η ομάδα αυτή των συσυνόλων ονομάζεται **ομάδα πηλίκο** ή **παραγοντική ομάδα** και συμβολίζεται με

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{G}/\boldsymbol{H}$$

(ο συμβολισμός είναι επηρεασμένος από το ότι $k+1=g/h$)

Εάν g είναι η τάξη της ***G*** και h η τάξη της ***H***, τότε η τάξη της ***R*** είναι g/h δηλ. ο δείκτης της ***H*** ως προς την ***G***.

Παράδειγμα 1: Θα εφαρμόσουμε τα παραπάνω στην περίπτωση που $\boldsymbol{G}=C_{3v}$ και $\boldsymbol{H}=\{E,C_3,C_3^2)\}$. Επειδή $k=g/h -1=6/3 -1=1$, υπάρχει μόνο ένα συσύνολο της ***H***. Επομένως ένα

[6] Μια άλλη κανονική υποομάδα είναι η $\{E, C_4^2, \sigma_v, \sigma_u\}$

[7] Το ουδέτερο στοιχείο της ομάδας είναι το $E\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}$

στοιχείο αρκεί για να γεννήσει το συσύνολο αυτό. Σαν τέτοιο διαλέγουμε το $X_1=\sigma_1$, και το συσύνολο είναι το $K_1=X_1\boldsymbol{H}=\sigma_1\boldsymbol{H}=\{\sigma_1E, \sigma_1C_3, \sigma_1C_3^2\}=\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\}$.

Το γινόμενο τώρα του K_1 με τον εαυτό του είναι

$$K_1K_1=K_{11}=\{\sigma_1^2, \sigma_1\sigma_2, \sigma_1\sigma_3, \sigma_2\sigma_1, \sigma_2^2, \sigma_2\sigma_3, \sigma_3\sigma_1, \sigma_3\sigma_2, \sigma_3^2\}\Rightarrow$$

$$K_{11}=\{E,C_3,C_3^2)\}. \quad \text{Δηλ. } K_{11}=H \quad \text{ή} \quad K_1K_1=H$$

Στο παράδειγμα αυτό, όπου $\boldsymbol{G}=C_{3v}$ και $\boldsymbol{H}=\{E,C_3,C_3^2)\}$, η ομάδα πηλίκο έχει δυο στοιχεία: το στοιχείο K_1 και το στοιχείο H. Ο πίνακας πολλαπλασιασμού είναι:

	H	K_1
H	H	K_1
K_1	K_1	H

αφού $K_1H=HK_1=K_1$, $K_1K_1=H$, $HH=H$. Το H προφανώς είναι το ουδέτερο στοιχείο.

Παράδειγμα 2: Θεωρούμε την ομάδα $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{R}^1$ των πραγματικών αριθμών με νόμο εσωτερικής συνθέσεως την πρόσθεση, όπως και την υποομάδα $\boldsymbol{Z}$ των ακεραίων αριθμών. Τα συσύνολα που παράγονται από την υποομάδα $\boldsymbol{Z}$ είναι της μορφής: $x\boldsymbol{Z}=\{x+k \,/\, k\in \boldsymbol{Z}$ και $x\in \boldsymbol{R}^1$. Η υποομάδα $\boldsymbol{Z}$ προφανώς είναι κανονική διότι $x\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{Z}x\ \forall x\in\boldsymbol{R}^1$. Σκοπός μας τώρα είναι να βρούμε την ομάδα πηλίκο $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}^1/\boldsymbol{Z}$ και ποια είναι η γεωμετρική της ερμηνεία. Θεωρούμε την μοναδιαία περιφέρεια $\boldsymbol{S}^1$ και την απεικόνιση $\rho : \boldsymbol{R}^1 \to \boldsymbol{S}^1$ η οποία ορίζεται από την σχέση: $\rho : x \to \rho(x)\equiv e^{2\pi i x}$. Η απεικόνιση ρ είναι συνεχής αλλά όχι αμφιμονοσήμαντη, διότι $\rho(x+k)=\rho(x)$ με $k\in\boldsymbol{Z}$. Όμως την περιφέρεια $\boldsymbol{S}^1$ μπορούμε να την δούμε σαν ομάδα ως εξής: Θεωρούμε δυο σημεία P_1 και P_2, τα οποία μπορούν αλγεβρικά να ορισθούν από τις σχέσεις: $P_1 = e^{i\theta_1}$, $P_2 = e^{i\theta_2}$. Ορίζουμε σαν γινόμενο των δυο αυτών σημείων το σημείο $P_3 = P_1P_2 = e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = e^{i\theta_3}$ με $\theta_3=\theta_1+\theta_2$ εάν $\theta_1+\theta_2 \le 2\pi$ ή $\theta_3=\theta_1+\theta_2-2\pi$ εάν $\theta_1+\theta_2 > 2\pi$. Μπορούμε τώρα να δούμε την απεικόνιση ρ σαν απεικόνιση μεταξύ των δυο ομάδων, της $\boldsymbol{R}^1$ και της $\boldsymbol{S}^1$. Ο πυρήνας της ρ Ker(ρ), που ορίζεται από την σχέση: $\mathrm{Ker}(\rho)=\{x\in\boldsymbol{R}^1 \,/\, \rho(x)=1\}$, αποτελείται από την υποομάδα $\boldsymbol{Z}$ των ακεραίων αριθμών. Επομένως η περιφέρεια $\boldsymbol{S}^1$ είναι ισομορφική[8], με την ομάδα πηλίκο $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}^1/\boldsymbol{Z}$ και μπορούμε να πούμε ότι η ομάδα πηλίκο $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}^1/\boldsymbol{Z}$ παριστάνει την μοναδιαία περιφέρεια. Δηλαδή κάθε σημείο της περιφέρειας $\boldsymbol{S}^1$ παριστάνει ένα συσύνολο το $\theta\boldsymbol{Z}$ όπου θ το όρισμα του σημείου.

Παράδειγμα 3: Ας θεωρήσουμε το σύνολο $\boldsymbol{E}^3$ όλων των γραμμικών μετασχηματισμών των διανυσμάτων του Ευκλείδειου χώρου R^3, που αφήνουν το μήκος των διανυσμάτων αμετάβλητο. Προφανώς οι μετασχηματισμοί αυτοί είναι οι μετατοπίσεις $T(\mathbf{v})$, (με $T(\mathbf{v})\mathbf{u}=\mathbf{u}+\mathbf{v}$) και οι περιστροφές R(α,β,γ), (όπου α,β,γ οι γωνίες του Euler). Το σύνολο αυτό αποτελεί ομάδα με νόμο εσωτερικής συνθέσεως την σύνθεση των μετασχηματισμών και ονομάζεται **Ευκλείδεια ομάδα**. Αποδεικνύεται ότι:

1) το σύνολο των μετατοπίσεων $T(\mathbf{v})$ αποτελεί κανονική υποομάδα της $\boldsymbol{E}^3$

---

[8] Ο ορισμός των ισομορφικών ομάδων δίνεται παρακάτω στην παράγραφο 1.10.

2) η ομάδα πηλίκο $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{E}^3/\mathrm{T}(\mathbf{v})$ είναι η υποομάδα των περιστροφών δηλ. $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{E}^3/\mathrm{T}(\mathbf{v})=$ R(α,β,γ). (Ακριβέστερα η ομάδα πηλίκο $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{E}^3/\mathrm{T}(\mathbf{v})$ είναι ισομορφική προς την υποομάδα R(α,β,γ)

1.9 Ευθύ γινόμενο ομάδων.

Θεωρούμε μια ομάδα ***G*** και δυο υποομάδες της, ***H*** και ***K***, τάξης h και k αντίστοιχα, δηλ $\boldsymbol{H}=\{H_1=E, H_2, \dots, H_h\}$ $\boldsymbol{K}=\{K_1=E, K_2, \dots, K_k\}$

Ορίζουμε σαν **ευθύ γινόμενο** αυτών των δυο ομάδων την ομάδα ***F*** τάξης f=hk αποτελούμενη από στοιχεία που προκύπτουν από τα γινόμενα των ομάδων ***H*** και ***K*** με τους περιορισμούς:

1) οι ομάδες ***H*** και ***K*** να μην έχουν κοινά στοιχεία εκτός από το ταυτοτικό στοιχείο Ε, δηλ. $\boldsymbol{H}\cap\boldsymbol{K}=\{E\}$.

2) κάθε στοιχείο του ***H*** μετατίθεται με κάθε στοιχείο του ***K***.

Το ευθύ γινόμενο ***F*** των ομάδων ***H*** και ***K*** συμβολίζεται με:

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{K}=\{E, EK_2, EK_3, \dots, Ek_k, H_2K_2, \dots, H_hK_k\}$$

Προφανώς και οι δυο ομάδες ***H*** και ***K*** είναι κανονικές υποομάδες της ***F***, (λόγω του περιορισμού 2). Επίσης παρατηρούμε ότι κάθε στοιχείο Γ της ομάδας ***F*** γράφεται κατά μοναδικό τρόπο σαν γινόμενο δυο στοιχείων $\Gamma=H_\mu K_\nu$ όπου $H_\mu\in\boldsymbol{H}$ και $K_\lambda\in\boldsymbol{K}$.

Το ευθύ γινόμενο είναι η πιο απλή μέθοδος για να διευρύνουμε μια ομάδα και βρίσκει μεγάλη εφαρμογή στη μελέτη των συμμετριών των φυσικών συστημάτων, όπως ατόμων, μορίων, κρυστάλλων, πυρήνων, και στοιχειωδών σωματίων. Π.χ. ας υποθέσουμε ότι ***H*** είναι μια ομάδα συμμετρίας ενός συστήματος αποτελούμενη μόνο από γνήσιες περιστροφές. Αργότερα ανακαλύπτουμε ότι η ανάκλαση J είναι επίσης ένας μετασχηματισμός συμμετρίας του συστήματος. Η ανάκλαση J μαζί με το ταυτοτικό στοιχείο Ε αποτελούν ομάδα τάξης 2, $\boldsymbol{K}=\{E,J\}$. Επειδή η ανάκλαση μετατίθεται με όλες τις περιστροφές, μπορούμε να πάρουμε το ευθύ γινόμενο της ***H*** με την ***K*** και να προκύψει έτσι μια μεγαλύτερη ομάδα συμμετρίας η $\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{K}$.

Παρατήρηση 1: Η έννοια του ευθέως γινομένου δυο υποομάδων μπορεί να επεκταθεί στην περίπτωση δυο ομάδων $(\boldsymbol{H},*)$, $(\boldsymbol{K},\circ)$, που δεν είναι υποομάδες της αυτής ομάδας. Ορίζουμε τότε το καρτεσιανό γινόμενο $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{K}$ με στοιχεία $\boldsymbol{F}=(A,B)$ όπου $A\in\boldsymbol{H}$ και $B\in\boldsymbol{K}$ και μια εσωτερική πράξη, που θα την συμβολίζουμε με • επί του F ως εξής:

$$(\forall F_1=(A_1,B_1),\ F_2=(A_2,B_2)\in F)[F_1\bullet F_2\equiv(A_1*A_2,\ B_1\circ B_2)]$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι το ζεύγος $(\boldsymbol{F},\bullet)$ αποτελεί ομάδα, που ονομάζεται **ευθύ γινόμενο** των ομάδων ***H*** και ***K***.

Παράδειγμα 1: Η ομάδα ***H*** αποτελείται από τους πίνακες E=$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ και σ_x=$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (9 και η ομάδα ***K*** αποτελείται από τους πίνακες E=$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$και I=$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$(10. Θα βρούμε την ομάδα ***K***×***H*** δηλαδή το ευθύ γινόμενο αυτών.

Πρώτα θα ελέγξουμε εάν τα σύνολα ***H*** και ***K*** αποτελούν ομάδες. Παρατηρούμε ότι σ_xE= Eσ_x =σ_x και σ_x^2=E. Άρα τα στοιχεία E και σ_x αποτελούν ομάδα. Επίσης EI=I, IE=E και I^2=E, δηλαδή τα στοιχεία E και I αποτελούν μια άλλη ομάδα. Επίσης οι ομάδες ***K*** και ***H*** έχουν μόνο το E κοινό στοιχείο.

Επιπλέον σ_xI=Iσ_x=$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$=J(11, δηλαδή ισχύουν όλες οι προϋποθέσεις για το σχηματισμό της ομάδας ***K***×***H***. Εκτελώντας τα απαραίτητα γινόμενα βρίσκουμε ότι η ομάδα ***K***×***H*** περιέχει τα στοιχεία

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{K}\times\boldsymbol{H}=\{E,\ \sigma_x,\ I,\ J\}$$

Το ευθύ γινόμενο ομάδων χρησιμοποιείται συχνά για τη διάσπαση μεγάλων συμμετριών σε μικρότερες.

Παράδειγμα 2: Εάν ***H***={E, m_x} και ***K***={E, m_y} οι δυο υποομάδες της ομάδας C_{4v}, τότε θα έχουμε: ***K***×***H***={E, C_4^2, m_x, m_y}.

1.10 Ισομορφισμός και ομομορφισμός ομάδων

Ο πολλαπλασιαστικός πίνακας μιας ομάδας, όπως ο πίνακας των συμμετριών του τετραγώνου, χαρακτηρίζει πλήρως την ομάδα και περιέχει όλες τις πληροφορίες τις σχετικές με την αναλυτική δομή της ομάδας. Όλες οι ομάδες, που έχουν όμοιους πολλαπλασιαστικούς πίνακες, έχουν την ίδια δομή. Οι ομάδες αυτές λέγονται **ισομορφικές**. Έτσι εάν ***G***={E, A, B, C, …} και ***G***′={E′, A′, B′, C′, …} είναι δυο ομάδες της ίδιας τάξεως g, με αντίστοιχες εσωτερικές πράξεις * και °, και υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση:

$$f: \boldsymbol{G} \rightarrow \boldsymbol{G}'$$

(που αναγκαστικά θα είναι και επί), με την ιδιότητα να διατηρεί τις πράξεις δηλ.

$$(\forall A,B\in \boldsymbol{G})[f(A*B)=f(A)\circ f(B)]$$

τότε οι ομάδες ***G*** και ***G***′ είναι **ισομορφικές** και η απεικόνιση f λέγεται **ισομορφισμός**. Ο πολλαπλασιαστικός πίνακας της ***G***′ μπορεί να προκύψει από τον πολλαπλασιαστικό πίνακα της ***G*** αντικαθιστώντας τα στοιχεία της ***G*** με τα αντίστοιχα στοιχεία της ***G***′.

(9 Ο πίνακας σ_x παριστάνει συμμετρία ως προς την πρώτη διχοτόμο.

(10 Ο πίνακας I παριστάνει αντιστροφή.

(11 Ο πίνακας J παριστάνει συμμετρία ως προς την δεύτερη διχοτόμο.

Σαν παράδειγμα μπορούμε να δούμε ότι η ομάδα {1, i, -1, -i} είναι ισομορφική προς την ομάδα των περιστροφών {E, C_4, C_4^2. C_4^3 } του τετραγώνου εάν σαν ισοφορφισμό θεωρήσουμε την αντιστοιχία:

$$1 \rightarrow E, \qquad -i \rightarrow C_4\,, \quad -1 \rightarrow C_4^2, \qquad i \rightarrow C_4^3$$

Αυτό μας κάνει να σκεφθούμε ότι το σύνολο των αριθμών {1, -1, i, -i} παριστούν περιστροφές. Πράγματι οι μιγαδικοί αριθμοί της μορφής $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ ως γνωστόν παριστούν περιστροφές στο μιγαδικό επίπεδο κατά γωνία θ. Έτσι:

1) για θ=0 έχουμε τον αριθμό 1 που μπορούμε να τον αντιστοιχήσουμε στο ταυτοτικό στοιχείο E

2) για θ=-π/2 έχουμε τον αριθμό -i που μπορούμε να τον αντιστοιχήσουμε στο στοιχείο C_4

3) για θ=-π έχουμε τον αριθμό -1 που μπορούμε να τον αντιστοιχήσουμε στο στοιχείο C_4^2

4) για θ=-3π/2 έχουμε τον αριθμό i που μπορούμε να τον αντιστοιχήσουμε στο στοιχείο C_4^3

Εάν η απεικόνιση f δεν είναι αμφιμονοσήμαντη, αλλά διατηρεί τις πράξεις, τότε οι ομάδες ***G*** και ***G ′*** λέγονται **ομομορφικές** και η απεικόνιση f **ομομορφισμός**. Στην περίπτωση αυτή οι δυο ομάδες δεν μπορεί να είναι της ίδιας τάξεως. Παράδειγμα ομομορφικών ομάδων είναι η ομάδα ***G*** και η ομάδα πηλίκο ***R***=***G***/***H***.

1.11 Οι ομάδες των μεταθέσεων

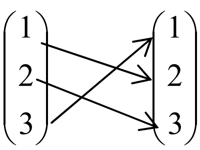
Οι ομάδες αυτές έχουν μεγάλο ενδιαφέρον για την Κβαντομηχανική και ιδίως για την περίπτωση των ταυτοτικών σωματίων. Ας θεωρήσουμε ένα σύστημα αποτελούμενο από n ταυτοτικά αντικείμενα. Εάν εναλλάξουμε την θέση οποιωνδήποτε δυο ή περισσοτέρων από αυτά τα αντικείμενα, η κατάσταση που θα δημιουργηθεί δεν θα διακρίνεται από την αρχική. Μπορούμε να θεωρήσουμε κάθε τέτοια εναλλαγή, **μετάθεση**, σαν ένα μετασχηματισμό του συστήματος. Το σύνολο αυτό των μετασχηματισμών αποτελεί ομάδα, της οποίας η τάξη είναι n!, εφ' όσον όλες οι μεταθέσεις n αντικειμένων είναι n!. Η ομάδα αυτή ονομάζεται **ομάδα μεταθέσεων**, (**permutation group**), n αντικειμένων ή **συμμετρική ομάδα** βαθμού n και συμβολίζεται με S_n.

Εάν το σύνολο αποτελείται από τρία αντικείμενα, τότε οι 3!=6 δυνατές μεταθέσεις είναι:

$$E=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}\qquad A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\qquad D=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\qquad F=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\qquad (1)$$

Π.χ. η μετάθεση A είναι ένας μετασχηματισμός:

A: 

κατά τον οποίον το αντικείμενο που είναι στη θέση 1 πηγαίνει στη θέση 2, το αντικείμενο που είναι στη θέση 2 πηγαίνει στη θέση 3 και το αντικείμενο που είναι στη θέση 3 πηγαίνει στη θέση 1.

Οι δείκτες 1,2,3 αναφέρονται στις θέσεις των τριών αντικειμένων παρά στα ίδια τα αντικείμενα. Το σύστημα έχει πιθανές "καταστάσεις", που τις συμβολίζουμε με:

Ψ_1=(1 2 3) Ψ_2=(2 3 1) Ψ_3=(3 1 2)

Ψ_4=(2 1 3) Ψ_5=(3 2 1) Ψ_6=(1 3 2)

πάνω στις οποίες μπορούν να επιδράσουν οι "πράξεις" (1) των μεταθέσεων. Π.χ.

$$A\Psi_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}(1\ 2\ 3)=(3\ 1\ 2)=\Psi_3$$

$$C\Psi_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}(2\ 3\ 1)=(3\ 2\ 1)=\Psi_5$$

Σε κάθε μετάθεση μόνο η κατακόρυφη θέση έχει σημασία και όχι η οριζόντια. Π.χ. οι μεταθέσεις $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ταυτίζονται.

Υπάρχουν δυο τρόποι για να υπολογίσουμε την σύνθεση δυο μεταθέσεων. Ο πρώτος τρόπος στηρίζεται στην μαθηματική έννοια της συνθέσεως και έχει ως εξής:

Έστω ένα πεπερασμένο σύνολο Μ=$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$. και Β=$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix}$, Γ= $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_n \end{pmatrix}$ δυο μεταθέσεις των στοιχείων του Μ. Οι μεταθέσεις αυτές είναι αμφιμονοσήμαντες και επί απεικονίσεις του $M \to M$, δηλ.

$B: M \to M \qquad B: \alpha_i \mapsto B(\alpha_i)=\beta_i$

$\Gamma: M \to M \qquad \Gamma: \alpha_j \mapsto \Gamma(\alpha_j)=\gamma_j$

Εφαρμόζοντας τον ορισμό της σύνθεσης δυο απεικονίσεων για τις μεταθέσεις έχουμε:

$\Gamma \circ B: M \to M$

$\Gamma \circ B: \alpha_i \mapsto (\Gamma \circ B)(\alpha_i)=\Gamma(B(\alpha_i))=\Gamma(\beta_i)=\delta_j$

όπου το δ_j είναι ένα από τα γ_j, δηλ.

$$\Gamma \circ B=\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \delta_1 & \delta_2 & \cdots & \delta_n \end{pmatrix}$$

Στην πράξη αναδιατάσσουμε τα στοιχεία της πρώτης γραμμής του πρώτου παράγοντα, δηλ. της Γ έτσι ώστε η γραμμή αυτή να ταυτιστεί με την δεύτερη γραμμή του δεύτερου παράγοντα, δηλ, της Β και έχουμε:

$$\Gamma^\circ B=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_n\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n\\ \delta_1 & \delta_2 & \cdots & \delta_n\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\\ \delta_1 & \delta_2 & \cdots & \delta_n\end{pmatrix}$$

Παράδειγμα 1: Έστω $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$ και $\Gamma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$ τότε

$$\Gamma\circ B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

Παράδειγμα 2: Έστω $\Gamma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 5 & 4 & 3 & 2 & 6 & 1\end{pmatrix}$ και $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 2 & 4 & 5 & 3 & 6 & 1\end{pmatrix}$ τότε

$$\Gamma\circ B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 5 & 4 & 3 & 2 & 6 & 1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 2 & 4 & 5 & 3 & 6 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2 & 4 & 5 & 3 & 6 & 1\\ 4 & 2 & 6 & 3 & 1 & 5\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 2 & 4 & 5 & 3 & 6 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 4 & 2 & 6 & 3 & 1 & 5\end{pmatrix}$$

Ο δεύτερος τρόπος ακολουθεί τα παραπάνω βήματα αλλά με την αντίθετη σειρά και είναι αυτός ο τρόπος που ακολουθείται στα φυσικά προβλήματα και που ακολουθήσαμε για την περίπτωση της ομάδας S_3. Συγκεκριμένα αναδιατάσσουμε τα στοιχεία της πρώτης γραμμής του δεύτερου παράγοντα, δηλ. της Β έτσι ώστε η γραμμή αυτή να ταυτιστεί με την δεύτερη γραμμή του πρώτου παράγοντα, δηλ, της Γ. Έτσι η σύνθεση των μεταθέσεων Β και Γ του παραδείγματος 1 υπολογίζεται ως εξής:

Έστω $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$ και $\Gamma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$ τότε

$$\Gamma\circ B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$$

Και του παραδείγματος 2:

$$\Gamma\circ B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 5 & 4 & 3 & 2 & 6 & 1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 2 & 4 & 5 & 3 & 6 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 5 & 4 & 3 & 2 & 6 & 1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}5 & 4 & 3 & 2 & 6 & 1\\ 6 & 3 & 5 & 4 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 6 & 3 & 5 & 4 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

Το αντίστροφο στοιχείο μιας μετάθεσης: A=$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix}$ προφανώς είναι η μετάθεση: A^{-1}=$\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$

Π.χ. έστω A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 6 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ αλλάζουμε τις σειρές: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ και αναδιατάσσουμε τις σειρές έτσι ώστε η πρώτη σειρά να είναι η 1,2,3,4,5,6 δηλ.

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Άμεσα μπορεί να δειχθεί ότι το σύνολο S_3 των 6 μεταθέσεων E, A, B, C, D, F αποτελεί ομάδα με πολλαπλασιαστικό πίνακα:

	E	A	B	C	D	F
E	E	A	B	C	D	F
A	A	B	E	D	F	C
B	B	E	A	F	C	D
C	C	F	D	E	B	A
D	D	C	F	A	E	B
F	F	D	C	B	A	E

<u>*Ερώτημα*</u>: Βάσει του παραπάνω πίνακα, μπορούμε να πούμε ότι η ομάδα S_3 είναι ισομορφική προς την ομάδα C_{3v} ;

Κάθε μετάθεση n αντικειμένων μπορεί να εκφρασθεί σαν διαδοχικές αντιμεταθέσεις δυο αντικειμένων κάθε φορά. Ορίζουμε σαν **αντιμετάθεση**, (**transposition**), (mk) επί των n αντικειμένων την πράξη κατά την οποία τα αντικείμενα που βρίσκονται στις θέσεις m και k εναλλάσσονται αφήνοντας όλα τα άλλα αντικείμενα στη θέση τους. Μπορεί εύκολα να δειχθεί ότι η συμμετρική ομάδα S_n μπορεί να παραχθεί από n-1 αντιμεταθέσεις (12), (13),···, (1n). Π. χ. οι αντιμεταθέσεις (12), (13) της ομάδας S_3 αποτελούν ένα σύνολο γεννητόρων της S_3. Όλα τα στοιχεία της S_3 μπορούν να γραφούν σαν κατάλληλα γινόμενα αυτών των γεννητόρων. Έτσι

B=(13)(12)=(312), A=(13)(12)(13)(12)=(231), F=(132)=(13)(12)(13), C=(12) κ.λ.π.

όπου η σειρά των αντιμεταθέσεων είναι από τα δεξιά προς τ' αριστερά.

Εάν μια μετάθεση αποτελείται από άρτιο αριθμό αντιμεταθέσεων, τότε λέγεται **άρτια μετάθεση** αλλιώς **περιττή**. Στις σχέσεις (1) οι μεταθέσεις E, A και B είναι άρτιες, ενώ οι C, D, και F περιττές. Το σύνολο των άρτιων μεταθέσεων της ομάδας S_n αποτελεί υποομάδα, ενώ το σύνολο των περιττών μεταθέσεων δεν αποτελεί, αφού δεν περιέχει το ταυτοτικό στοιχείο E, (E=(12)(12) ή E=(13)(13)) . Η υποομάδα αυτή των άρτιων μεταθέσεων συμβολίζεται με A_3, ονομάζεται **αντιμεταθετική ομάδα**, (**alternating group**), βαθμού n. Η τάξη της είναι n!/2. Π.χ. η αντιμεταθετική υποομάδα βαθμού 3 είναι η A_3={E,A,B}.

Άσκηση : Για τρία μη διακριτά και μη αλληλεπιδρώντα κβαντικά σωμάτια, να κατασκευασθεί η κυματοσυνάρτηση που τα περιγράφει εάν α) είναι bosons και β) fermions.

Λύση: Έστω ψ_α, ψ_β, ψ_γ οι τρεις ιδιοκαταστάσεις που μπορούν να καταλάβουν τα σωμάτια με κβαντικούς αριθμούς α, β, γ. Υποθέτουμε χάριν απλότητας ότι οι τρεις κβαντικοί αριθμοί είναι όλοι διάφοροι μεταξύ τους. Μια τυπική συνάρτηση τριών μη αλληλεπιδρώντων σωματίων είναι το γινόμενο της κυματοσυνάρτησης του καθενός:

$$\psi(123)=\psi_\alpha(1)\psi_\beta(2)\psi_\gamma(3)$$

Η Ψ(123) δεν αποτελεί λύση για κβαντικά, (μη διακρίσιμα σωμάτια), γιατί δεν έχει την κατάλληλη συμμετρία ως προς την ανταλλαγή των σωματίων. Από τα στοιχεία της ομάδας S_3 κατασκευάζουμε τον συμμετρικό «τελεστή»

$$S=\{E+(12)+(13)+(23)+(231)+(312)\}$$

ο οποίος έχει την ιδιότητα για κάθε αντιμετάθεση (ij) i, j=1,2,3 να ισχύει:

$$(ij)S=S$$

Όμοια κατασκευάζεται και ο αντισυμμετρικός τελεστής

$$A=\{E-(12)-(13)-(23)+(231)+(312)\}$$

που έχει την ιδιότητα: $(ij)A=-A$

Οι ζητούμενες κυματοσυναρτήσεις των bosons είναι:

$$\Psi_B=1/\sqrt{6}S\Psi(123)=1/\sqrt{6}\{\psi_\alpha(1)\psi_\beta(2)\psi_\gamma(3)+\psi_\alpha(2)\psi_\beta(1)\psi_\gamma(3)+\psi_\alpha(3)\psi_\beta(2)\psi_\gamma(1)+$$
$$+\psi_\alpha(1)\psi_\beta(3)\psi_\gamma(2)+\psi_\alpha(2)\psi_\beta(3)\psi_\gamma(1)+\psi_\alpha(3)\psi_\beta(1)\psi_\gamma(2)\}$$

και των fermions:

$$\Psi_F=1/\sqrt{6}A\Psi(123)=1/\sqrt{6}\{\psi_\alpha(1)\psi_\beta(2)\psi_\gamma(3)-\psi_\alpha(2)\psi_\beta(1)\psi_\gamma(3)-\psi_\alpha(3)\psi_\beta(2)\psi_\gamma(1)-$$
$$-\psi_\alpha(1)\psi_\beta(3)\psi_\gamma(2)+\psi_\alpha(2)\psi_\beta(3)\psi_\gamma(1)+\psi_\alpha(3)\psi_\beta(1)\psi_\gamma(2)\}$$

Ο παράγων $1/\sqrt{6}$ δεν έχει σημασία, απλώς εγγυάται ότι εάν η ψ(123) είναι κανονικοποιημένη και η ψ_F είναι κανονικοποιημένη.

Σημείωση: Οι τελεστές S και A αλλάζουν τη σειρά των δεικτών των σωματίων και όχι των κβαντικών δεικτών α, β, γ.

1.12 Διακεκριμένες ομάδες δεδομένης τάξης

Έχουμε ήδη αναφέρει ότι οι ισομορφικές ομάδες έχουν τις ίδιες αναλυτικές δομές. Ένα πλήθος ισομορφικών ομάδων μπορεί να περιγράφει διαφορετικές φυσικές καταστάσεις, αλλά είναι αρκετό να μελετηθεί από μαθηματικής πλευράς μόνο μια από αυτές. Τα στοιχεία κάποιων ισομορφικών ομάδων μπορεί να είναι πίνακες, μεταθέσεις ή μετασχηματισμοί συντεταγμένων. Η φύση όμως των στοιχείων των ισομορφικών ομάδων δεν μας ενδιαφέρει όταν μελετάμε κάποια από αυτές τις ισομορφικές ομάδες στο γενικό αφηρημένο επίπεδο. Δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι η έννοια της ομάδας στηρίζεται μόνο στις τέσσερις θεμελιώδεις ιδιότητες, που πρέπει να ικανοποιεί κάθε ομάδα και δεν εξαρτάται από την συγκεκριμένη ερμηνεία που δίνουμε στα στοιχεία της.

Είναι επομένως επιθυμητό να απαριθμήσουμε τις διακεκριμένες, (μη ισομορφικές), ομάδες δεδομένης τάξης g. Στην προσπάθεια μας αυτή πρέπει να έχουμε υπόψη μας ότι για κάθε g υπάρχει τουλάχιστον μια ομάδα, κυκλική, η οποία περιέχει τα εξής στοιχεία: $\{A, A^2, \cdots, A^g=E\}$. Επειδή τώρα η τάξη n ενός στοιχείου, ($A^n=E$), είναι πάντα διαιρέτης της τάξεως g της ομάδας, αν η τάξη της ομάδας είναι πρώτος αριθμός, η τάξη του γεννήτορα A της ομάδας είναι ίση με g. Συνεπώς όταν η τάξη g της ομάδας είναι πρώτος αριθμός έχουμε μια μόνο δυνατή δομή αυτή της κυκλικής ομάδας.

Στη συνέχεια παραθέτουμε τις δυνατές δομές των ομάδων μέχρι τάξης 6.

1) g=1. Υπάρχει μια μόνο δομή: η ομάδα με ένα μόνο στοιχείο, το ταυτοτικό {E}.

2) g=2. Υπάρχει μια μόνο δομή: η ομάδα {E, A}, όπου $A^2=E$.

Πράγματι. Για το στοιχείο A υπάρχουν δυο δυνατότητες: $A^2=A$ και $A^2=E$ και επομένως δυο διαφορετικές ομάδες. Όμως εάν δεχθούμε ότι $A^2=A$, τότε θα έχουμε:

$$A=AE=A(AA^{-1})=A^2A^{-1}=AA^{-1}=E$$

όπερ άτοπο διότι υποθέσαμε ότι η ομάδα είναι τάξης 2 και όχι 1. Επομένως υπάρχει μια μόνο δομή.

3) g=3. Και εδώ υπάρχει μια μόνο δομή: η ομάδα $\{A, A^2, A^3=E\}$.

Εάν όμως επιχειρήσει κανείς να βρει μια διαφορετική δομή θεωρώντας την ομάδα G={E, A, B}θα καταλήξει στην ίδια δομή της κυκλικής ομάδας. Πράγματι, ας θεωρήσουμε την ομάδα G={E, A, B}. Το μόνο τμήμα του πολλαπλασιαστικού πίνακα που γνωρίζουμε είναι:

	E	A	B
E	E	A	B
A	A	?	?
B	B	?	?

και ο σκοπός μας είναι να γεμίσουμε τα τετράγωνα με το ερωτηματικό. Προς τούτο Παρατηρούμε ότι:

α) Το γινόμενο AB μπορεί να ισούται με A, B ή E. Ας υποθέσουμε ότι AB=B. Τότε πολλαπλασιάζοντας και τα δυο μέλη αυτής της εξίσωσης από τα δεξιά με B^{-1} παίρνουμε

$$(AB)B^{-1}=BB^{-1} \Rightarrow A(BB^{-1})=E \Rightarrow A=E$$

που είναι αδύνατο. Ομοίως η παραδοχή AB=A οδηγεί στο συμπέρασμα ότι B=E που είναι επίσης αδύνατο. Απομένει επομένως η τρίτη εναλλακτική λύση: AB=E

β) Με τον ίδιο τρόπο καταλήγουμε ότι BA=E

γ) Το γινόμενο A^2 μπορεί να είναι E, A ή B. Ας υποθέσουμε ότι $A^2=A$. Τότε πολλαπλασιάζοντας με τον αντίστροφο του A προκύπτει A=E που είναι αδύνατο. Ας υποθέσουμε τώρα ότι $A^2=E$, τότε $A^2B=B \Rightarrow A(AB)=B \Rightarrow A=B$, (αφού AB=E). Αλλά η περίπτωση Α=Β είναι αδύνατη αφού η τάξη της ομάδας είναι 3. Τελικά ισχύει η τρίτη δυνατότητα δηλ. $A^2=B$

δ) Το τελευταίο γινόμενο που χρειαζόμαστε είναι το B^2. Προηγουμένως βρήκαμε ότι $A^2=B$, επομένως θα έχουμε $B^2=A^4$. Όμως:

$A^4=A(A^3)=A(A(A^2))=A(AB)$[από την γ]$=AE$[από την α]$=A$

Άρα $B^2=A$. Έτσι η ομάδα τάξης 3 έχει μόνο μια δομή, της οποίας ο αντίστοιχος πίνακας είναι:

	Ε	Α	Β
Ε	Ε	Α	Β
Α	Α	Β	Ε
Β	Β	Ε	Α

Ο αντίστοιχος πολλαπλασιαστικός πίνακας της κυκλικής ομάδας $\{A, A^2, A^3=E\}$ είναι:

	Ε	A^2	Α
Ε	Ε	A^2	Α
A^2	A^2	Α	Ε
Α	Α	Ε	A^2

Παρατηρούμε ότι οι πολλαπλασιαστικοί πίνακες των ομάδων $G=\{E, A, B\}$ και $\{A, A^2, A^3=E\}$ έχουν την ίδια μορφή εάν κάνουμε την αντιστοιχία $E\to A^3=E$, $A\to A^2$, $B\to A$. Επομένως υπάρχει μια μόνο δομή, αυτή της κυκλικής ομάδας.

4) g=4. Εδώ υπάρχουν δυο ομάδες, που δεν είναι ισομορφικές. Εάν συμβολίσουμε την ομάδα με {Ε, Α, Β, Γ}, τότε οι δυο δυνατές δομές είναι:

α) Η κυκλική ομάδα $\{A, A^2, A^3, A^4=E\}$

β) Η μη κυκλική ομάδα {Ε, Α, Β, Γ} με την δομή $A^2=B^2=\Gamma^2=E$, ΑΒ=Γ, ΒΓ=Α, ΓΑ=Β, με αντίστοιχους πολλαπλασιαστικούς πίνακες:

	Ε	Α	Β	Γ
Ε	Ε	Α	Β	Γ
Α	Α	Ε	Γ	Β
Β	Β	Γ	Ε	Α
Γ	Γ	Β	Α	Ε

	Ε	Α	A^2	A^3
Ε	Ε	Α	A^2	A^3
Α	Α	A^2	A^3	Ε
A^2	A^2	A^3	Ε	Α
A^3	A^3	Ε	Α	A^2

5) g=5. Μια μόνο δομή υπάρχει: η κυκλική ομάδα $\{A, A^2, A^3, A^4, A^5=E\}$.

6) g=6. Εδώ υπάρχουν δυο ομάδες, που δεν είναι ισομορφικές. Εάν συμβολίσουμε την ομάδα με {Ε, Α, Β, Γ, Δ, Ζ}, τότε οι δυο δυνατές δομές είναι:

α) Η κυκλική ομάδα {Α, A^2, A^3, A^4, A^5, A^6 =Ε}.

β) Η μη κυκλική ομάδα {Ε, Α, Β, Γ, Δ, Ζ} με την δομή A^3=B^3=Ε, $Γ^2$=$Δ^2$=Z^2=Ε, Β=A^2, ΑΓ=Ζ, ΓΑ=Δ, ΒΓ=Δ, κ.λ.π.

Παρατήρηση: Δεν είναι εύκολο, αν και θεωρητικά δυνατό, να συνεχίσει κανείς την παραπάνω διαδικασία για μεγαλύτερα g. Ο αριθμός των μη ισομορφικών ομάδων θα αυξάνει όσο αυξάνει το g. Πάντως ισχύουν οι εξής δυο κανόνες:

1) Για κάθε πεπερασμένη τιμή του g υπάρχει πάντα μια κυκλική ομάδα {Α, A^2, A^3, …,A^n=Ε}.

2) Εάν η τάξη g είναι πρώτος αριθμός, υπάρχει μια μόνο δυνατή δομή, αυτή της κυκλικής ομάδας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Δείξτε ότι τα παρακάτω σύνολα με τους αντίστοιχους νόμους εσωτερικής σύνθεσης αποτελούν ομάδες. Να τις ταξινομήσετε σύμφωνα με το πλήθος των στοιχείων των.

α) Το σύνολο Q των ρητών αριθμών ως προς την πρόσθεση.

Λύση: 1) Το σύνολο Q είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση: το άθροισμα q+p δυο ρητών είναι ρητός αριθμός.

2) Η προσεταιριστική ιδιότητα q+(p+s)=(q+p)+s με q,p,s∈Q προφανώς ισχύει.

3) Το ουδέτερο στοιχείο είναι το μηδέν.

4) Για κάθε ρητό αριθμό q υπάρχει το συμμετρικό, δηλ το αντίθετο του, το -q.

Η ομάδα (Q, +) είναι άπειρη διακεκριμένη ομάδα.

β) Το σύνολο Q-{0} των ρητών αριθμών εκτός του μηδενός ως προς τον πολλαπλασιασμό.

Λύση: 1) Το σύνολο Q είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό: το γινόμενο δυο ρητών qp είναι ρητός αριθμός.

2) Η προσεταιριστική ιδιότητα q(ps)=(qp)s με q,p,s∈Q προφανώς ισχύει.

3) Το ουδέτερο στοιχείο είναι η μονάδα.

4) Για κάθε ρητό αριθμό q υπάρχει το συμμετρικό του, δηλ ο αντίστροφος του, το 1/q.

Η ομάδα (Q-{0}, ·) είναι άπειρη διακεκριμένη ομάδα.

γ) Το σύνολο C των μιγαδικών αριθμών ως προς την πρόσθεση.

δ) Το σύνολο C-{0} των μιγαδικών αριθμών εκτός του μηδενός ως προς τον πολλαπλασιασμό.

Λύση: Οι περιπτώσεις γ) και δ) αντιμετωπίζονται όπως και η β).

ε) Το σύνολο των οκτώ πινάκων:

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix},\ \Gamma=\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix},$$

$$\Delta=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix},\ Z=\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix},\ H=\begin{pmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{pmatrix},\ \Theta=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$$

ως προς τον πολλαπλασιασμό των πινάκων.

Λύση: Κατασκευάζουμε τον αντίστοιχο πολλαπλασιαστικό πίνακα:

Από τον παρακάτω πίνακα διαπιστώνουμε ότι το σύνολο των 8 αυτών πινάκων είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό. Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι:

1) Ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα. Αυτό διαπιστώνεται παίρνοντας ανά τρεις πίνακες και ελέγχοντας βάση του πολλαπλασιαστικού πίνακα εάν ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα. Π.χ. για τους πίνακες Α.Β.Γ έχουμε: Α(ΒΓ)=Α(Α)=ΑΑ=Β και (ΑΒ)Γ=ΓΓ= =Β άρα Α(ΒΓ)=(ΑΒ)Γ

2) Το ουδέτερο στοιχείο είναι προφανώς το Ε

3) Πάλι από τον πολλαπλασιαστικό πίνακα διαπιστώνουμε ότι για κάθε πίνακα υπάρχει ο αντίστροφος του. Π.χ για τον πίνακα Α ο αντίστροφος του είναι ο Γ.

	Ε	Α	Β	Γ	Δ	Ζ	Η	Θ
Ε	Ε	Α	Β	Γ	Δ	Ζ	Η	Θ
Α	Α	Β	Γ	Ε	Η	Θ	Ζ	Δ
Β	Β	Γ	Ε	Α	Ζ	Δ	Θ	Η
Γ	Γ	Ε	Α	Β	Θ	Η	Δ	Ζ
Δ	Δ	Θ	Ζ	Η	Ε	Β	Γ	Α
Ζ	Ζ	Η	Δ	Θ	Β	Ε	Α	Γ
Η	Η	Δ	Θ	Ζ	Α	Γ	Ε	Β
Θ	Θ	Ζ	Η	Δ	Γ	Α	Β	Ε

Η ομάδα αυτή είναι τάξεως 8.

στ) Το σύνολο των μοναδιαίων, (unitary), πινάκων τάξης n ως προς τον πολλαπλασιασμό των πινάκων.

Λύση: Ένας πίνακας U ονομάζεται μοναδιαίος όταν ισχύει $U^tU=E$, με U^t ο ανάστροφος του πίνακα U.

1) Το σύνολο των μοναδιαίων πινάκων είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό διότι, εάν Α,Β δυο μοναδιαίοι πίνακες τότε και ο ΑΒ είναι μοναδιαίος αφού

$(AB)^t(AB)=(B^tA^t)(AB)=B^t(A^tA)B=B^t(E)B=B^tB=E$

2) Η προσεταιριστικότητα προφανώς ισχύει αφού οι μοναδιαίοι πίνακες αποτελούν υποσύνολο του συνόλου των πινάκων.

3) Το ταυτοτικό στοιχείο E είναι μοναδιαίος πίνακας.

4) Για κάθε μοναδιαίο πίνακα U ο αντίστροφος του είναι και αυτός μοναδιαίος. Πράγματι. $(U^{-1})^t U^{-1}=(U^t)^{-1}U^{-1}=(UU^t)^{-1}=(E)^{-1}=E$

ζ) Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών μέτρου 1 ως προς τον πολλαπλασιασμό.

Λύση: Οι μιγαδικοί αριθμοί μέτρου 1 σε πολική μορφή γράφονται $z=\exp(i\theta)$

1) Εάν $z_1=\exp(i\theta)$ και $z_2=\exp(i\varphi)$ τότε $z_1z_2=\exp(i[\theta+\varphi])$, δηλ. το γινόμενο δυο μιγαδικών αριθμών μέτρου 1 έχει και αυτός μέτρο 1.

2) Επειδή ισχύει η προσεταιριστικότητα ως προς τον πολλαπλασιασμό στους μιγαδικούς αριθμούς, θα ισχύει και για τους μιγαδικούς μέτρου 1.

3) Το ουδέτερο στοιχείο είναι προφανώς το 1.

4) Εάν $z=\exp(i\theta)$, ο αντίστροφος του είναι ο $z^{-1}=\exp(-i\theta)$ διότι $zz^{-1}=\exp(i\theta)\exp(-i\theta)$ $=\exp(0)=1$

Η ομάδα αυτή είναι συνεχής.

2) Δείξτε ότι τα παρακάτω σύνολα με τους αντίστοιχους νόμους εσωτερικής σύνθεσης δεν αποτελούν ομάδες. Ποιες από τις ιδιότητες του ορισμού της ομάδας δεν ισχύουν ;

α) Το σύνολο R των πραγματικών αριθμών ως προς τον πολλαπλασιασμό.

Λύση: Δεν υπάρχει το συμμετρικό του πραγματικού αριθμού 0 ως προς τον πολλαπλασιασμό.

β) Το σύνολο $R^+\cup\{0\}$ των μη αρνητικών πραγματικών αριθμών ως προς την πρόσθεση.

Λύση: Για κάθε αριθμό του συνόλου R^+ δεν υπάρχει το συμμετρικό του.

γ) Το σύνολο των περιττών ακεραίων i) ως προς την πρόσθεση και ii) ως προς τον πολλαπλασιασμό.

Λύση: i) Το σύνολο των περιττών ακεραίων δεν είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση.

ii) Δεν υπάρχουν τα αντίστροφα στοιχεία.

δ) Τ σύνολο $\{0,1,2,\cdots,p-1\}$ των p-1 ακεραίων ως προς τον modulo(p) πολλαπλασιασμό, όπου ο p δεν είναι πρώτος.

3) ***α)*** Εξετάστε εάν οι παρακάτω τρεις πίνακες αποτελούν ομάδα, ως προς τον πολλαπλασιασμό των πινάκων:

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\quad A=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$

Σε αρνητική περίπτωση προσθέστε έναν ελάχιστο αριθμό πινάκων ώστε το νέο σύνολο να αποτελεί ομάδα. Γράψτε τον πολλαπλασιαστικό πίνακα και τις κλάσεις της ομάδας. Είναι η ομάδα αυτή ισομορφική προς την ομάδα $\{E, C_4, C_4^2, C_4^3\}$ ή προς την ομάδα $\{E, C_4^2, m_x, m_y\}$ ή και προς τις δύο;

β) Στην ομάδα που προέκυψε προσθέστε ένα ακόμα πίνακα:

$$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$

Συμπληρώστε το νέο σύνολο με ένα ελάχιστο αριθμό πινάκων ώστε να γίνει ομάδα. Δείξτε ότι η ομάδα αυτή έχει τάξη 8 και είναι ισομορφική προς την C_{4v}.

Λύση: α) Υπολογίζουμε όλα τα δυνατά γινόμενα μεταξύ των δοθέντων πινάκων και αυτών, που ενδεχομένως θα προκύψουν, και βρίσκουμε:

$$AB=\Gamma=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}\quad A\Gamma=E\quad B\Gamma=A\quad AA=B\quad BA=\Gamma\quad BB=E\quad \Gamma A=E\quad \Gamma B=A\quad \Gamma\Gamma=B$$

Ο αντίστοιχος πολλαπλασιαστικός πίνακας είναι:

	Ε	Α	Β	Γ
Ε	Ε	Α	Β	Γ
Α	Α	Β	Γ	Ε
Β	Β	Γ	Ε	Α
Γ	Γ	Ε	Α	Β

Μια κλάση της ομάδας που προέκυψε είναι η {Ε}. Για να βρούμε την κλάση που περιέχει το στοιχείο Α, υπολογίζουμε τα γινόμενα $P^{-1}AP$ όπου Ρ=Ε, Α, Β, Γ και έχουμε

$P=E \qquad E^{-1}AE=A$

$P=A \qquad A^{-1}AA=A$

$P=B \qquad B^{-1}AB=BAB=\Gamma B=A$

$P=\Gamma \qquad \Gamma^{-1}A\Gamma=AA\Gamma=B\Gamma=A$

Επομένως η κλάση που περιέχει το στοιχείο Α είναι η {Α}.

Για να βρούμε την κλάση που περιέχει το στοιχείο Β, υπολογίζουμε τα γινόμενα $P^{-1}BP$ όπου P=E, A, B, Γ και έχουμε

P=E $E^{-1}BE=B$

P=A $A^{-1}BA=ΓBA=AA=B$

P=B $B^{-1}BB=EB=E$

P=Γ $Γ^{-1}BΓ=ABΓ=ΓΓ=B$

Επομένως η κλάση που περιέχει το στοιχείο Β είναι η {Β}.

Για να βρούμε την κλάση που περιέχει το στοιχείο Γ, υπολογίζουμε τα γινόμενα $P^{-1}ΓP$ όπου P=E, A, B, Γ και έχουμε

P=E $E^{-1}ΓE=Γ$

P=A $A^{-1}ΓA=ΓΓA=BA=Γ$

P=B $B^{-1}ΓB=BΓB=AB=Γ$

P=Γ $Γ^{-1}ΓΓ=AΓΓ=EΓ=Γ$

Επομένως η κλάση που περιέχει το στοιχείο Γ είναι η {Γ}.

Συνολικά οι κλάσεις είναι {Ε}, {Α}, {Β}, {Γ}.

Συγκρίνοντας τον πολλαπλασιαστικό πίνακα της ομάδας {Ε,Α,Β,Γ} με τον πολλαπλασιαστικό πίνακα της ομάδας {E, C_4, C_4^2, C_4^3} των περιστροφών του τετραγώνου,

	E	C_4	C_4^2	C_4^3
E	E	C_4	C_4^2	C_4^3
C_4	C_4	C_4^2	C_4^3	E
C_4^2	C_4^2	C_4^3	E	C_4
C_4^3	C_4^3	E	C_4	C_4^2

προκύπτει η αντιστοιχία $E \to E$, $A \to C_4$, $B \to C_4^2$, $Γ \to C_4^3$, η οποία αποδεικνύει ότι οι δυο αυτές ομάδες είναι ισομορφικές.

Για την ομάδα {E, C_4^2, m_x, m_y} εργαζόμαστε με τον ίδιο τρόπο. Ο αντίστοιχος πολλαπλασιαστικός πίνακας είναι:

	E	C_4^2	m_x	m_y
E	E	C_4^2	m_x	m_y
C_4^2	C_4^2	E	m_y	m_x
m_x	m_x	m_y	E	C_4^2
m_y	m_y	m_x	C_4^2	E

Από την εξέταση των πινάκων αυτών προκύπτει ότι δεν υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των στοιχείων των ομάδων {Ε,Α,Β,Γ} και {Ε, C_4^2, m_x, m_y}. Άρα οι ομάδες αυτές δεν είναι ισομορφικές.

β) Ας ονομάσουμε Δ τον νέο πίνακα που προσθέτουμε στην ομάδα {Ε,Α,Β,Γ} Προσπαθούμε να ελέγξουμε εάν το νέο σύνολο {Ε,Α,Β,Γ,Δ} αποτελεί ομάδα. Υπολογίζουμε όλα τα δυνατά γινόμενα για να διαπιστώσουμε εάν το σύνολο αυτό των πινάκων είναι κλειστό. Όμως βρίσκουμε ότι τα γινόμενα ΑΔ, ΒΔ, ΓΔ, δίνουν νέους πίνακες:

$$\mathrm{Z}=\mathrm{A}\Delta=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\quad \mathrm{H}=\mathrm{B}\Delta=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\quad \Theta=\Gamma\Delta=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Στη συνέχεια κατασκευάζουμε τον πολλαπλασιαστικό πίνακα των πινάκων {Ε,Α,Β,Γ,Δ, Ζ,Η,Θ}

	Ε	Α	Β	Γ	Δ	Ζ	Η	Θ
Ε	Ε	Α	Β	Γ	Δ	Ζ	Η	Θ
Α	Α	Β	Γ	Ε	Ζ	Η	Θ	Δ
Β	Β	Γ	Ε	Α	Η	Θ	Δ	Ζ
Γ	Γ	Ε	Α	Β	Θ	Δ	Ζ	Η
Δ	Δ	Ζ	Η	Θ	Ε	Α	Β	Γ
Ζ	Ζ	Η	Θ	Δ	Α	Β	Γ	Ε
Η	Η	Θ	Δ	Ζ	Β	Γ	Ε	Α
Θ	Θ	Δ	Ζ	Η	Γ	Ε	Α	Β

από τον οποίο βλέπουμε ότι το σύνολο {Ε,Α,Β,Γ,Δ,Ζ,Η,Θ} είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό και επομένως αποτελεί ομάδα, της οποίας η τάξη είναι 8. Για να δούμε εάν η ομάδα αυτή είναι ισομορφική προς την ομάδα C_{4v} των συμμετριών του τετραγώνου, που είναι της ίδιας τάξης, θα πρέπει να βρούμε μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ αυτών των δυο ομάδων. Η αντιστοιχία αυτή μπορεί να προκύψει από την σύγκριση των αντιστοίχων πολλαπλασιαστικών πινάκων. Η σύγκριση αυτή θα διευκολυνθεί περισσότερο εάν τον παραπάνω πολλαπλασιαστικό πίνακα τον αναδιατάξουμε έτσι ώστε στην διαγώνιό του

	E	A	B	Γ	Δ	Z	H	Θ
E	E	A	B	Γ	Δ	Z	H	Θ
Γ	Γ	E	A	B	Θ	Δ	H	Z
B	B	Γ	E	A	H	Θ	Z	Δ
A	A	B	Γ	E	Z	H	Δ	Θ
Δ	Δ	Θ	H	Z	E	Γ	A	B
Z	Z	H	Θ	H	A	E	B	Γ
Θ	Θ	H	Z	Δ	Γ	B	E	A
H	H	Z	Δ	Θ	B	A	Γ	E

να εμφανιστεί το ταυτοτικό στοιχείο Ε. Έτσι ο πίνακας γράφεται:

	E	C_4	C_4^2	C_4^3	m_x	m_y	σ_u	σ_v
E	E	C_4	C_4^2	C_4^3	m_x	m_y	σ_u	σ_v
C_4^3	C_4^3	E	C_4	C_4^2	σ_v	σ_u	m_x	m_y
C_4^2	C_4^2	C_4^3	E	C_4	m_y	m_x	σ_v	σ_u
C_4	C_4	C_4^2	C_4^3	E	σ_u	σ_v	m_y	m_x
m_x	m_x	σ_v	m_y	σ_u	E	C_4^2	C_4^3	C_4
m_y	m_y	σ_u	m_x	σ_v	C_4^2	E	C_4	C_4^3
σ_u	σ_u	m_x	σ_v	m_y	C_4	C_4^3	E	C_4^2
σ_v	σ_v	m_y	σ_u	m_x	C_4^3	C_4	C_4^2	E

και συγκρίνοντας τον με τον πίνακα της ομάδας προκύπτει η αντιστοιχία:

$E\to E$, $A\to C_4$, $B\to C_4^2$, $\Gamma\to C_4^3$, $\Delta\to m_x$, $Z\to m_y$, $H\to \sigma_u$, $\Theta\to\sigma_v$

4) Δείξτε ότι το σύνολο G των n-οστών ριζών της μονάδας, δηλ. οι μιγαδικοί αριθμοί $\exp(i2\pi k/n)$ $k=0,1,\cdots n-1$, αποτελεί κυκλική ομάδα τάξης n ως προς τον μιγαδικό πολλαπλασιασμό. Εάν ο ακέραιος m διαιρεί τον n, τότε η κυκλική αυτή ομάδα έχει μια υποομάδα τάξης m.

<u>Λύση</u>: 1) Πρώτα θα δείξουμε ότι το σύνολο G είναι κλειστό. Πράγματι, έστω λ,μ δυο φυσικοί αριθμοί με τον περιορισμό $0\le\lambda,\mu\le n-1$. Οι αντίστοιχες ρίζες είναι $z_\lambda=\exp(i2\pi\lambda/n)$ και $z_\mu=\exp(i2\pi\mu/n)$ με γινόμενο $z_\lambda z_\mu=\exp(i2\pi(\lambda+\mu)/n)$. Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:

i) Εάν $\lambda+\mu\le n-1$, τότε το γινόμενο $z_\lambda z_\mu$ μας δίνει μια άλλη ρίζα, δηλ. ένα στοιχείο του συνόλου G.

ii) Εάν $\lambda+\mu>n-1$, τότε διαιρούμε το άθροισμα $\lambda+\mu$ με το n-1 και θεωρούμε το υπόλοιπο ρ αυτής της διαίρεσης, όπου $0\le\rho\le n-1$. Τότε στο γινόμενο $z_\lambda z_\mu$ αντιστοιχούμε την ρίζα $z_\rho=\exp(i2\pi\rho/n)$.

iii) Το ουδέτερο στοιχείο είναι προφανώς η ρίζα που αντιστοιχεί για k=0, δηλ. η $z_0=1$.

iv) Για κάθε ρίζα $z_k=\exp(i2\pi k/n)$, η συμμετρική της, έστω η $z_m=\exp(i2\pi m/n)$, θα πρέπει να είναι τέτοια ώστε να ισχύει:

$$z_k z_m=\exp(i2\pi(k+m)/n)=1=\exp(i2\pi) \Rightarrow (k+m)/n=1 \Rightarrow m=n-k$$

v) Η προσεταιριστική ιδιότητα, λαμβάνοντας υπ' όψη τα παραπάνω, προφανώς ισχύει.

Τέλος δε η ομάδα ***G*** είναι κυκλική διότι όλα τα στοιχεία της μπορούν να προέλθουν από το στοιχείο $\exp(2\pi i/n)$ και τις δυνάμεις του μέχρι τάξεως n.

5) Εάν k είναι ένας θετικός ακέραιος, τότε το σύνολο G των k ακεραίων {0,1,2,…,k-1} αποτελεί ομάδα με πράξη την modulo(k)-πρόσθεση. Η πράξη αυτή ορίζεται ως εξής: Κατ' αρχάς ορίζουμε για τον θετικό ακέραιο n το n-mod(k) να είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης n/k. Έτσι το modulo(k)-άθροισμα των θετικών ακεραίων m και n είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης (m+n)/k. Το ταυτοτικό στοιχείο e είναι το μηδέν και το συμμετρικό ενός στοιχείου m της ομάδας είναι το k-m. Να γραφεί ο πολλαπλασιαστικός πίνακας.

Απόδειξη: α) Θα πρέπει να δείξουμε ότι η πράξη modulo(k)-πρόσθεση, που θα την συμβολίσουμε με ⊕, είναι κλειστή πράξη. Έστω $m,n\in G$, τότε

i) εάν $m+n<k$ δηλ. $m+n\in G$, θέτουμε $m\oplus n=m+n\in G$

ii) εάν $m+n\geq k$ δηλ. $m+n\notin G$, θέτουμε $m\oplus n=\upsilon$, όπου υ το υπόλοιπο της διαίρεσης (m+n)/k, που είναι αριθμός μικρότερος του k και επομένως στοιχείο του G.

β) Θα δείξουμε την προσεταιριστική ιδιότητα: $(m\oplus n)\oplus p=m\oplus(n\oplus p)$. Έχουμε:

$$(m\oplus n)\oplus p=\left(\upsilon\pi o\lambda.\left[\frac{m+n}{k}\right]\right)\oplus p=\upsilon\pi o\lambda.\left[\frac{\upsilon\pi o\lambda.\left[\frac{m+n}{k}\right]+p}{k}\right]$$

$$m\oplus(n\oplus p)=\ m\oplus\left(\upsilon\pi o\lambda.\left[\frac{n+p}{k}\right]\right)=\upsilon\pi o\lambda.\left[\frac{m+\upsilon\pi o\lambda.\left[\frac{n+p}{k}\right]}{k}\right]$$

Από την ταυτότητα της διαίρεσης $\alpha=\beta\pi+\upsilon$ έχουμε:

$$\left(\upsilon\pi o\lambda.\left[\frac{m+n}{k}\right]\right)\oplus p=\left(m+n-\pi_{m,n}k\right)\oplus p=\left(m+n-\pi_{m,n}k+p\right)-\pi_{m,n,p}k=m+n+p-\lambda k$$

Ομοίως:

$$m\oplus\left(\upsilon\pi o\lambda.\left[\frac{n+p}{k}\right]\right)=m\oplus\left(n+p-\pi_{n,p}k\right)=\left(m+n+p-\pi_{n,p}k\right)-\pi_{m,n,p}k=m+n+p-\mu k$$

Επειδή οι αριθμοί (m+n+p-λk), (m+n+p-μk) πρέπει να είναι μικρότεροι του k, συμπεραίνουμε ότι (m+n+p-λk)=(m+n+p-μk) και επομένως ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα.

γ) Έστω e το ουδέτερο στοιχείο και m ένα τυχαίο στοιχείο του G. Τότε θα πρέπει

$$e\oplus m = m\oplus e = m.$$

Αλλά $e\oplus m = e+m-\pi_1 k = m$ και $m\oplus e = m+e-\pi_2 k = m$

επειδή όμως το $m\in G$ τα πηλίκα π_1, π_2 είναι μηδέν. Άρα e=0.

δ) Έστω $m\in G$ και m' το συμμετρικό του. Τότε θα είναι:

$$m\oplus m' = m\oplus m' = e = 0$$

Αλλά $m+m'-\pi k=0$

δηλ. το άθροισμα $m+m'$ πρέπει να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του k. Επειδή όμως $m<k$, το ελάχιστο πολλαπλάσιο του $m+m'$ πρέπει να είναι το k, δηλ. $m+m'=k \Rightarrow m'=k-m$.

Ο πολλαπλασιαστικός πίνακας της ομάδας G είναι:

	0	1	2	3	…	k-1
0	0	1	2	3	…	k-1
1	1	2	3	4	…	0
2	2	3	4	5	…	1
3	3	4	5	6	…	2
:	:	:	:	:	…	
k-1	k-1	0	1	2	…	k-2

6) Εάν k είναι ένας πρώτος αριθμός μεγαλύτερος του 1, τότε το σύνολο G των k-1 αριθμών {1,2,...k-1} αποτελεί ομάδα με πράξη τον modulo(k)- πολλαπλασιασμό, που ορίζεται κατά αναλογία με την modulo(k)-πρόσθεση. Το ταυτοτικό στοιχείο e είναι το 1 και το συμμετρικό ενός στοιχείου m είναι το $(sk+1)/m$, όπου s είναι ο μικρότερος θετικός ακέραιος, που καθιστά το $sk+1$ ένα ακέραιο πολλαπλάσιο του m με την συνήθη έννοια. Να γραφεί ο πολλαπλασιαστικός πίνακας.

Απόδειξη: α) Πρώτα θα δείξουμε ότι η πράξη του modulo(k)- πολλαπλασιασμού, που θα την συμβολίζουμε με $\otimes$, είναι κλειστή. Έστω $m,n\in G$,

i) εάν $mn<k$ δηλ. $mn\in G$, θέτουμε $m\otimes n=mn\in G$

ii) εάν $mn\geq k$ δηλ. $mn\notin G$, θέτουμε $m\otimes n=\upsilon$, όπου υ το υπόλοιπο της διαίρεσης $(mn)/k$, που είναι αριθμός μικρότερος του k και επομένως στοιχείο του G.

β) Θα δείξουμε την προσεταιριστική ιδιότητα: $(m\otimes n)\otimes p=m\otimes(n\otimes p)$. Έχουμε:

$$(m\otimes n)\otimes p=\left(\upsilon\pi o\lambda.\left[\frac{mn}{k}\right]\right)\otimes p=\upsilon\pi o\lambda.\left[\frac{\upsilon\pi o\lambda.\left[\frac{mn}{k}\right]p}{k}\right]$$

$$m\otimes(n\otimes p)= m\otimes\left(\text{υπολ.}\left[\frac{np}{k}\right]\right)=\text{υπολ.}\left[\frac{m\cdot\text{υπολ.}\left[\frac{np}{k}\right]}{k}\right]$$

Από την ταυτότητα της διαίρεσης α=βπ+υ έχουμε:

$$\left(\text{υπολ.}\left[\frac{mn}{k}\right]\right)\otimes p=\left(mn-\pi_{m,n}k\right)\otimes p=\left((mn-\pi_{m,n}k)p\right)-\pi_{m,n,p}k=mnp-\lambda k$$

Ομοίως:

$$m\otimes\left(\text{υπολ.}\left[\frac{np}{k}\right]\right)=m\otimes\left(np-\pi_{n,p}k\right)=\left(m(np-\pi_{n,p}k)\right)-\pi_{m,n,p}k=mnp-\mu k$$

Επειδή οι αριθμοί mnp-λk, mnp-μk πρέπει να είναι μικρότεροι του k, συμπεραίνουμε ότι mnp-λk=mnp-μk και επομένως ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα.

γ) Έστω e το ουδέτερο στοιχείο και m ένα τυχαίο στοιχείο του G. Τότε θα πρέπει

$$e\otimes m=m\otimes e=m.$$

Αλλά $e\otimes m=em-\pi_1 k=m$ και $m\otimes e=me-\pi_2 k=m$

επειδή όμως το $m\in G$ τα πηλίκα π_1, π_2 είναι μηδέν. Άρα e=1.

δ) Έστω $m\in G$ και m′ το συμμετρικό του. Τότε θα είναι:

$$m\otimes m'=m\otimes m'=e=1$$

Αλλά $mm'-sk=1 \Rightarrow mm'=sk+1 \Rightarrow m'=\dfrac{sk+1}{m}$

όπου s είναι ο μικρότερος θετικός ακέραιος, που καθιστά το sk+1 ένα ακέραιο πολλαπλάσιο του m με την συνήθη έννοια

Ο πολλαπλασιαστικός πίνακας της ομάδας G για k=7 είναι:

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	1	3	5
3	3	6	2	5	1	4
4	4	1	5	2	6	3
5	5	3	1	6	4	2
6	6	5	4	3	2	1

7) Να σχηματίσετε την ομάδα, η οποία περιέχει δυο στοιχεία A, B που ικανοποιούν τις σχέσεις: $A^2=B^k=(AB)^2=E$, όπου k ένας πεπερασμένος θετικός ακέραιος μεγαλύτερος του 1 και να βρεθεί η τάξη της. (Τέτοιες ομάδες ονομάζονται **δίεδρες ομάδες** και συμβολίζονται με D_k).

8) Δείξτε ότι μια ομάδα της οποίας κάθε στοιχείο, εκτός από το ταυτοτικό, είναι τάξης 2 είναι αβελιανή.

Λύση: Έστω δυο τυχαία στοιχεία A, B της ομάδας. Έχουμε A^2=E, B^2=E και $(AB)^2$=E $\Rightarrow$ABAB=E $\Rightarrow$ A^2BAB=A $\Rightarrow$ BAB=A $\Rightarrow$ B^2AB=BA $\Rightarrow$ AB=BA

9) Θεωρείστε το σύνολο των παρακάτω έξι συναρτήσεων:

$$f_1(x)=x\ ,\ f_2(x)=1\text{-}x\ ,\ f_3(x)=\frac{x}{x-1}\ ,\ f_4(x)=\frac{1}{x}\ ,\ f_5(x)=\frac{1}{1-x}\ ,\ f_6(x)=\frac{x-1}{x}$$

με νόμο εσωτερικής συνθέσεως *, την σύνθεση των συναρτήσεων, π.χ.

$$(f_5*f_3)(x)=f_5(f_3(x))=f_5\left(\frac{x}{x-1}\right)=\frac{1}{1-\frac{x}{x-1}}=\frac{x-1}{-1}=1-x=f_2(x)$$

Δείξτε ότι το σύνολο αυτό αποτελεί ομάδα ως προς την σύνθεση των συναρτήσεων.

Λύση: Υπολογίζουμε όλες τις δυνατές συνθέσεις και στη συνέχεια κατασκευάζουμε τον αντίστοιχο πολλαπλασιαστικό πίνακα.

$(f_1*f_1)(x)=f_1(f_1(x))=x=f_1(x)$

$(f_1*f_2)(x)=f_2(f_2(x))=f_2(x)$

$(f_1*f_3)(x)=f_1(f_3(x))=f_3(x)$

$(f_1*f_4)(x)=f_1(f_4(x))=f_4(x)$

$(f_1*f_5)(x)=f_1(f_5(x))=f_5(x)$

$(f_1*f_6)(x)=f_1(f_6(x))=f_6(x)$

$(f_2*f_1)(x)=f_2(f_1(x))=f_2(x)$

$(f_2*f_2)(x)=f_2(f_2(x))=1\text{-}(1\text{-}x)=x=f_1(x)$

$$(f_2*f_3)(x)=f_2(f_3(x))=\frac{1-x}{(1-x)-1}=\frac{1-x}{-x}=\frac{x-1}{x}=f_6(x)$$

$$f_2*f_4)(x)=f_2(f_4(x))=\frac{1}{\frac{1-x}{x}}=\frac{x}{1-x}=f_3(x)$$

$$(f_2*f_5)(x)=f_2(f_5(x))=\frac{1}{1-(1-x)}=\frac{1}{x}=f_4(x)$$

$$(f_2*f_6)(x)=f_2(f_6(x))=\frac{(1-x)-1}{1-x}=\frac{x}{x-1}=f_3(x)$$

$(f_3*f_1)(x)=f_3(f_1(x))=f_3(x)$

$$(f_3*f_2)(x)=f_3(f_2(x))=1-\frac{x}{x-1}==\frac{-1}{x-1}=\frac{1}{1-x}=f_5(x)$$

$$(f_3*f_3)(x)=f_3(f_3(x))=\frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1}=\frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{1}{x-1}}=x=f_1(x)$$

$$(f_3*f_4)(x)=f_3(f_4(x))=\frac{1}{\frac{x}{x-1}}=\frac{x-1}{x}=f_6(x)$$

$$(f_3*f_5)(x)=f_3(f_3(x))=\frac{1}{1-\frac{x}{x-1}}=\frac{1}{\frac{-1}{x-1}}=1-x=f_2(x)$$

$$(f_3*f_6)(x)=f_3(f_6(x))=\frac{\frac{x}{x-1}-1}{\frac{x}{x-1}}=\frac{x-x+1}{x}=\frac{1}{x}=f_4(x)$$

$$(f_4*f_1)(x)=f_4(f_1(x))=f_4(x)$$

$$(f_4*f_2)(x)=f_4(f_2(x))=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}=f_6(x)$$

$$(f_4*f_3)(x)=f_4(f_3(x))=\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}-1}=\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1-x}{x}}=\frac{1}{1-x}=f_5(x)$$

$$(f_4*f_4)(x)=f_4(f_4(x))=\frac{1}{\frac{1}{x}}=x=f_1(x)$$

$$(f_4*f_5)(x)=f_4(f_5(x))=\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=\frac{1}{\frac{x-1}{x}}=\frac{x}{x-1}=f_3(x)$$

$$(f_4*f_6)(x)=f_4(f_6(x))=\frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}}=\frac{\frac{1-x}{x}}{\frac{1}{x}}=1-x=f_2(x)$$

$$(f_5*f_1)(x)=f_5(f_1(x))=f_5(x)$$

$$(f_5*f_2)(x)=f_5(f_2(x))=1-\frac{1}{1-x}=\frac{(1-x)-1}{1-x}=\frac{x}{x-1}=f_3(x)$$

$$(f_5*f_3)(x)=f_5(f_3(x))=\frac{\frac{1}{1-x}}{\frac{1}{1-x}-1}=\frac{1}{1-1+x}=\frac{1}{x}=f_4(x)$$

$$(f_5*f_4)(x)=f_5(f_4(x))=\frac{1}{\frac{1}{1-x}}=1-x=f_2(x)$$

$$(f_5*f_5)(x)=f_5(f_5(x))=\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}=\frac{1-x}{1-x-1}=\frac{x-1}{x}=f_6(x)$$

$$(f_5*f_6)(x)=f_5(f_6(x))=\frac{\frac{1}{1-x}-1}{\frac{1}{1-x}}=1-(1-x)=x=f_1(x)$$

$$(f_6*f_1)(x)=f_6(f_1(x))=f_6(x)$$

$$(f_6*f_2)(x)=f_6(f_2(x))=1-\frac{x-1}{x}=\frac{x-x+1}{x}=\frac{1}{x}=f_4(x)$$

$$(f_6*f_3)(x)=f_6(f_3(x))=\frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x-1}{x}-1}=\frac{x-1}{x-1-x}=1-x=f_2(x)$$

$$(f_6*f_4)(x)=f_6(f_4(x))=\frac{1}{\frac{x-1}{x}}=\frac{x}{x-1}=f_3(x)$$

$$(f_6*f_5)(x)=f_6(f_5(x))=\frac{1}{1-\frac{x-1}{x}}=\frac{x}{x-(x-1)}=x=f_1(x)$$

$$(f_6*f_6)(x)=f_6(f_6(x))=\frac{\frac{x-1}{x}-1}{\frac{x-1}{x}}=\frac{x-1-x}{x-1}=\frac{1}{1-x}=f_5(x)$$

Ο δε αντίστοιχος πολλαπλασιαστικός πίνακας είναι:

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_1	f_5	f_6	f_3	f_4
f_3	f_3	f_6	f_1	f_5	f_4	f_2
f_4	f_4	f_3	f_6	f_1	f_2	f_3
f_5	f_5	f_4	f_2	f_3	f_6	f_1
f_6	f_6	f_3	f_4	f_2	f_1	f_5

2. ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΟΜΑΔΩΝ

Οι έννοιες της ομάδας, του διανυσματικού χώρου, της άλγεβρας κ.λ.π. είναι αφηρημένες μαθηματικές δομές. Οποιοδήποτε συγκεκριμένο μαθηματικό σύστημα, με κατάλληλες ιδιότητες και πράξεις, λέμε ότι αποτελεί μια **πραγμάτωση**, (**realization**), μιας αφηρημένης μαθηματικής δομής, εάν μπορούμε να ορίσουμε μια απεικόνιση ή αντιστοιχία μεταξύ της αφηρημένης δομής και του συγκεκριμένου μαθηματικού συστήματος, έτσι ώστε από την απεικόνιση αυτή, οι πράξεις της αφηρημένης δομής να "καθρεφτίζονται" στις πράξεις που έχουν ορισθεί στο μαθηματικό σύστημα.

Σε κάθε συγκεκριμένη πραγμάτωση μπορεί να συμβεί οι πράξεις, που έχουν ορισθεί στο μαθηματικό σύστημα, να έχουν περισσότερες ιδιότητες από ότι χρειάζονται για την πραγμάτωση. Αυτές οι επί πλέον ιδιότητες χαρακτηρίζουν την φύση της πραγμάτωσης. Είναι φανερό ότι μια αφηρημένη μαθηματική δομή μπορεί να πραγματωθεί κατά πολλούς και ριζικά διαφορετικούς τρόπους.

Η έννοια της ομάδας, όπως είναι γνωστό, προήλθε από τις ιδιότητες των απεικονίσεων μεταξύ των συνόλων. Η έννοια της πραγμάτωσης μιας ομάδας στηρίζεται σ' αυτές τις απεικονίσεις και ο ορισμός της έχει ως εξής:

Έστω $\boldsymbol{G}$ μια ομάδα με στοιχεία A,B,C,…, S κάποιο σύνολο με στοιχεία x,y,z,… και M(S) το σύνολο των μετασχηματισμών του S:

$$M(S)=\{f \,/\, f:S\rightarrow S,\ f=\text{αμφιμονοσήμαντος και επί}\}$$

Εάν μπορούμε να βρούμε μια απεικόνιση T:

$$T:\ \boldsymbol{G} \rightarrow M(S)$$

$$T:\ A\in\boldsymbol{G} \rightarrow T(A)=T_A\in M(S)$$

με την ιδιότητα σε κάθε στοιχείο $A\in\boldsymbol{G}$, αντιστοιχεί ένας μετασχηματισμός T_A του S, δηλ.

$$T_A:\ S \rightarrow S \qquad (2.1)$$

ο οποίος είναι αμφιμονοσήμαντος και επί, έτσι ώστε ή σύνθεση δυο τέτοιων μετασχηματισμών T_AT_B να υπάρχει και να είναι ο μετασχηματισμός T_{AB} δηλαδή:

$$T_AT_B=T_{AB} \qquad (2.2)$$

τότε λέμε ότι έχουμε μια **πραγμάτωση**, (**realization**), της ομάδας $\boldsymbol{G}$ μέσα από τους μετασχηματισμούς του S. Το περιεχόμενο της σχέσης (2.2) μπορεί να εκφρασθεί λέγοντας ότι *ο εσωτερικός νόμος σύνθεσης της ομάδας* **G** *παριστάνεται από την σύνθεση των αντίστοιχων μετασχηματισμών*. Επίσης μπορούμε να δούμε ότι, επειδή η σύνθεση των μετασχηματισμών αυτόματα ικανοποιεί την προσεταιριστική ιδιότητα, απαιτείται ο εσωτερικός νόμος μιας ομάδας να είναι προσεταιριστικός.

Μια ενδιαφέρουσα κατηγορία πραγμάτωσης μιας ομάδας είναι αυτή που λέγεται **αναπαράσταση**, (**representation**) ή πιο σωστά **γραμμική αναπαράσταση**. Η κατηγορία αυτή προκύπτει όταν το σύνολο S είναι ένας, (πραγματικός ή μιγαδικός), γραμμικός διανυσματικός χώρος V, και οι μετασχηματισμοί $T_A,T_B,\ldots$ είναι **μη ιδιάζοντες**, (**non-singular**), γραμμικοί μετασχηματισμοί, (τελεστές), σ' αυτόν τον χώρο. Είναι γνωστό από την θεωρία των τελεστών ότι σε κάθε τελεστή, που επενεργεί σ' ένα διανυσματικό χώρο, αντιστοιχεί ένας τετραγωνικός πίνακας τάξης n ως προς κάποια βάση, όπου n=dimV η διάσταση του διανυσματικού χώρου.

Η έννοια της αναπαράστασης συνδυάζει δυο βασικές αλγεβρικές δομές: της ομάδας και του διανυσματικού χώρου. Από τον συνδυασμό αυτό προκύπτουν πίνακες, που αναπαριστούν τα στοιχεία της ομάδας. Η μελέτη αυτών των πινάκων γίνεται με την βοήθεια της θεωρίας των αναπαραστάσεων.

Στα επόμενα θα εξετάσουμε τις αναπαραστάσεις πεπερασμένων ομάδων αν και τα περισσότερα αποτελέσματα μεταφέρονται εξ' ίσου καλά και στην περίπτωση των απείρων ομάδων. Οι αναπαραστάσεις των συνεχών ομάδων θα εξετασθεί σε επόμενο κεφάλαιο.

2.1 Εισαγωγή.

Έστω $\boldsymbol{G}$={E,A,B,C,...} μια πεπερασμένη ομάδα τάξης g με E το ταυτοτικό στοιχείο και M ένα σύνολο πινάκων, που είναι τετραγωνικοί, μη ιδιάζοντες και της ίδιας τάξης, έστω n. Το σύνολο των πινάκων M εκλέγεται έτσι ώστε μεταξύ της ομάδας $\boldsymbol{G}$ και του συνόλου M να υπάρχει μια αντιστοιχία

$$\mathrm{T}: \boldsymbol{G} \rightarrow \mathrm{M}$$

με την ιδιότητα:

$$(\forall \mathrm{A,B} \in \boldsymbol{G})\left[\ \mathrm{T(A)T(B)=T(AB)}\ \right]$$

όπου T(A)T(B) είναι το γινόμενο των πινάκων T(A) και T(B). Η απεικόνιση T, (ουσιαστικά το σύνολο των πινάκων M), ονομάζεται **αναπαράσταση** της ομάδας $\boldsymbol{G}$. Η τάξη των πινάκων του συνόλου M ονομάζεται **διάσταση της αναπαράστασης**. Οι πίνακες όμως αυτοί μπορούν να θεωρηθούν σαν αναπαραστάσεις κάποιων τελεστών, που επενεργούν σ' ένα διανυσματικό χώρο V διαστάσεως n. Υπενθυμίζουμε ότι ένας τελεστής T: V → V, ως προς μια βάση $\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$, μπορεί να λάβει την μορφή τετραγωνικού πίνακα τάξης n με στοιχεία T_{ij}, που προκύπτουν από τις σχέσεις:

$$\mathrm{T}e_i=\sum_{j=1}^{n} \mathrm{T}_{ij}e_j$$

Επομένως σε κάθε τελεστή T αντιστοιχεί ένας πίνακας T_{ij} ως προς μια δεδομένη βάση και *κάθε στοιχείο A της ομάδας* ***G*** *μπορούμε να το δούμε σαν τελεστή T_A πάνω σ' ένα διανυσματικό χώρο*.

Πρέπει κανείς να προσέξει ότι το σύνολο M των πινάκων δεν αποτελεί πάντα ομάδα ως προς το γινόμενο δυο πινάκων, διότι όλοι οι πίνακες του συνόλου M δεν χρειάζεται να είναι διαφορετικοί μεταξύ τους. Μπορεί σε δυο διαφορετικά στοιχεία A,B της ομάδας $\boldsymbol{G}$ να αντιστοιχεί ο ίδιος πίνακας, δηλ. T(A)=T(B). Εάν όμως όλοι οι πίνακες είναι διακεκριμένοι, δηλ. η απεικόνιση T είναι αμφιμονοσήμαντη και επί, τότε το σύνολο των πινάκων M αποτελεί ομάδα και οι ομάδες $\boldsymbol{G}$ και M είναι ισομορφικές. Σ' αυτή την περίπτωση η αναπαράσταση λέγεται **πιστή**, (**faithful**), **αναπαράσταση**. Εάν όμως οι πίνακες δεν είναι διακεκριμένοι, τότε η απεικόνιση T δεν είναι αμφιμονοσήμαντη, είναι όμως ένας ομομορφισμός μεταξύ της ομάδας $\boldsymbol{G}$ και του συνόλου M και η αναπαράσταση ονομάζεται **εκφυλισμένη** ή **μη πιστή**, (**unfaithful**).

Η απλούστερη αναπαράσταση είναι εκείνη που σε κάθε στοιχείο A της ομάδας $\boldsymbol{G}$ αντιστοιχεί τον ταυτοτικό πίνακα E οποιασδήποτε τάξης. Η αναπαράσταση αυτή ονομάζεται **ταυτοτική αναπαράσταση** της $\boldsymbol{G}$ και προφανώς είναι μη πιστή και χωρίς ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

Εάν οι πίνακες μιας αναπαράστασης είναι μοναδιαίοι[12] τότε η αναπαράσταση λέγεται **μοναδιαία**, (**unitary**), **αναπαράσταση**.

***Παράδειγμα 1**:* Έστω η ομάδα C_{3v} και η εξής αναπαράσταση αυτής:

$$E\to(\varepsilon)\ ,\ C_3\to(\varepsilon),\ C_3^2\to(\varepsilon)$$

$$\sigma_1\to -(\varepsilon),\ \sigma_2\to -(\varepsilon),\ \sigma_3\to -(\varepsilon)$$

όπου (ε) είναι ο ταυτοτικός πίνακας, $(\varepsilon)_{ij}=\delta_{ij}$, οποιασδήποτε τάξεως.

Το σύνολο των πινάκων:

$$T_{3v}=\{(\varepsilon),(\varepsilon),(\varepsilon),-(\varepsilon),-(\varepsilon),-(\varepsilon)\}=\{(\varepsilon),-(\varepsilon)\}$$

είναι μια αναπαράσταση της ομάδας C_{3v}. Η αναπαράσταση αυτή προφανώς δεν είναι πιστή. Το σύνολο $G'=\{(\varepsilon),-(\varepsilon)\}$είναι μια ομάδα δεύτερης τάξης ομομορφική με την C_{3v} . Θα μπορούσαμε να αντιστοιχήσουμε σε όλα τα στοιχεία της ομάδας τον ταυτοτικο πίνακα (ε). Η αναπαράσταση αυτή είναι, όπως είδαμε, η ταυτοτική.

Παράδειγμα 2: Έστω $G=\{g_1, g_2,\cdots\}$ μια ομάδα πινάκων (π.χ. των GL(n), U(n) βλ. παρ 2.12), V=C (ο διανυσματικός χώρος των μιγαδικών αριθμών) και $T(g_i)=\det g_i$, η απεικόνιση που αντιστοιχεί σε κάθε πίνακα g_i την ορίζουσα του $\det g_i$. Αυτή η απεικόνιση ορίζει μια μη τετριμμένη μονοδιάστατη αναπαράσταση αφού ισχύει $(\det g_1)\ (\det g_2)=\det(g_1g_2)$ η οποία αποτελεί βασική ιδιότητα των πινάκων.

Παράδειγμα 3: Για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό ξ στο διάστημα $(-\pi<\xi<\pi)$, οι αριθμοί $\{e^{-in\xi},\ n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$τυποποιούν μια (μονοδιάστατη) αναπαράσταση της διακεκριμένης ομάδας περιστροφών κατά γωνία nξ σε μια χωρική διάσταση.

2.2 Ιδιότητες των αναπαραστάσεων

Επειδή το ταυτοτικό στοιχείο Ε της ομάδας $\boldsymbol{G}$ έχει την ιδιότητα $EA=AE=A\ \forall A\in\boldsymbol{G}$, θα πρέπει να ισχύει αντίστοιχη σχέση στο σύνολο των πινάκων M, που αποτελούν μια αναπαράσταση της $\boldsymbol{G}$, δηλ:

$$T(E)T(A)=T(A)T(E)=T(A)$$

Αυτή όμως η σχέση ικανοποιείται μόνο όταν ο T(E) είναι ο ταυτοτικός πίνακας. Έτσι σε κάθε αναπαράσταση το ταυτοτικό στοιχείο Ε της ομάδας $\boldsymbol{G}$ θα αναπαρίσταται από τον ταυτοτικό πίνακα, τον οποίο θα συμβολίζουμε με το ίδιο γράμμα.

Εάν στη σχέση $T(A)T(B)=T(AB)$ θέσουμε $B=A^{-1}$ βλέπουμε ότι:

$$T(A)T(A^{-1})=T(AA^{-1})=T(E)=E\ \Rightarrow\ T(A^{-1})=(T(A))^{-1}$$

δηλ. η αναπαράσταση διατηρεί την πράξη της αντιστροφής.

[12] Ένας πίνακας T ονομάζεται **μοναδιαίος** όταν ο συζυγοανάστροφος συμπίπτει με τον αντίστροφο του δηλ. $T^{+}=T^{-1}$, βλέπε επίσης παρ. 2.12 Ομάδες Πινάκων)

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δυο αναπαραστάσεις T^1 και T^2 της ομάδας $\boldsymbol{G}$. Εάν υπάρχει ένας μη ιδιάζων πίνακας S έτσι ώστε:

$$(\forall A\in \boldsymbol{G})\left[\ T^1(A)=S^{-1}T^2(A)S\ \right] \tag{2.4}$$

τότε οι αναπαραστάσεις T^1 και T^2 ονομάζονται **ισοδύναμες**, (**equivalent**),. Αυτό σημαίνει ότι οι πίνακες του πρώτου συνόλου M_1 μπορούν να προκύψουν από τους πίνακες του δεύτερου συνόλου M_2 μ' ένα μετασχηματισμό ομοιότητας. Τα παραπάνω αποδίδονται γραφικά από το εξής διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "S"] \arrow[d, "T^2(A)"] & V \arrow[d, "T^1(A)"'] \\ V \arrow[r, "S"] & V \end{tikzcd}$$

Εάν δυο αναπαραστάσεις δεν είναι ισοδύναμες θα λέγονται **διακεκριμένες**, (**distrinct**).

Παρατήρηση 1: Η σχέση (2.4) έχει νόημα ακόμα και όταν οι αναπαραστάσεις T_1 και T_2 δεν έχουν την ίδια διάσταση. Πράγματι εάν $\dim T^1=d_1$, $\dim T^2=d_2$ με $d_1<d_2$, τότε μπορούμε να επεκτείνουμε την αναπαράσταση T^1 στην $T^{1'}$ προσθέτοντας 1 στην κύρια διαγώνιο και 0 αλλού , δηλαδή γράφοντας:

$$T^{1'}(A)=\left(\begin{array}{c|c} T^1(A) & \mathbf{0}_1 \\ \hline \mathbf{0}_2 & I \end{array}\right)$$

Όπου ο πίνακας I είναι ο ταυτοτικός τάξης d_2-d_1, ο $\mathbf{0}_1$ ο μηδενικός πίνακας τάξης $d_1\times(d_2-d_1)$ και ο $\mathbf{0}_2$ ο μηδενικός πίνακας τάξης $(d_2-d_1)\times d_1$..

Παράδειγμα 1: Θεωρούμε την ομάδα $\boldsymbol{G}=\{E, A\}$ με $A^2=E$.

α) Μια μονοδιάστατη αναπαράσταση, θεωρώντας τον πραγματικό διανυσματικό χώρο V=**R**, είναι:

$$T(E)=1,\ T(A)=-1$$

β) Δυο δυδιάστατες αναπαραστάσεις, θεωρώντας τον πραγματικό διανυσματικό χώρο $V=\mathbf{R}^2$, είναι:

β1) $\quad T^1(E)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad T^1(A)=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

β2) $\quad T^2(E)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad T^2(A)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

Είναι οι αναπαραστάσεις T^1και T^2 ισοδύναμες; (Ναι. Θεωρείστε σαν S τον πίνακα $S=\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & -\alpha\end{pmatrix}$ με α,β τυχαίοι αριθμοί και διάφοροι μεταξύ τους, και επαληθεύστε ότι ισχύει $T^1(X)=S^{-1}T^2(X)S$ με X=E, A.

Άσκηση: Να βρεθεί η γενική μορφή του πίνακα $T=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ έτσι ώστε T^2=Ε.

Απάντηση: $T=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \dfrac{1-\alpha^2}{\beta} & -\alpha\end{pmatrix}$ με β≠0. Εάν θέσουμε $1-\alpha^2=\beta^2$, τότε η μορφή του Τ απλοποιείται σε $T=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & -\alpha\end{pmatrix}$.

Επίσης υπάρχουν και οι εξής ειδικές περιπτώσεις:

$T=\begin{pmatrix}1 & \beta\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $T=\begin{pmatrix}-1 & \beta\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $T=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \gamma & -1\end{pmatrix}$, $T=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ \gamma & 1\end{pmatrix}$ με β, γ τυχαία

Παράδειγμα 2: Θεωρούμε τώρα την κυκλική ομάδα ***G***={Ε, Α, A^2, ···, A^{n-1}} με A^n=Ε. Μπορούμε να κατασκευάσουμε μια αναπαράσταση από έναν πίνακα Μ οποιασδήποτε τάξεως, που να ικανοποιεί την σχέση M^n=Ε. Η αναπαράσταση τότε θα είναι: Τ(Ε)=Ι, Τ(Α)=Μ, $T(A^2)=M^2$, ···, $T(A^{n-1})=M^{n-1}$.

Για την περίπτωση π.χ. n=4 ο πίνακας:

$$M=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

ικανοποιεί την σχέση: $M^4=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

και η αντίστοιχη αναπαράσταση θα είναι:

$$T(E)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad T(A)=M=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$T(A^2)=M^2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \qquad T(A^3)=M^3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

Μια άλλη αναπαράσταση της ίδιας ομάδας μπορούμε να κατασκευάσουμε από τον πίνακα:

$$M=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

ο οποίος επίσης ικανοποιεί την σχέση: M^4=Ε. Η νέα δυδιάστατη αναπαράσταση θα είναι:

$$T(E)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad T(A)=M=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad T(A^2)=M^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad T(A^3)=M^3=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

η οποία όμως είναι εκφυλισμένη. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι στην πρώτη περίπτωση η συνθήκη $M^n=E$ δεν ικανοποιείται για n<4, ενώ στην δεύτερη περίπτωση ικανοποιείται και για n=2.

Παράδειγμα 3: Έστω ο διαν. χώρος R^3 και η συνήθης βάση $B=\{e_1, e_2, e_3\}$.Θεωρούμε την ομάδα ***G*** που αποτελείται από τους δυο τελεστές E και I, όπου ο τελεστής I αναστρέφει το διάνυσμα **r** ως προς την αρχή του, δηλ.

$$E\mathbf{r}=\mathbf{r},\ I\mathbf{r}=-\mathbf{r},\ I^2=E$$

Οι τελεστές αυτοί ως προς την βάση B έχουν την παρακάτω αναπαράσταση υπό μορφή πινάκων:

$$T(E)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ T(I)=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

Οι ίδιοι τελεστές ως προς άλλον διαν. χώρο έχουν άλλη αναπαράσταση. Π. χ. ας θεωρήσουμε τον διαν. χώρο των συναρτήσεων τριών μεταβλητών με αντιπρόσωπο την $\psi(\mathbf{r})$ και τους τελεστές:

$$T_E\psi(\mathbf{r})\equiv \psi(E\mathbf{r})=\psi(\mathbf{r})\ ,\ T_I\psi(\mathbf{r})\equiv \psi(I\mathbf{r})=\psi(-\mathbf{r})$$

Δηλ. η δράση των τελεστών αυτών T_E και T_I εκφράζεται σαν συνάρτηση των $\psi(\mathbf{r})$, $\psi(-\mathbf{r})$.
Στον διδιάστατο αυτόν χώρο θεωρούμε την εξής βάση:

$$|1> \longleftrightarrow \psi(\mathbf{r})\ ,\ |2> \longleftrightarrow \psi(-\mathbf{r})\quad \text{ή}\quad |1>=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ |2>=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Επομένως η αντίστοιχη αναπαράσταση θα είναι:

$$T_E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ T_I=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

Πράγματι $T_E\Psi(\mathbf{r})=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\Psi(\mathbf{r})$ και $T_I\Psi(\mathbf{r})=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\Psi(-\mathbf{r})$

Στον υπόχωρο των άρτιων συναρτήσεων έχουμε $T_E\Psi(\mathbf{r})=T_I\Psi(\mathbf{r})=\Psi(\mathbf{r})$

με αντίστοιχη αναπαράσταση: $T^1(E)=1\ ,\ T^1(I)=1$

Ενώ στον χώρο των περιττών συναρτήσεων έχουμε $T_E\Psi(\mathbf{r})=\Psi(\mathbf{r})\ ,\ T_I\Psi(\mathbf{r})=-\Psi(\mathbf{r})$

με αντίστοιχη αναπαράσταση: $T^2(E)=1\ ,\ T^2(I)=-1$

Μια άλλη αναπαράσταση είναι:

$$T(E)=\begin{pmatrix}T^1(E)&0\\0&T^2(E)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ T(I)=\begin{pmatrix}T^1(I)&0\\0&T^2(I)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

2.3 Αναλλοίωτοι υπόχωροι

Εάν ο διανυσματικός χώρος V έχει έναν γνήσιο υπόχωρο $U\subset V$ με την ιδιότητα να είναι κλειστός ως προς τους μετασχηματισμούς που ορίζουν τα στοιχεία της ***G***, δηλ.

$$(\forall A\in \boldsymbol{G})(\forall v\in U)\left[\, T(A)v\in U \,\right] \qquad (2.5)$$

τότε ο υπόχωρος U ονομάζεται **αναλλοίωτος**, (**invariant**), **υπόχωρος ως προς την ομάδα *G*** και ο διανυσματικός χώρος V ονομάζεται **αναγώγιμος**, (**reducible**), **ως προς την ομάδα *G***.

2.4 Αναγωγιμότητα, (reducibility), μιας αναπαράστασης

Εάν ο U είναι ένας αναλλοίωτος υπόχωρος διαστάσεως m του διαν. χώρου V, που είναι διαστάσεως n, τότε ως προς κάποια κατάλληλη βάση οι πίνακες της αναπαράστασης μπορούν να λάβουν την μορφή:

$$T(A)=\left(\begin{array}{c|c} D^1(A) & \mathbf{0} \\ \hline X(A) & D^2(A) \end{array}\right) \qquad (2.6)$$

όπου $D^1(A)$, $D^2(A)$ είναι τετραγωνικοί πίνακες τάξης m, n-m αντίστοιχα, ο X(A) είναι τύπου και (n-m)×m και ο **0** ο μηδενικός πίνακας τύπου m×(n-m).

<u>Απόδειξη</u>: Θεωρούμε μια βάση $B=\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ του διαν. χώρου V διαλέγοντας έτσι την σειρά των βασικών διανυσμάτων ώστε τα πρώτα m διανύσματα να αποτελούν μια βάση του υποχώρου U. Στο στοιχείο A της ομάδας ***G*** αντιστοιχεί ο τελεστής $T(A)=T_A$, τον οποίο αφήνουμε να επιδράσει πάνω στα βασικά διανύσματα e_μ, που ανήκουν στον υπόχωρο U και των οποίων η αναπαράσταση υπό μορφή γραμμής έστω ότι είναι:

$e_\mu=(0,0,\ldots,1_\mu,0,\ldots,0)$ μ=1,…,m. Θα έχουμε:

$$T_A(e_\mu)=e_\mu T(A)=(0,0,\ldots,1_\mu,0,\ldots,0)\left(\begin{array}{ccc|ccc} T_{11} & \cdots & T_{1m} & T_{1,m+1} & \cdots & T_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ T_{m1} & \cdots & T_{mm} & T_{m,m+1} & \cdots & T_{mn} \\ \hline T_{m+1,1} & \cdots & T_{m+1,m} & T_{m+1,m+1} & \cdots & T_{m+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ T_{n1} & \cdots & T_{nm} & T_{n,m+1} & \cdots & T_{nn} \end{array}\right)$$

$$=(T_{\mu 1}, T_{\mu 2},\cdots,T_{\mu m},T_{\mu,m+1},\cdots,T_{\mu n}) \qquad (2.7)$$

όπου T_{ij} είναι τα στοιχεία του πίνακα T(A) ως προς την βάση B. Επειδή τώρα ο υπόχωρος U είναι αναλλοίωτος ως προς την ομάδα ***G***, το διάνυσμα $T_A(e_\mu)$ ανήκει στον U και επομένως οι συνιστώσες του που αντιστοιχούν στα βασικά διανύσματα $e_{m+1},\ldots,e_n$ θα είναι μηδέν, δηλ. $T_{\mu\kappa}(A)=0$ για $m+1\le\kappa<n$. Όμως το μ είναι τυχαίο και αφήνοντας το να πάρει όλες τις επιτρεπτές τιμές του καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι τα στοιχεία του άνω δεξιού μέρους του πίνακα T(A) πρέπει να είναι μηδέν, δηλ. ο πίνακας T(A) έχει την μορφή (2.6).

Ας πάρουμε τώρα το γινόμενο Γ=AB δυο στοιχείων της ομάδας ***G***, το οποίο με τους πίνακες της αναπαραστάσεως γράφεται: T(Γ)=T(A)T(B) ή

$$T(\Gamma)=\left(\begin{array}{c|c} D^1(A) & \mathbf{0} \\ \hline X(A) & D^2(A) \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} D^1(B) & \mathbf{0} \\ \hline X(B) & D^2(B) \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} D^1(A)D^1(B) & \mathbf{0} \\ \hline X(A)D^1(B)+D^2(A)X(B) & D^2(A)D^2(B) \end{array}\right)$$

Αλλά επειδή το T(Γ) πρέπει να είναι της μορφής:

$$T(\Gamma)=\left(\begin{array}{c|c} D^1(\Gamma) & \mathbf{0} \\ \hline X(\Gamma) & D^2(\Gamma) \end{array}\right)$$

θα έχουμε: $D^1(A)D^1(B)=D^1(\Gamma)$

$D^2(A)D^2(B)=D^2(\Gamma)$ και

$X(A)D^1(B)+D^2(A)X(B)=X(\Gamma)$

Από τις παραπάνω σχέσεις είναι φανερό ότι τα δυο σύνολα των πινάκων:

$$D^1=\{D^1(E),D^1(A),\ldots\} \text{ και } D^2=\{D^2(E),D^2(A),\ldots\}$$

μας δίνουν δυο νέες αναπαραστάσεις για την ομάδα $\boldsymbol{G}$ διαστάσεως m και n-m αντίστοιχα. Επίσης είναι φανερό ότι τα βασικά διανύσματα $\{e_1,\ldots,e_m\}$ αποτελούν την βάση για την αναπαράσταση D^1 και τα υπόλοιπα n-m την βάση για την D^2 .

Εάν όλα τα παραπάνω συμβαίνουν, τότε λέμε ότι η T είναι μια **αναγώγιμη**, (**reducible**), **αναπαράσταση**. *Η αναγωγιμότητα μιας αναπαράστασης συνδέεται με την ύπαρξη ενός γνήσιου αναλλοίωτου υποχώρου* U *του αρχικού χώρου* V.

Στην πράξη είναι πολύ βολικό να χρησιμοποιούμε αναπαραστάσεις με μικρή διάσταση.

Θεώρημα 1: Κάθε αναπαράσταση T μιας πεπερασμένης ομάδας $\boldsymbol{G}$, της οποίας οι πίνακες μπορεί να μην είναι μοναδιαίοι, είναι ισοδύναμη, (με την βοήθεια ενός μετασχηματισμού ομοιότητας), με μια αναπαράσταση Γ μοναδιαίων πινάκων. Συγκεκριμένα υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας W τέτοιος ώστε $\Gamma(A)=W^{-1}T(A)W \ \forall A\in\boldsymbol{G}$ με Γ(A) μοναδιαίος πίνακας.

Η αναπαράσταση Γ(A) ονομάζεται **μοναδιαία**.

<u>Απόδειξη</u>: Κατασκευάζουμε τον ερμιτιανό πίνακα:

$$H=\sum_{A\in\mathbf{G}}T(A)T^{+}(A)$$

όπου η άθροιση γίνεται σε όλα τα στοιχεία της ομάδας $\boldsymbol{G}$ και $T^{+}(A)$ είναι ο συζυγοανάστροφος του πίνακα T(A). Από την άλγεβρα των πινάκων γνωρίζουμε ότι κάθε ερμιτιανός πίνακας H διαγωνοποιείται από ένα μοναδιαίο μετασχηματισμό U, δηλ. $U^{-1}HU=H_d$, όπου H_d είναι ο διαγώνιος πίνακας, του οποίου τα διαγώνια στοιχεία είναι οι ιδιοτιμές του H, που είναι πραγματικοί αριθμοί. Έτσι ο πίνακας H_d γράφεται:

$$H_d=U^{-1}\sum_{A\in\mathbf{G}}T(A)T^{+}(A)\,U=\sum_{A\in\mathbf{G}}U^{-1}T(A)UU^{-1}T^{+}(A)U=\sum_{A\in\mathbf{G}}T'(A)T'^{+}(A)$$

όπου $T'(A)=U^{-1}T(A)U$. Το δε k διαγώνιο στοιχείο είναι:

$$[H_d]_{kk}=d_k=\sum_{A\in\mathbf{G}}\sum_{j}T'_{kj}(A)T'^{+}_{jk}(A)=\sum_{A\in\mathbf{G}}\sum_{j}T'_{kj}(A)T'^{*}_{kj}(A)=\sum_{A\in\mathbf{G}}\sum_{j}\left|T'_{kj}(A)\right|^2$$

Επειδή κάθε όρος στο άθροισμα αυτό είναι μη αρνητικός, έχουμε $d_k\geq 0$. Το d_k μπορεί να είναι μηδέν μόνο στην περίπτωση που $T_{kj}(A)=0$ για κάθε j και για όλα τα στοιχεία $A\in\boldsymbol{G}$. Αυτό όμως συνεπάγεται τον μηδενισμό των οριζουσών όλων των πινάκων της αναπαράστασης, κάτι που έχει αποκλεισθεί. Άρα $d_k>0$.

Επειδή τώρα όλα τα στοιχεία του διαγώνιου πίνακα H_d είναι θετικοί αριθμοί, μπορούμε να θεωρήσουμε οποιαδήποτε δύναμη του πίνακα H_d, παίρνοντας τις αντίστοιχες δυνάμεις των διαγωνίων στοιχείων, δηλ.:

$$[(H_d)^p]_{kk}=(d_k)^p$$

Ο απαιτούμενος τώρα πίνακας W, που θα παίξει τον ρόλο του μετασχηματισμού ομοιότητας και θα μετατρέπει τους μη μοναδιαίους πίνακες T(A) σε μοναδιαίους πίνακες Γ(A) είναι:

$$W=U(H_d)^{1/2}$$

διότι ο πίνακας:

$$\Gamma(A)=W^{-1}T(A)W=H_d^{-1/2}U^{-1}T(A)UH_d^{½}=H_d^{-1/2}T'(A)H_d^{1/2}$$

είναι μοναδιαίος. Πράγματι:

$$\Gamma(A)\Gamma^{+}(A)=\left[H_d^{-1/2}T'(A)H_d^{1/2}\right]\left[H_d^{1/2}T'^{+}(A)H_d^{-1/2}\right]=H_d^{-1/2}T'(A)H_dT'^{+}(A)H_d^{-1/2}=$$

$$=H_d^{-1/2}T'(A)\sum_{B\in G}T'(B)T'^{+}(B)T'^{+}(A)H_d^{-1/2}=H_d^{-1/2}\sum_{B\in G}T'(AB)T'^{+}(AB)H^{-1/2}=$$

$$=H_d^{-1/2}H_dH_d^{-1/2}=E$$

Εάν τα στοιχεία της αναπαράστασης της ομάδας ***G*** δεν είναι μοναδιαίοι τελεστές, ο μετασχηματισμός ομοιότητας που μας μεταφέρει από την αναπαράσταση T στην αναπαράσταση Γ, έχει μια απλή φυσική σημασία: *μας μεταφέρει από ένα πλάγιο σύστημα συντεταγμένων σ' ένα ορθοκανονικό*. Το γεγονός ότι οι πίνακες T(A) δεν είναι μοναδιαίοι σημαίνει ότι *τα βασικά διανύσματα του υποχώρου* U, *που έχουν επιλεγεί σαν βάση για την αναπαράσταση* T, *δεν είναι ορθογώνια, ενώ τα βασικά διανύσματα για την αναπαράσταση* Γ *είναι ορθογώνια.*

2.5 Ανάγωγες αναπαραστάσεις.

Εάν η παραπάνω αναπαράσταση T είναι αναγώγιμη, τότε η μοναδιαία αναπαράσταση Γ={Γ(E),Γ(A),…}, που ορίζεται από την σχέση $\Gamma(A)=W^{-1}T(A)W$ είναι επίσης αναγώγιμη και ισοδύναμη με την T επειδή ορίζονται στον ίδιο χώρο V. Επειδή τώρα οι πίνακες της Γ είναι μοναδιαίοι θα έχουν την μορφή:

$$\Gamma(A)=\left(\begin{array}{c|c} S^1(A) & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & S^2(A) \end{array}\right)$$

όπου έχουμε δυο αναπαραστάσεις από τους μοναδιαίους πίνακες $S^1=\{S^1(E), S^1(A),\ldots\}$ και $S^2=\{S^2(E), S^2(A),\ldots\}$, που ορίζονται στους υποχώρουςV_m και V_p του χώρου V, (με $\dim V_m=m$, $\dim V_p=p$ και $\dim V=n=m+p$) και επομένως είναι ισοδύναμοι προς τους πίνακες D^1 και D^2 αντίστοιχα της σχέσεως (2.6).

Στη συνέχεια μπορεί να συμβεί οι αναπαραστάσεις S^1 και S^2 να είναι και αυτές αναγώγιμες, δηλ οι υπόχωροι V_m και V_p να περιέχουν αναλλοίωτους υποχώρους. Η διαδικασία αυτή μπορεί να συνεχισθεί μέχρι που να μην μπορούμε να βρούμε έναν μοναδιαίο μετασχηματισμό, που να ανάγει όλους τους πίνακες ακόμη περαιτέρω. Έτσι η τελική μορφή των πινάκων της αναπαράστασης Γ θα είναι:

$$\Gamma(A)=\begin{pmatrix} \Gamma^1(A) & & & 0 \\ & \Gamma^2(A) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \Gamma^s(A) \end{pmatrix}$$

με όλους τους πίνακες της αναπαράστασης Γ να έχουν την ίδια αναγώγιμη δομή. Όταν επιτυγχάνεται μια τέτοια πλήρη αναγωγή μιας αναπαράστασης, οι συνιστώσες αναπαραστάσεις Γ^1, Γ^2,…,Γ^s ονομάζονται **ανάγωγες αναπαραστάσεις** της ομάδας ***G*** και η αναπαράσταση Τ **πλήρως ανηγμένη**, (**fully reduced**).

Πρέπει να τονισθεί ότι μια ανάγωγη αναπαράσταση μπορεί να συμβεί περισσότερες από μια φορά στην αναγωγή μιας αναγώγιμης αναπαράστασης Γ. Οι πίνακες της αναπαράστασης Γ είναι τότε το ευθύ άθροισμα των πινάκων των συνισταμένων ανάγωγων αναπαραστάσεων και αυτό μπορούμε να το γράψουμε:

$$\Gamma=\alpha_1\Gamma^1\oplus\alpha_2\Gamma^2\oplus\ldots\oplus\alpha_s\Gamma^s \qquad (2.9)$$

Βάσει των ανωτέρω η μελέτη των αναπαραστάσεων και συνεπώς η μελέτη των γραμμικών μετασχηματισμών διευκολύνεται από το γεγονός ότι μπορούμε να περιοριστούμε στις ανάγωγες αναπαραστάσεις που αποτελούνται από μοναδιαίους πίνακες.

Παράδειγμα 1 Θεωρούμε την αβελιανή ομάδα ***G***={Ε, Α, A^2, A^3} της οποίας ο πολλαπλασιαστικός πίνακας είναι (βλ. παρ. 1.12 παράδειγμα 4):

	E	A	A^2	A^3
E	E	A	A^2	A^3
A	A	A^2	E	A
A^2	A^2	A^3	E	A
A^3	A^3	E	A	A^2

ή

	E	A^3	A^2	A
E	E	A^3	A^2	A
A	A	E	A^3	A^2
A^2	A^2	A	E	A^3
A^3	A^3	A^2	A	E

Η αναπαράσταση αυτής της ομάδας, που ονομάζεται κανονική αναπαράσταση, (βλ. παρακάτω παρ. 2.7), είναι:

$$T(E)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad T(A)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T(A^2)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad T(A^3)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι οι πιο πάνω πίνακες διαγωνοποιούνται με τον πίνακα:

$$W=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & i\\ -1 & 1 & i & 1\\ 1 & 1 & -1 & -i\\ -1 & 1 & -i & -1\end{pmatrix}$$

Ο πίνακας αυτός είναι μοναδιαίος και

$$W^{-1}=W^{+}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -i & -1 & i\\ -i & 1 & i & -1\end{pmatrix}$$

οπότε

$$\Gamma(E)=W^{-1}T(E)W=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \Gamma(A)=W^{-1}T(A)W=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -i & 0\\ 0 & 0 & 0 & i\end{pmatrix}$$

$$\Gamma(A^2)=W^{-1}T(A^2)W=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \qquad \Gamma(A^3)=W^{-1}T(A^3)W=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & i & 0\\ 0 & 0 & 0 & -i\end{pmatrix}$$

δηλ. η αναπαράσταση Τ είναι πλήρως αναγωγίσιμη και ισοδύναμη προς την Γ.

Επομένως έχουμε τις εξής 4 ανάγωγες μονοδιάστατες αναπαραστάσεις:

$$\Gamma^1(\boldsymbol{G})=\{1,-1,1,-1\},\ \Gamma^2(\boldsymbol{G})=\{1,1,1,1\},\ \Gamma^3(\boldsymbol{G})=\{1,-i,-1,i\},\ \Gamma^4(\boldsymbol{G})=\{1,i,-1,-i\}$$

2.6 Τα λήμματα του Schur και το θεώρημα της ορθογωνιότητας

Υπάρχουν δυο σημαντικά θεωρήματα, που λέγονται λήμματα του Schur, αρκετά χρήσιμα για την μελέτη των ανάγωγων αναπαραστάσεων μιας ομάδας και οδηγούν στο θεώρημα της ορθογωνιότητας. Στα παρακάτω υποθέτουμε ότι οι αναπαραστάσεις ορίζονται σε μιγαδικό διανυσματικό χώρο.

Πρώτο Λήμμα του Schur. Εάν Γ^i είναι μια ανάγωγη αναπαράσταση μιας ομάδας ***G*** και υπάρχει ένας πίνακας P, που μετατίθεται με όλους τους πίνακες της Γ^i, τότε ο P πρέπει να είναι ένας σταθερός πίνακας με την έννοια ότι είναι πολλαπλάσιο του ταυτοτικού πίνακα, δηλ. P=λE.

Η σπουδαιότητα του λήμματος αυτού βρίσκεται στο γεγονός ότι το αντίστροφο είναι επίσης αληθές, δηλ. εάν μπορέσουμε να δείξουμε ότι ένας οποιοσδήποτε πίνακας, που μετατίθεται με όλους τους πίνακες της αναπαράστασης, είναι σταθερός, τότε η αναπαράσταση είναι ανάγωγη.

Δεύτερο Λήμμα του Schur. Εάν Γ^i και Γ^j είναι δυο ανάγωγες αναπαραστάσεις διαστάσεως d_i και d_j αντίστοιχα μιας ομάδας ***G*** και ο πίνακας Μ τάξης $d_i \times d_j$ ικανοποιεί την σχέση:

$$\Gamma^i(A)M = M\Gamma^j(A) \quad \forall A \in \boldsymbol{G} \tag{2.10}$$

τότε ή α) Μ=0, (μηδενικός πίνακας), ή β) ο Μ είναι ομαλός τετραγωνικός δηλ. $\det M \neq 0$ μόνο στην περίπτωση που οι Γ^i και Γ^j είναι ισοδύναμες αναπαραστάσεις.

Σαν συμπέρασμα βγαίνει ότι αν υπάρχει πίνακας $M \neq 0$ που ικανοποιεί την σχέση (2.10), τότε οι ανάγωγες αναπαραστάσεις $\Gamma^i(A)$ και $\Gamma^j(A)$ είναι ισοδύναμες, δηλ. ουσιαστικά οι ίδιες.

Εφαρμογή των παραπάνω λημμάτων είναι το εξής θεώρημα:

Θεώρημα της ορθογωνιότητας. Έστω Γ^i και Γ^j δυο μη ισοδύναμες και ανάγωγες αναπαραστάσεις διαστάσεως d_i και d_j αντίστοιχα, μιας ομάδας ***G*** τάξης g. Τότε ισχύει:

$$\sum_{A \in \mathbf{G}} \Gamma^i_{km}(A)\Gamma^{j\,*}_{sn}(A) = \frac{g}{d_i}\delta_{ij}\delta_{ks}\delta_{mn} \tag{2.11}$$

Η παραπάνω σχέση είναι γνωστή σαν το θεώρημα της ορθογωνιότητας για τις ανάγωγες αναπαραστάσεις μιας ομάδας και κατέχει κεντρική θέση στην θεωρία των αναπαραστάσεων των ομάδων.

Το θεώρημα αυτό έχει μια ενδιαφέρουσα σημασία, που μπορεί κανείς να την δει χρησιμοποιώντας την γλώσσα των διανυσματικών χώρων και έχει ως εξής:

Έστω c το πλήθος των διακεκριμένων ανάγωγων αναπαραστάσεων μιας πεπερασμένης ομάδας ***G***={Ε, Α, Β, ...} τάξης g. Θεωρούμε το Γ^i_{km} σαν συνάρτηση των στοιχείων της ομάδας ***G***. Η συνάρτηση αυτή Γ^i_{km} ορίζεται μόνο στα g διακεκριμένα "σημεία" Ε, Α, Β, ... Για κάθε διαφορετική τιμή των i, k, m, ($1 \le i \le c$, $1 \le k,m \le d_i$), έχουμε και μια συνάρτηση και επομένως ο ολικός αριθμός των συναρτήσεων είναι $\sum_{i=1}^{c} d_i^2$, (έχουμε d_i^2 συναρτήσεις για κάθε τιμή του i). Το σύνολο αυτών των συναρτήσεων ορίζει ένα διανυσματικό χώρο διαστάσεως g, διότι μια συνάρτηση αυτού του χώρου καθορίζεται πλήρως εάν δοθούν οι "συνιστώσες" της, που είναι g σε πλήθος. Ο χώρος αυτός γενικά αναφέρεται σαν ο **χώρος της ομάδας**, (**group space**).

Το αριστερό μέλος της (2.11) μπορούμε να το δούμε σαν το εσωτερικό γινόμενο των δυο συναρτήσεων Γ^i_{km} και Γ^i_{km} και να γράψουμε:

$$\langle \Gamma^j_{sn} \mid \Gamma^i_{km} \rangle = \sum_{A \in \mathbf{G}} \Gamma^{j*}_{sn}(A)\Gamma^i_{km}(A) \tag{2.12}$$

οπότε από τη σχέση (2.11) βγαίνει το συμπέρασμα ότι οι συναρτήσεις Γ^i_{km} είναι ορθογώνιες μεταξύ τους. Μπορεί να αποδειχθεί ότι αποτελούν και πλήρες σύνολο και επομένως σχηματίζουν μια ορθοκανονική βάση, άρα πάντα ισχύει:

$$\sum_{i=1}^{c} d_i^{\,2} = g \tag{2.13}$$

Οι συναρτήσεις Γ^{i}_{km} θα ονομάζονται **αναπαραστατικά διανύσματα**, (**representation vectors**), του χώρου της ομάδας.

Η σχέση (2.13) είναι σημαντική διότι για μικρό σχετικό g, (όπως συμβαίνει στις περισσότερες εφαρμογές), επιτρέπει τον υπολογισμό των αναγώγων αναπαραστάσεων και των διαστάσεων τους.

Σαν ένα απλό παράδειγμα για τον χώρο της ομάδας μπορούμε να θεωρήσουμε τον 2-διάστατο spin-χώρο των spin-συναρτήσεων ενός σωματιδίου με s=1/2. Οι βασικές συναρτήσεις αυτού του χώρου είναι οι $\chi^{1/2}(s_z)$ και $\chi^{-1/2}(s_z)$, (όπου s_z είναι μια συνιστώσα του spin **s**). Οι συναρτήσεις αυτές ορίζονται στις δυο διακεκριμένες τιμές του ορίσματος των $s_z=\pm 1/2$. Κάθε άλλη συνάρτηση, (spinor), μπορεί να εκφρασθεί σαν γραμμικός συνδυασμός αυτών των δυο βασικών συναρτήσεων. Γενικά, εάν το spin ενός σωματιδίου είναι **j**, τότε οι spin-συναρτήσεις ορίζουν έναν χώρο 2j+1 διαστάσεων με 2j+1 βασικές συναρτήσεις: $\chi^{j}(j_z)$, $\chi^{j-1}(j_z),\cdots, \chi^{-j}(j_z)$, (όπου j_z είναι μια συνιστώσα του **j**). Κάθε συνάρτηση ορίζεται σε 2j+1 τιμές του ορίσματος της $-j\le j_z\le j$.

2.7 Η Κανονική αναπαράσταση.

Ο πιο φυσιολογικός τρόπος για να έχει κανείς μια αναγώγιμη αναπαράσταση μιας πεπερασμένης ομάδας είναι να χρησιμοποιήσει τον πολλαπλασιαστικό πίνακα. Ας υποθέσουμε ότι η ομάδα έχει g στοιχεία. Αριθμούμε τα στοιχεία με έναν οποιονδήποτε τρόπο και έστω ότι παίρνουμε την εξής διάταξη:

$$\boldsymbol{G}=\{A_1, A_2,\cdots,A_g\}$$

Θεωρούμε τα στοιχεία της ομάδας ότι αποτελούν μια βάση ενός διαν. χώρου g διαστάσεων με την αντιστοιχία:

$$A_1 \rightarrow |e_1\rangle,\ A_2 \rightarrow |e_2\rangle,\ \cdots,\ A_g \rightarrow |e_g\rangle$$

Συνθέτουμε τώρα τα στοιχεία A_m και A_n, με βάση τον νόμο εσωτερικής συνθέσεως με τον οποίο είναι εφοδιασμένη η ομάδα, και έστω A_k το αποτέλεσμα δηλ.

$$A_mA_n=A_k$$

Με την βοήθεια της παραπάνω σχέσεως μπορούμε να ορίσουμε ένα μετασχηματισμό μεταξύ των στοιχείων της ομάδας $\boldsymbol{G}$ ως εξής:

$$A_m:\ A_n \rightarrow A_k$$

Ο μετασχηματισμός αυτός μεταφέρεται στο σύνολο των βασικών διανυσμάτων

$$|e_m\rangle:\ |e_n\rangle \rightarrow |e_k\rangle\equiv\Gamma(A_m)|e_n\rangle \qquad (2.15)$$

Τα στοιχεία τώρα του πίνακα $\Gamma(A_m)$ υπολογίζονται από την σχέση:

$$\Gamma(A_m)_{kn}=\langle e_n|\Gamma(A_m)|e_k\rangle=\begin{cases}1 \text{ εάν } A_mA_n=A_k \\ \\ 0 \text{ αλλοιώς}\end{cases} \qquad m, n,k =1,2,\cdots,g \qquad (2.16)$$

Από την σχέση (2.16) παρατηρούμε ότι:

1) Εάν θέσουμε A_m=E βρίσκουμε:

$$\Gamma(E)_{kn}=\delta_{kn}=\begin{cases}1 \text{ εάν } k=n\\ 0 \text{ αλλοιώς}\end{cases}$$

δηλ. ο πίνακας Γ(Ε) είναι ο ταυτοτικός, πράγμα που ισχύει για όλες τις αναπαραστάσεις.

2) Κάθε γραμμή ή στήλη του πίνακα $\Gamma(A_m)$ περιέχει παντού μηδενικά εκτός από μια θέση που έχει μονάδα.

Παράδειγμα 1: Θα βρούμε την κανονική αναπαράσταση της ομάδας C_{3v}, εφαρμόζοντας τα παραπάνω.

Θέτουμε: $A_1=E\leftrightarrow|e_1>$, $A_2=C_3\leftrightarrow|e_2>$, $A_3=C_3^2\leftrightarrow|e_3>$,
$A_4=\sigma_1\leftrightarrow|e_4>$, $A_5=\sigma_2\leftrightarrow|e_5>$, $A_6=\sigma_3\leftrightarrow|e_6>$,

και βρίσκουμε : $\Gamma(A_1)=\Gamma(E)=(\varepsilon)$ (ταυτοτικός πίνακας)

$\Gamma(A_2)|e_1>=C_3E=C_3=|e_2>$

$\Gamma(A_2)|e_2>=C_3C_3=C_3^2=|e_3>$

$\Gamma(A_2)|e_3>= C_3C_3^2=E=|e_1>$

$\Gamma(A_2)|e_4>=C_3\sigma_1=\sigma_3=|e_6>$

$\Gamma(A_2)\ |e_5>=C_3\sigma_2=\sigma_1=|e_4>$

$\Gamma(A_2)\ |e_6>=C_3\sigma_3=\sigma_2=|e_5>$

Εάν τις παραπάνω σχέσεις τις πολλαπλασιάσουμε διαδοχικά με τα διανύσματα

$<e_1|, <e_2|, <e_3|, <e_4|, <e_5|, <e_6|$

βρίσκουμε:

$<e_1|\ \Gamma(A_2)|e_1>=<e_1|e_2>=0$

$<e_1|\ \Gamma(A_2)|e_2>=<e_1|e_3>=0$

$<e_1|\ \Gamma(A_2)|e_3>=<e_1|e_1>=1$

$<e_1|\ \Gamma(A_2)|e_4>=<e_1|e_6>=0$

$<e_1|\ \Gamma(A_2)|e_5>=<e_1|e_4>=0$

$<e_1|\ \Gamma(A_2)|e_6>=<e_1|e_5>=0$ κ.λ.π

Τελικά θα έχουμε:

$$\Gamma(A_2)=\Gamma(C_3)=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0&0\end{bmatrix}$$

Κατά τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε και την αναπαράσταση των υπολοίπων στοιχείων της ομάδας.

$$\Gamma(C_3^2)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \Gamma(\sigma_1)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma(\sigma_2)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \Gamma(\sigma_3)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Μετά από τους σχετικούς πολλαπλασιασμούς επιβεβαιώνεται ότι οι πιο πάνω πίνακες έχουν τον ίδιο πίνακα πολλαπλασιασμού με την $C_{3v.}$ Εννοείται βέβαια ότι η κανονικη αναπαράσταση δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένη. Μια αλλαγή π.χ. στην αρίθμηση των στοιχείων της ομάδας θα δώσει πίνακες Γ(Χ) οι οποίοι είναι διαφορετικοί. Οι διάφορες όμως αυτές μορφές είναι ισοδύναμες μεταξύ τους.

Παρατήρηση 1 Μια μορφή κανονικής αναπαράστασης βρίσκεται από τον πολλαπλασιαστικό πίνακα όταν αυτός είναι γραμμένος έτσι ώστε το ταυτοτικό στοιχείο Ε να εμφανίζεται μόνο στη διαγώνιο του πίνακα. Σε κάθε στοιχείο της ομάδας αντιστοιχούμε τον πίνακα, που προκύπτει από τον πολλαπλασιαστικό εάν θέσουμε στη θέση, που εμφανίζεται το στοιχείο το 1 και σε όλες τις άλλες θέσεις το 0. Η αναπαράσταση, που προκύπτει με αυτό τον τρόπο είναι αναγώγιμη και τάξεως ίση με την τάξη της ομάδας.

Εάν την παραπάνω διαδικασία την εφαρμόσουμε στην περίπτωση της ομάδας C_{4v} προκύπτει π.χ. για το στοιχείο C_4 ο πίνακας:

$$\Gamma(C_4)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.8 Οι χαρακτήρες μιας αναπαράστασης.

Οι πίνακες μιας αναπαράστασης μιας ομάδας είδαμε ότι δεν είναι συγκεκριμένοι, διότι εξαρτώνται από την βάση του διανυσματικού χώρου και ακόμα από την διάταξη των διανυσμάτων της βάσης. *Όμως όλες οι αναπαραστάσεις που ορίζονται στον ίδιο διανυσματικό χώρο είναι ισοδύναμες, διότι σχετίζονται μεταξύ τους με ένα μετασχηματισμό ομοιότητας.* Από την γραμμική Άλγεβρα είναι γνωστό ότι το ίχνος των τετραγωνικών πινάκων είναι αναλλοίωτο ως προς τους μετασχηματισμούς ομοιότητας. Επομένως βλέπουμε ότι τα ίχνη των πινάκων μιας αναπαράστασης θα μπορούσαν μονοσήμαντα να χαρακτηρίσουν την αναπαράσταση ανεξάρτητα από την εκλογή της βάσης.

Έστω Γ μια αναπαράσταση, (αναγώγιμη ή μη), μιας ομάδας ***G***. Ορίζουμε σαν **χαρακτήρες** της αναπαράστασης Γ το σύνολο των ιχνών των πινάκων της αναπαράστασης Γ, δηλ.

$$\chi(A)=\mathrm{tr}\Gamma(A)=\sum_k \Gamma_{kk}(A) \tag{2.17}$$

Προφανώς όταν η αναπαράσταση είναι μονοδιάσταση οι χαρακτήρες είναι η ίδια η αναπαράσταση. Επίσης οι χαρακτήρες των στοιχείων Α και Β, που είναι συζυγή στοιχεία, ταυτίζονται, διότι οι πίνακες Τ(Α) και Τ(Β) συνδέονται με μετασχηματισμό ομοιότητας: $T(A)=S^{-1}T(B)S \Rightarrow \mathrm{tr}T(A)=\mathrm{tr}T(B) \Rightarrow \chi(A)=\chi(B)$. Έτσι όλα τα στοιχεία μιας κλάσης έχουν τον ίδιο χαρακτήρα.

Ο χαρακτήρας είναι επομένως μια συνάρτηση των κλάσεων όπως ακριβώς η αναπαράσταση είναι μια συνάρτηση των στοιχείων της ομάδας.

Από τα παραπάνω εύκολα προκύπτει ότι εάν δυο αναπαραστάσεις είναι ισοδύναμες, τότε έχουν το ίδιο σύνολο χαρακτήρων. Ισχύει και το αντίστροφο. Επομένως για να ελέγξουμε ότι δυο αναπαραστάσεις είναι ισοδύναμες δεν χρειάζεται να ανατρέξουμε στον ορισμό (2.4) για να βρούμε έναν πίνακα S ώστε να ισχύει η (2.4).

Εάν έχουμε k κλάσεις σε μια ομάδα ***G*** π.χ. $K_1, K_2, \cdots, K_k$, τότε οι δυνατοί χαρακτήρες είναι k σε πλήθος $\{\chi(K_i)\ /\ i=1,\cdots,k\}$. Π.χ. για την ομάδα C_{3v} έχουμε τρεις κλάσεις: $K_1=\{E\}$, $K_2=\{C_3, C_3^2\}$, $K_3=\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$. Για να βρούμε τους χαρακτήρες, παίρνουμε ένα τυχαίο στοιχείο από κάθε κλάση και βρίσκουμε τον χαρακτήρα του. Θεωρώντας την κανονική αναπαράσταση, που δίνεται στο παράδειγμα 1 της παρ. 2.7 βρίσκουμε $\chi(K_1)=6$, $\chi(K_2)=0$, $\chi(K_3)=0$. *Ο χαρακτήρας της κλάσεως, που περιέχει το ταυτοτικό στοιχείο, συμπίπτει με την διάσταση της αναπαραστάσεως.*

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε στην **ορθογωνιότητα των** χαρακτήρων. Η σχέση (2.11) περιέχει διπλή ορθογωνιότητα:

α) όταν πρόκειται για την ίδια αναπαράσταση i=j αλλά για διαφορετικά στοιχεία $(k,m)\neq(s,n)$

β) όταν πρόκειται για τα ίδια στοιχεία $(k,m)=(s,n)$ αλλά για διαφορετικές αναπαραστάσεις $i\neq j$.

Συνεπώς στον g-διάστατο διανυσματικό χώρο έχουμε $d_1^2+d_2^2+\cdots+d_n^2$ ορθογώνια διανύσματα και επομένως θα πρέπει να ισχύει:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i^2 \leq g$$

Με άλλα λόγια μια πεπερασμένη ομάδα έχει πεπερασμένες το πλήθος ανάγωγες αναπαραστάσεις, διάφορες μεταξύ τους με διάσταση αναγκαστικά μικρότερη του $\sqrt{g}$ δηλ.

$$d_i \leq \sqrt{g} \quad i=1,2,\cdots,n$$

Από την σχέση οθογωνιότητας (2.11) προκύπτει μια απλούστερη και πολύ χρήσιμη σχέση μεταξύ των χαρακτήρων. Θέτουμε k=m και s=n και η σχέση (2.11) γράφεται:

$$\sum_{A\in \mathbf{G}} \Gamma^{i}_{kk}(A)\Gamma^{j\,*}_{ss}(A) = \frac{g}{d_i}\delta_{ij}\delta_{ks}$$

Αθροίζουμε την σχέση αυτή ως προς k και s και έχουμε:

$$\sum_{A\in \mathbf{G}} \left[\sum_{k} \Gamma^{i}_{kk}(A)\right]\left[\sum_{s} \Gamma^{j\,*}_{ss}(A)\right] = \sum_{k} \frac{g}{d_i}\delta_{ij}\delta_{ks} = \frac{g}{d_i} d_i \delta_{ij} \Rightarrow$$

$$\sum_{A\in \mathbf{G}} \chi^{(i)}(A)\chi^{(j)*}(A) = g\delta_{ij} \tag{2.18}$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η ομάδα ***G*** έχει k κλάσεις K_1, K_2, ⋯,K_k με αριθμό στοιχείων η κάθε μια g_1, g_2,⋯,g_k αντίστοιχα. Εφ’ όσον ο χαρακτήρας όλων των στοιχείων μιας κλάσης είναι ο ίδιος η σχέση (2.18) γράφεται:

$$\sum_{\alpha=1}^{k} g_\alpha \chi^{(i)}_\alpha \chi^{(j)*}_\alpha = g\delta_{ij} \Rightarrow$$

$$\sum_{\alpha=1}^{k} \sqrt{\frac{g_\alpha}{g}}\chi^{(i)}_\alpha \sqrt{\frac{g_\alpha}{g}}\chi^{(j)*}_\alpha = \delta_{ij} \tag{2.19}$$

όπου $\chi_\alpha^{(i)}$ είναι ο χαρακτήρας της ανάγωγης αναπαραστάσεως $\Gamma^{(i)}(A_\alpha)$ ενός στοιχείου A_α της κλάσης K_α. Η σχέση (2.19) εκφράζει την ορθογωνιότητα των χαρακτήρων μιας ανάγωγης αναπαράστασης. Οι συναρτήσεις:

$$e_\alpha^{(i)} = \sqrt{\frac{g_\alpha}{g}}\chi^{(i)}_\alpha \quad i=1,2,\cdots,n \tag{2.20}$$ [13]

αποτελούν n ορθοκανονικά διανύσματα στον k-διάστατο χώρο των κλάσεων της ομάδας ***G***, δηλ. $n \leq k$ (2.21)

Αποδεικνύεται ότι η σχέση (2.21) ισχύει με το ίσο: n=k

<u>Συμπέρασμα</u>: *Ο αριθμός των ανάγωγων αναπαραστάσεων της ομάδας **G** είναι ίσος με τον αριθμό των κλάσεων της **G**.*

2.9 Αναγωγή μιας αναγώγιμης αναπαράστασης.

Πολύ συχνά συμβαίνει μια αναπαράσταση μιας ομάδας να είναι αναγώγιμη. Μια αναγώγιμη όμως αναπαράσταση Γ μπορεί να γραφεί σαν γραμμικός συνδυασμός ανάγωγων αναπαραστάσεων βάσει της σχέσεως (2.9). Μπορούμε να βρούμε την συχνότητα με την

[13] N είναι το πλήθος των ανάγωγων αναπαραστάσεων που δεν είναι ισοδύναμες.

οποία εμφανίζεται μια ανάγωγη αναπαράσταση Γ^i κατά την αναγωγή της Γ. Πράγματι, παίρνουμε το ίχνος και των δυο μελών της (2.9) και έχουμε:

$$\chi(A)=\sum_i \alpha_i \chi^{(i)}(A) \qquad \forall A\in \mathbf{G} \tag{2.22}$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δυο μέλη με $\chi^{(j)*}(A)$ και αθροίζοντας ως προς όλα τα στοιχεία της $\boldsymbol{G}$ έχουμε:

$$\sum_{A\in\mathbf{G}}\chi^{(j)*}(A)\chi(A)=\sum_i \alpha_i \sum_{A\in\mathbf{G}}\chi^{(j)*}(A)\chi^{(i)}(A)=\alpha_j g \;\Rightarrow\; \alpha_j=\frac{1}{g}\sum_{A\in\mathbf{G}}\chi^{(i)*}(A)\chi(A) \tag{2.23}$$

Η (2.23) δίνει μια μέθοδο για τον υπολογισμό των συντελεστών της σχέσεως (2.9). Οι χαρακτήρες των ανάγωγων αναπαραστάσεων ονομάζονται **απλοί χαρακτήρες**, ενώ οι χαρακτήρες των αναγώγιμων αναπαραστάσεων ονομάζονται **σύνθετοι χαρακτήρες**. Ένας σύνθετος χαρακτήρας μπορεί να εκφρασθεί σαν ένας γραμμικός συνδυασμός απλών χαρακτήρων, όπως στην σχέση (2.22).

Αποδεικνύεται ότι ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι μια αναπαράσταση ανάγωγη είναι να ισχύει η σχέση:

$$\sum_{A\in\mathbf{G}}\chi^*(A)\chi(A)=g \quad \text{ή} \quad \sum_\alpha g_\alpha \chi^*_\alpha \chi_\alpha = g \tag{2.24}$$

όπου χ_α ο χαρακτήρας της K_α κλάσης της ομάδας και g_α ο αριθμός των στοιχείων που περιέχει η κλάση K_α .

<u>**ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ:**</u> Για να προσδιορίσει κανείς τις ανάγωγες αναπαραστάσεις μιας ομάδας πρέπει να έχει υπόψη του τα εξής:

1) n=k, δηλ. ο αριθμός των ανάγωγων αναπαραστάσεων μιας ομάδας ισούται με το πλήθος των κλάσεων της. Οι κλάσεις μιας ομάδας βρίσκονται σχετικά εύκολα.

2) $\sum_{i=1}^{n} d_i^2 = g$ δηλ. οι διαστάσεις d_i των ανάγωγων αναπαραστάσεων Γ^i και η τάξη g της ομάδας ικανοποιούν μια αρκετά χρήσιμη σχέση .

3) $\Gamma^{\kappa\alpha\nu}(A)=\sum_{i=1}^{n} d_i \Gamma^i(A) \quad A\in\boldsymbol{G}$ Έτσι η γνώση της κανονικής αναπαράστασης αρκεί για να βρούμε όλες τις ανάγωγες αναπαραστάσεις της ομάδας.

4) $\sum_{i}^{n}\sqrt{\frac{g_\alpha}{g}}\chi_\alpha^{(i)}\sqrt{\frac{g_\beta}{g}}\chi_\beta^{(i)*}=\delta_{\alpha\beta}$

5) $\sum_{\alpha}^{c}\sqrt{\frac{g_\alpha}{g}}\chi_\alpha^{(i)}\sqrt{\frac{g_\beta}{g}}\chi_\beta^{(i)*}=\delta_{ij}$ όπου $\chi_\alpha^{(i)}$ είναι ο χαρακτήρας της ανάγωγης αναπαράστασης i που αντιστοιχεί στην κλάση K_α.

6) $\sum_{A\in\mathbf{G}}\sqrt{\frac{d_i}{g}}\Gamma^{(i)}_{\alpha\beta}(A)\sqrt{\frac{d_i}{g}}\Gamma^{*(j)}_{\gamma\delta}(A)=\delta_{ij}\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}$

7) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{d_i}\sum_{\beta=1}^{d_i}\sqrt{\frac{d_i}{g}}\Gamma^{i}_{\alpha\beta}(A)\sqrt{\frac{d_i}{g}}\Gamma^{*i}_{\alpha\beta}(A')=\delta_{AA'} \quad A\in\boldsymbol{G},\, A'\in\boldsymbol{G}$

Παράδειγμα 1. Έστω ότι η ομάδα ***G*** είναι αβελιανή. Γνωρίζουμε ότι κάθε στοιχείο της αποτελεί κλάση. Επομένως k=g και θα έχουμε:

$$\sum_{i=1}^{g} d_i^{\,2} = g \Rightarrow d_i = 1 \qquad i=1,2,\cdots,g$$

δηλ. *όλες οι ανάγωγες αναπαραστάσεις μιας αβελιανής ομάδας είναι μονοδιάστατες*. Εάν μια αναπαράσταση μιας αβελιανής ομάδας έχει διάσταση μεγαλύτερη της μονάδας, τότε αναγκαστικά είναι αναγώγιμη.

Π.χ. η αβελιανή ομάδα των δυο στοιχείων ***G***={Ε,Α} με A^2=Ε έχει δυο κλάσεις: K_1={Ε}, K_2={Α}και επομένως οι ανάγωγες αναπαραστάσεις είναι δυο. Από την σχέση: $\sum_{i=1}^{g} d_i^{\,2} = g$, για g=2, προκύπτει $d_1^2+d_2^2=2$ με μοναδική λύση $d_1=1$, $d_2=1$. Για μονοδιάστατες αναπαραστάσεις οι χαρακτήρες συμπίπτουν με την ίδια την αναπαράσταση. Έτσι μπορούμε να περιοριστούμε στους χαρακτήρες και να καταρτίσουμε τον παρακάτω πίνακα χαρακτήρων:

Κλάσεις / Χαρακτήρες	{Ε}	{Α}
χ^1	1	α
χ^2	1	β

Γνωρίζουμε ότι στο ταυτοτικό στοιχείο Ε αντιστοιχούμε τον ταυτοτικό πίνακα. Στην προκειμένη περίπτωση, ο ταυτοτικός πίνακας είναι ο αριθμός 1, επειδή πρόκειται για μονοδιάστατη αναπαράσταση. Επομένως η πρώτη στήλη θα συμπληρωθεί με 1. Επίσης, επειδή στις μονοδιάστατες αναπαραστάσεις οι χαρακτήρες ταυτίζονται με τους πίνακες της αναπαραστάσεως, πρέπει να υπακούουν στον πολλαπλασιαστικό πίνακα της ομάδας. Επειδή A^2=Ε, έχουμε σ' αυτήν την περίπτωση $\alpha^2=1$, $\beta^2=1 \;\Rightarrow\; \alpha=\pm1$, $\beta=\pm1$. Έτσι ο πίνακας των χαρακτήρων και οι αντίστοιχες αναπαραστάσεις είναι:

Κλάσεις / Χαρακτήρες	{Ε}	{Α}
χ^1	1	1
χ^2	1	-1

Στοιχεία Ομάδας / Αναπαραστάσεις	Ε	Α
Γ^1	1	1
Γ^2	1	-1

Παρατηρούμε ότι το «χαρακτηριστικό διάνυσμα» (1, 1) είναι ορθογώνιο προς το «χαρακτηριστικό διάνυσμα» (1, -1), όπως περιμέναμε από την εξίσωση:

$$\sum_{\alpha}^{c}\sqrt{\frac{g_\alpha}{g}}\chi_\alpha^{(i)}\sqrt{\frac{g_\beta}{g}}\chi_\beta^{(i)*}=\delta_{ij}$$

Τα χαρακτηριστικά διανύσματα είναι οι γραμμές του παραπάνω αριστερού πίνακα.

Παράδειγμα 2: Εδώ θα ασχοληθούμε με την κυκλική ομάδα ***G***={E, A, A^2} με A^3=E. Η ομάδα αυτή έχει τρεις κλάσεις K_1={E}, K_2={A}, K_3={A^2} και επομένως τρεις μονοδιάστατες αναπαραστάσεις. Από την σχέση: $\sum_{i=1}^{g} d_i^2 = g$, για g=3, προκύπτει $d_1^2+d_2^2+d_3^2=3$. Επειδή το τετράγωνο του δεύτερου στοιχείου A ισούται με το τρίτο στοιχείο A^2, μπορούμε αμέσως να γράψουμε τον πίνακα των χαρακτήρων:

Κλάσεις / Χαρακτήρες	{E}	{A}	{A^2}
χ^1	1	α	α^2
χ^2	1	β	β^2
χ^3	1	γ	γ^2

όπου $\alpha^3=\beta^3=\gamma^3=1$. Οι δυνατές τιμές για τα α, β, γ είναι {1, $e^{2\pi i/3}$ και $e^{4\pi i/3}$} δηλαδή οι κυβικές ρίζες της μονάδας. Τελικά οι αναπαραστάσεις της ομάδας θα δίνονται από τον πίνακα:

Στοιχεία της ομάδας / Αναπαραστάσεις	E	A	A^2
Γ^1	1	1	1
Γ^2	1	ε	ε^2
Γ^3	1	ε^2	ε

όπου ε= $e^{2\pi i/3}$. Τα τρία «χαρακτηριστικά διανύσματα» που προέκυψαν είναι (1, 1, 1), (1, ε, ε^2) και (1, ε^2, ε) και είναι μεταξύ τους ορθογώνια, όπως εύκολα μπορούμε να δούμε.

	Ε	Α	Β	Γ
Ε	Ε	Α	Β	Γ
Α	Α	Ε	Γ	Β
Β	Β	Γ	Ε	Α
Γ	Γ	Β	Α	Ε

***Παράδειγμα 3*:** Για τις ομάδες τάξεως g=4, έχουμε δυο περιπτώσεις: α) την αντίστοιχη κυκλική ομάδα και β) την ομάδα με πολλαπλασιαστικό πίνακα:

α) Για την περίπτωση της κυκλικής ομάδας, τα πράγματα είναι εντελώς ανάλογα με το προηγούμενο παράδειγμα 2. Οι χαρακτήρες θα είναι οι ρίζες τάξεως 4 της μονάδας και ο αντίστοιχος πίνακας δίνεται παρακάτω, όπου $\delta=e^{2\pi i/4}$. Η γενίκευση για μια κυκλική ομάδα τάξεως n είναι προφανής: Οι αναπαραστάσεις των στοιχείων της κυκλικής ομάδας τάξεως g=n θα είναι οι n-οστές ρίζες της μονάδας.

Στοιχεία της ομάδας / Αναπαραστάσεις	Ε	Α	A^2	A^3
Γ^1	1	1	1	1
Γ^2	1	δ	δ^2	δ^3
Γ^3	1	δ^3	δ	δ^2
Γ^4	1	δ^2	δ^3	δ

β) Έστω ***G***={Ε, Α, Β, Γ} η ομάδα τάξεως g=4, που δεν είναι κυκλική. Θα μπορούσαμε και εδώ να εργασθούμε όπως στα προηγούμενα παραδείγματα, πλην όμως θα προτιμήσουμε μια άλλη κομψότερη μέθοδο. Εύκολα μπορούμε να δούμε, από τον πολλαπλασιαστικό πίνακα:

ότι το σύνολο των στοιχείων {Ε, Α} είναι μια υποομάδα και μάλιστα κανονική. Έστω ***H***={Ε,

	Ε	Α	Β	Γ
Ε	Ε	Α	Β	Γ
Α	Α	Ε	Γ	Β
Β	Β	Γ	Ε	Α
Γ	Γ	Β	Α	Ε

Α}. Η αντίστοιχη ομάδα πηλίκο ***R***=***G***/***H*** θα αποτελείται από τα δυο συσύνολα: ***H***={Ε, Α} και {Β, Γ}. Η αναπαράσταση της ομάδας πηλίκο ταυτίζεται με την αναπαράσταση της ομάδας του παραδείγματος 1. Συγκεκριμένα η αναπαράσταση του στοιχείου Ε της ομάδας {Ε, Α}, που θα την συμβολίσουμε με $\boldsymbol{G}_1$, μπορεί να θεωρηθεί σαν αναπαράσταση του ταυτοτικού στοιχείου της ομάδας πηλίκου που είναι το συσύνολο {Ε, Α}=***H***. Η αναπαράσταση τώρα του στοιχείου Α της ομάδας $\boldsymbol{G}_1$={Ε, Α} μπορεί να θεωρηθεί σαν αναπαράσταση του δεύτερου στοιχείου της ομάδας πηλίκου που είναι το συσύνολο {Β, Γ}.

$$\boldsymbol{G}_1=\{\mathrm{E},\ \mathrm{A}\} \longrightarrow \left(\chi(\mathrm{E})=1,\ \ \chi(\mathrm{A})=1\right)$$

$$\boldsymbol{R}=\left\{\{\mathrm{E},\ \mathrm{A}\},\ \{\mathrm{B},\ \Gamma\}\right\} \longrightarrow \left(\chi\left(\{\mathrm{E},\ \mathrm{A}\}\right)=1,\ \ \chi\left(\{\mathrm{B},\ \Gamma\}\right)=1\right)$$

Έτσι έχουμε τις αντιστοιχίες:

1) χ(Ε)=1, χ(Α)=1 → χ($\boldsymbol{H}$)=1, χ({Β, Γ})=1
Από την τελευταία σχέση προκύπτουν οι χαρακτήρες για την αρχική ομάδα $\boldsymbol{G}$={Ε, Α, Β, Γ} και οι οποίοι είναι:

χ(Ε)=1, χ(Α)=1, χ(Β)=1, χ(Γ)=1

2) χ(Ε)=1, χ(Α)=-1 → χ($\boldsymbol{H}$)=1, χ({Β, Γ})=-1
με χαρακτήρες για την αρχική ομάδα $\boldsymbol{G}$:

χ(Ε)=1, χ(Α)=1, χ(Β)=-1, χ(Γ)=-1.

3) Ομοίως η κανονική υποομάδα {Ε, Β} δίνει δυο αντιστοιχίες χαρακτήρων, εκ των οποίων η μια δίνει την τετριμμένη αναπαράσταση, (όλοι οι χαρακτήρες είναι ίσοι με 1), που την συναντήσαμε στην κανονική υποομάδα {Ε, Α}. Η άλλη αντιστοιχία χαρακτήρων είναι:

χ(Ε)=1, χ(Α)=-1, χ(Β)=1, χ(Γ)=-1.

4) Τέλος, η κανονική υποομάδα {Ε, Γ} δίνει μια νέα αντιστοιχία χαρακτήρων:

χ(Ε)=1, χ(Α)=-1, χ(Β)=-1, χ(Γ)=1.

Ο πίνακας των χαρακτήρων τελικά θα είναι:

Στοιχεία της ομάδας / Χαρακτήρες	Ε	Α	Β	Γ
χ^1	1	1	1	1
χ^2	1	1	-1	-1
χ^3	1	-1	1	-1
χ^4	1	-1	-1	1

Ο ίδιος πίνακας αποτελεί και τον πίνακα των αναπαραστάσεων. Και εδώ ικανοποιούνται οι σχέσεις ορθογωνιότητας μεταξύ των χαρακτήρων.

***Παράδειγμα 4*:** Εδώ θα κατασκευάσουμε τον πίνακα χαρακτήρων της μη αβελιανής ομάδας C_{3v} .

Η ομάδα αυτή έχει τρεις κλάσεις:

$$K_1=\{E\}, \quad K_2=\{C_3, C_3^2\}, \quad K_3=\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$$

Άρα υπάρχουν τρεις ανάγωγες αναπαραστάσεις Γ^1, Γ^2 και Γ^3 με διαστάσεις d_1, d_2 και d_3 τέτοιες ώστε:

$$d_1^2+ d_2^2+ d_3^2=6$$

Η μόνη δυνατή λύση είναι $d_1 = d_2 = 1$ και $d_3 = 2$ δηλαδή υπάρχουν δυο μονοδιάστατες ανάγωγες αναπαραστάσεις και μια διδιάστατη.

Αν θέσουμε: $\alpha=1 \rightarrow \{E\}$, $\alpha=2 \rightarrow K_2=\{C_3, C_3^2\}$, $\alpha=3 \rightarrow K_3=\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$

βρίσκουμε ότι:

$$\chi^1(E) = 1, \quad \chi^2(E) = 1 \quad \text{και} \quad \chi^3(E) = 2$$

Επίσης αυθαίρετα διαλέγουμε:

$$\chi^1(K_2) = 1, \quad \chi^1(K_3) = 1.$$

Επίσης $\chi^2(K_2) = +1$

(το σημείο αυτό διαλέγεται επειδή $\chi(C^2{}_3) = \chi(C_3)$ ή $[\chi(C_3)]^2 = \chi(C_3)$ δηλ. $\chi(C_3)=+1$).

Η σχέση ορθογωνιότητας των δυο πρώτων γραμμών δίνει $\chi^2(K_3) = -1$. Έτσι έχουμε:

Κλάσεις / Χαρακτήρες	K_1 $\{E\}$	K_2 $\{C_3, C_3^2\}$	K_3 $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$
χ^1	1	1	1
χ^2	1	1	-1
χ^3	2	β	γ

Οι απροσδιόριστοι συντελεστές προσδιορίζονται από τη σχέση ορθογωνιότητας . Έχουμε

$$\sum_\alpha g_\alpha \chi^1_\alpha \chi^3_\alpha = 0 \Rightarrow 1\cdot 1\cdot 2 + 2\cdot 1\cdot\beta + 3\cdot 1\cdot\gamma = 0$$

$$\sum_\alpha g_\alpha \chi^2_\alpha \chi^3_\alpha = 0 \Rightarrow 1\cdot 1\cdot 2 + 2\cdot 1\cdot\beta + 3\cdot(-1)\cdot\gamma = 0$$

δηλαδή $\beta=-1$, $\gamma=0$

Τελικά ο πίνακας των χαρακτήρων γράφεται:

Κλάσεις / Χαρακτήρες	K_1 $\{E\}$	K_2 $\{C_3, C_3^2\}$	K_3 $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$
χ^1	1	1	1
χ^2	1	1	-1
χ^3	2	-1	0

Στη συνέχεια θα κατασκευάσουμε τον πίνακα των αναγώγων αναπαραστάσεων της ομάδας C_{3v}. Για τις μονοδιάστατες αναπαραστάσεις έχουμε:

$$\Gamma^i = \chi^i(X) \quad X \in G\ , \ i=1, 2$$

Επίσης $\Gamma^3(E)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

Η αναπαράσταση ενός άλλου οποιουδήποτε στοιχείου μπορεί να επιλεγεί υπό διαγώνια μορφή ως προς μια κατάλληλη βάση. (Κάθε μοναδιαίος πίνακας μπορεί να διαγωνοποιοιθεί με μετασχηματισμό ομοιότητας). Ας υποθέσουμε ότι επιλέγουμε σαν τέτοιο έναν από τους πίνακες της τρίτης κλάσης και συγκεκριμένα τον πίνακα $\Gamma(\sigma_1)$. Επειδή ο πίνακας αυτός είναι μοναδιαίος θα πρέπει τα διαγώνια στοιχεία του να έχουν μέτρο μονάδα. Επίσης, επειδή $\chi^3(K_3)=0$ θα έχουν άθροισμα μηδέν δηλαδή:

$$\Gamma(\sigma_1)=\begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 0 & -\alpha\end{bmatrix}$$

Αλλά $\Gamma(\sigma_1)\Gamma(\sigma_1)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ δηλαδή $\alpha^2=1 \Rightarrow \alpha=-1$

Άρα $\Gamma^3(\sigma_1)=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

Επειδή η ομάδα δεν είναι αβελιανή τα υπόλοιπα στοιχεία:

$$\Gamma^3(X),\ X\in G,\quad X\neq E,\ \sigma_1$$

δεν μπορούν να *διαγωνοποιοιθούν ταυτόχρονα.*

Επειδή $\Gamma(\sigma_2)\Gamma(\sigma_2)=\Gamma(E)$ και $\Gamma(\sigma_2)$ μοναδιαίος θα πρέπει

$$\Gamma(\sigma_2)=\Gamma^+(\sigma_2)\qquad \text{(ερμιτιανός πίνακας)}$$

Επίσης ο $\Gamma(\sigma_3)$ είναι ερμιτιανός. Ταυτόχρονα το ίχνος και των δυο είναι μηδέν, όποτε:

$$\Gamma(\sigma_2)=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \beta^* & -\alpha\end{bmatrix}\qquad \Gamma(\sigma_3)=\begin{bmatrix}\gamma & \delta\\ \delta^* & -\gamma\end{bmatrix}$$

θα πρέπει επίσης $|\alpha|^2+|\beta|^2=1$ και $|\gamma|^2+|\delta|^2=1$ ($\Gamma(\sigma_2)$ και $\Gamma(\sigma_3)$ μοναδιαίοι)

Γνωρίζουμε ότι:

$$\Gamma(\sigma_1)+\Gamma(\sigma_2)+\Gamma(\sigma_3)\equiv 0 \quad \text{ή} \quad -1+\alpha+\gamma=0,\ \beta+\delta=0$$

δηλαδή $\gamma=1-\alpha$ $,\delta=-\beta$

Με αναλογία $\Gamma(\sigma_2)=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \beta^* & -\alpha\end{bmatrix}$, $\Gamma(\sigma_3)=\begin{bmatrix}1\text{-}\alpha & -\beta\\ -\beta^* & -1+\alpha\end{bmatrix}$

όπου $|\alpha|^2+|\beta|^2=1$ και $|-\alpha+1|^2+|\beta|^2=1$

Μια από τις παραμέτρους π.χ. η α, μπορεί να επιλεγεί να είναι πραγματική, όποτε

$$|a|^2+|\beta|^2=1 \quad \text{και} \quad (1\text{-}\alpha)^2+|\beta|^2=1\Rightarrow$$

$$(1-\alpha)^2-a^2=0\Rightarrow 1-2a=0\Rightarrow a=+\frac{1}{2}$$

όποτε $|\beta|^2=\dfrac{3}{4}\Rightarrow\beta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}e^{i\varphi}$, φ=αυθαίρετο δηλαδή $\Gamma(\sigma_2)=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\varphi} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\varphi} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$, $\Gamma(\sigma_3)=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\varphi} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\varphi} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Αλλά $\Gamma(C_3)=\Gamma(\sigma_2\sigma_3)=\Gamma(\sigma_2)\Gamma(\sigma_3)=$

$$=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\varphi} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\varphi} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\varphi} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\varphi} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\varphi} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\varphi} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\Gamma(C_3^2)=\Gamma(C_3)\Gamma(C_3)=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\varphi} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\varphi} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\varphi} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\varphi} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\varphi} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\varphi} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Η γωνία φ παραμένει απροσδιόριστη. Τώρα μπορούμε να κατασκευάσουμε τον ακόλουθο πίνακα:

	E	C_3	C_3^2	σ_1	σ_2	σ_3
$\Gamma^1(X)$	1	1	1	1	1	1
$\Gamma^2(X)$	1	1	1	-1	-1	-1
$\Gamma^3(X)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Παράδειγμα 5. Εδώ θα ασχοληθούμε με την περίπτωση της ομάδας C_{4v} των συμμετριών του τετραγώνου. Είδαμε ότι η ομάδα C_{4v} έχει πέντε κλάσεις:

$$K_1=\{E\},\ K_2=\{C_4, C_4^3\},\ K_3=\{C_4^2\},\ K_4=\{m_x, m_y\},\ K_5=\{\sigma_u, \sigma_v\}$$

και επομένως έχει πέντε ανάγωγες αναπαραστάσεις, που θα τις συμβολίσουμε με Γ^1, Γ^2, Γ^3, Γ^4 και Γ^5 με αντίστοιχες διαστάσεις d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 που ικανοποιούν την σχέση:

$$d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2+d_5^2=8$$

Η μόνη δυνατή λύση, (με ακεραίους αριθμούς για τα d_i), είναι όταν τέσσερα από τα d_i είναι ίσα με 1 και το υπόλοιπο με 2. Η διάταξη των d_i δεν έχει σημασία και μπορούμε να θέσουμε $d_1=d_2=d_3=d_4=1$ και $d_5=2$. Μπορούμε στη συνέχεια να κατασκευάσουμε τον πίνακα των χαρακτήρων χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.18):

Κλάσεις / Χαρακτήρες	K_1 {E}	K_2 $\{C_4, C_4^3\}$	K_3 $\{C_4^2\}$	K_4 $\{m_x, m_y\}$	K_5 $\{\sigma_u, \sigma_v\}$
χ^1	1	1	1	1	1
χ^2	1	-1	1	-1	1
χ^3	1	-1	1	1	-1
χ^4	1	1	1	-1	-1
χ^5	2	0	-2	0	0

Η πρώτη σειρά προκύπτει εύκολα γράφοντας 1 για τον χαρακτήρα κάθε κλάσης. Η αντιστοιχία αυτή προκύπτει από την ταυτοτική αναπαράσταση. Επειδή ο πίνακας για το στοιχείο Ε σε οποιαδήποτε αναπαράσταση είναι ο ταυτοτικός πίνακας, το ίχνος του, δηλ. ο χαρακτήρας του, είναι d_i, η διάσταση της αναπαράστασης και έτσι έχουμε την πρώτη στήλη του πίνακα. Για μονοδιάστατες αναπαραστάσεις ο χαρακτήρας ταυτίζεται με την αναπαράσταση και επομένως για τις αναπαραστάσεις $\Gamma^{(1)}$ μέχρι $\Gamma^{(4)}$ οι χαρακτήρες πρέπει να ικανοποιούν τον πολλαπλασιαστικό πίνακα. Για τα στοιχεία των οποίων το τετράγωνο ισούται με το ταυτοτικό στοιχείο Ε, (όπως τα C_4^2, m_x, σ_μ, κ.τ.λ.), οι μόνοι επιτρεπτοί χαρακτήρες είναι ± 1. Ο πολλαπλασιαστικός πίνακας της ομάδας C_{4v} δείχνει ότι $m_x m_y = C_4^2$, (ή $\sigma_u \sigma_v = C_4^2$). Επομένως εάν τα στοιχεία m_x, m_y παρίστανται και τα δυο από +1 ή -1, (ας μη ξεχνάμε ότι τα στοιχεία της ίδιας κλάσης έχουν τον ίδιο χαρακτήρα), τότε το $\chi(C_4^2)$ πρέπει να είναι +1 σ' όλες τις μονοδιάστατες αναπαραστάσεις. Αυτό μας δίνει τους χαρακτήρες του C_4^2 στις αναπαραστάσεις $\Gamma^{(2)}$, $\Gamma^{(3)}$ και $\Gamma^{(4)}$.

Για τα στοιχεία C_4 και C_4^3 με $(C_4)^4=(C_4^3)^4=E$, οι μονοδιάστατες αναπαραστάσεις πρέπει να είναι δυνάμεις[14] του $i=\sqrt{-1}$. Αλλά επειδή $(C_4)^2=(C_4^3)^2=C_4^2$, οι χαρακτήρες $\chi(C_4)$ και $\chi(C_4^2)$ δεν μπορούν παρά να ισούνται με ± 1 για τις αναπαραστάσεις $\Gamma^{(2)}$, $\Gamma^{(3)}$ και $\Gamma^{(4)}$. Τώρα από το θεώρημα της ορθογωνιότητας, κάθε νέα σειρά χαρακτήρων πρέπει να είναι ορθογώνια προς όλες τις προηγούμενες σειρές και πρέπει να ικανοποιούν την συνθήκη κανονικοποιήσεως (2,18). Αυτό μπορεί να γίνει αν θέσουμε +1 για μια από τις κλάσεις C_2, C_4 και C_5 στις αναπαραστάσεις $\Gamma^{(2)}$, $\Gamma^{(3)}$ και $\Gamma^{(4)}$ και -1 για τις υπόλοιπες δυο κλάσεις. Μέχρι εδώ έχουν ορισθεί πλήρως οι πρώτες τέσσερις αναπαραστάσεις. Η πέμπτη σειρά προκύπτει χρησιμοποιώντας απλά τις σχέσεις ορθογωνιότητας, (2.19), για τις στήλες.

Η παραπάνω διαδικασία για την ομάδα C_{4v} είναι αρκετά γενική και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εύρεση των χαρακτήρων μιας τυχαίας πεπερασμένης ομάδας.

Έχοντας βρει τώρα τους χαρακτήρες της ομάδας C_{4v} είναι αρκετά εύκολο να βρούμε τις ανάγωγες αναπαραστάσεις. Οι πρώτες τέσσερις ανάγωγες αναπαραστάσεις ταυτίζονται με τους αντίστοιχους χαρακτήρες, όπως έχουμε πει προηγούμενα. Ο πλήρης πίνακας των ανάγωγων αναπαραστάσεων της ομάδας C_{4v} είναι:

[14] Γενικά εάν η τάξη ενός στοιχείου Α είναι n δηλ. $A^n=E$, οι μόνες μοναδιάστατες αναπαραστάσεις πρέπει να είναι δυνάμεις του $\exp(2\pi i/n)$ εφ' όσον αυτοί είναι οι μόνοι "μοναδιαίοι" αριθμοί αφού οι αντίστροφοι τους συμπίπτουν με τους συζυγείς τους.

	E	C_4	C_4^2	C_4^3	m_x	m_y	σ_u	σ_v
Γ^1	1	1	1	1	1	1	1	1
Γ^2	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1
Γ^3	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1
Γ^4	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
Γ^5	$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

2.10. Ομάδες Πινάκων

Επειδή οι πίνακες παίζουν έναν πολύ βασικό ρόλο στις αναπαραστάσεις των ομάδων γι' αυτό πρέπει να μελετηθούν ξεχωριστά.

Θεωρούμε το σύνολο M(n×n) όλων των ομαλών πινάκων n×n. (Ένας πίνακας λέγεται **ομαλός** ή **μη ιδιάζων**, (**non singular**), εάν έχει ορίζουσα διάφορη του μηδενός, έτσι ώστε να υπάρχει ο αντίστροφος του και επομένως το σύνολο των ομαλών πινάκων να αποτελεί ομάδα ως προς την πράξη του πολλαπλασιασμού των πινάκων). Η ομάδα αυτή είναι πολύ γενική για να είναι χρήσιμη, ενώ ορισμένες υποομάδες της είναι πολύ σημαντικές τόσο στα μαθηματικά όσο και στη φυσική. Οι υποομάδες αυτές ταξινομούνται ως εξής:

Α) **Γενική Γραμμική Ομάδα GL(n)**, (**General Linear Group**). Η ομάδα αυτή χωρίζεται σε δυο κατηγορίες ανάλογα με το αν τα στοιχεία των πινάκων είναι πραγματικοί ή μιγαδικοί αριθμοί:

Α1) **Πραγματική Γενική Γραμμική Ομάδα GL(n,R)**, αποτελείται από όλους τους ομαλούς πίνακες A_{nxn} με πραγματικά στοιχεία. Ο αριθμός των ανεξαρτήτων παραμέτρων κάθε πίνακα είναι n^2, αφού ο μόνος περιορισμός που οφείλουν να ικανοποιούν είναι $\det A \neq 0$.

Α2) **Μιγαδική Γενική Γραμμική Ομάδα GL(n,C)**, αποτελείται από όλους τους ομαλούς πίνακες A_{nxn} με μιγαδικά στοιχεία. Ο αριθμός των ανεξαρτήτων παραμέτρων είναι $2n^2$.

Β) **Ειδική Γραμμική Ομάδα SL(n)**, (**Special Linear Group**). Χωρίζεται σε δυο κατηγορίες:

Β1) **Πραγματική Ειδική Γραμμική Ομάδα SL(n,R)**. Αποτελείται από τους ομαλούς πίνακες με πραγματικά στοιχεία των οποίων η ορίζουσα είναι +1. Ο αριθμός των ανεξαρτήτων παραμέτρων είναι n^2-1.

Β2) **Μιγαδική Ειδική Γραμμική Ομάδα SL(n,C)**, Αποτελείται από τους ομαλούς πίνακες με μιγαδικά στοιχεία των οποίων η ορίζουσα είναι +1. Ο αριθμός των ανεξαρτήτων παραμέτρων είναι $2(n^2-1)$.

Οι ειδικές γραμμικές ομάδες ονομάζονται και **μονομήκεις**, (**unimodular**).

Γ) **Μοναδιαία Ομάδα U(n)**, (**Unitary Group**) Αποτελείται από τους μοναδιαίους, (unitary), πίνακες που διατηρούν το εσωτερικό γινόμενο δυο διανυσμάτων και κατά συνέπεια το μέτρο ενός διανύσματος, στον μιγαδικό χώρο, δηλ. $U^{+}U=E$ Η σχέση αυτή γράφεται:

$$\sum_{k=1}^{n} U^{*}_{ik}U_{kj}=\delta_{ij} \quad ή \quad \sum_{k=1}^{n} U_{ik}U^{*}_{jk}=\delta_{ij}$$

από την οποία συμπεραίνουμε ότι:

α) οι παράμετροι της ομάδας U(n) είναι φραγμένες $|U_{ij}|<1$

β) ο αριθμός των ανεξαρτήτων παραμέτρων είναι $2n^2-n-2\binom{n}{2}=n^2$

Δ) **Ειδική Μοναδιαία Ομάδα SU(n)**. Αποτελείται από τους πίνακες U(n) με ορίζουσα detU=+1. Ο αριθμός των ανεξαρτήτων παραμέτρων είναι n^2 -1

Ε) **Ορθογώνια Ομάδα O(n)**. Αποτελείται από το σύνολο των πινάκων O που ικανοποιούν την σχέση: $O^{t}O=E$. Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:

Ε1) Τα στοιχεία των πινάκων είναι πραγματικοί αριθμοί. Τότε η ομάδα συμβολίζεται με **O(n,R)** και ο αριθμός των ανεξαρτήτων παραμέτρων είναι:

$$n^2-n-\binom{n}{2}=n(n-1)/2$$

Ε2) Τα στοιχεία των πινάκων είναι μιγαδικοί αριθμοί. Τότε η ομάδα συμβολίζεται με **O(n,C)** και ο αριθμός των ανεξαρτήτων παραμέτρων είναι:

$$2n^2-2n-2\binom{n}{2}=n(n-1)$$

Για την ορθογώνια ομάδα, επειδή ισχύει $\det O^{t}=\det O$ και $O^{t}O=E$, έπεται ότι $\det O=\pm 1$, δηλ. η ομάδα αυτή χωρίζεται σε δυο υποσύνολα και δεν μπορούμε να πάμε από το ένα στο άλλο κατά συνεχή τρόπο.

ΣΤ) **Ειδική Ορθογώνια υποομάδα SO(n)**. Αποτελείται από τους ορθογώνιους πίνακες με ορίζουσα +1. Χωρίζεται στις εξής δυο υποομάδες:

ΣΤ1) **Ειδική Μιγαδική Ορθογώνια υποομάδα SO(n,C)**. Αποτελείται από το σύνολο των ορθογωνίων πινάκων O(n,C) με στοιχεία μιγαδικούς αριθμούς και ορίζουσα +1 και αποτελεί μια υποομάδα της O(n,C) με αριθμό ανεξαρτήτων παραμέτρων n(n-1)-1.

ΣΤ2) **Ειδική Πραγματική Ορθογώνια υποομάδα SO(n,R)**. Αποτελείται από το σύνολο των ορθογωνίων πινάκων με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς και ορίζουσα +1 και αποτελεί μια υποομάδα της O(n,R), με αριθμό ανεξαρτήτων παραμέτρων n(n-1)/2-1.

Οι ορθογώνιοι πίνακες με ορίζουσα -1 δεν αποτελούν ομάδα, διότι δεν περιέχουν τον ταυτοτικό πίνακα.

Οι ορθογώνιοι πίνακες O(n,R) διατηρούν το εσωτερικό γινόμενο σ' ένα πραγματικό διανυσματικό χώρο, διότι $\langle Ox|Oy\rangle=\langle x|O^{t}Oy\rangle=\langle x|y\rangle$. Άμεση συνέπεια είναι ότι αφήνουν αναλλοίωτη την ευκλείδεια απόσταση : $\langle x|x\rangle=\Sigma x_i^2$. Ανάλογη ιδιότητα δεν έχουν οι μιγαδικοί πίνακες O(n,C).

Πριν προχωρήσουμε στην επόμενη ομάδα των πινάκων, θα αναφερθούμε σε ορισμένες έννοιες από την γραμμική άλγεβρα.

Θεωρούμε έναν διανυσματικό χώρο V επί του σώματος F. Μια απεικόνιση της μορφής:

$< | >: V\times V \to F$ με την ιδιότητα

$$(\forall x,y,z\in V)(\forall \alpha,\beta\in F)\Big[<\alpha x+\beta y|z>=\alpha<x|z>+\beta<y|z> \text{ και } <x|\alpha y+\beta z>=\alpha<x|y>+\beta<x|z>\Big]$$

ονομάζεται **διγραμμική μορφή**, (**bilinear form**),. Εάν $B=\{...,e_i,...\}$ είναι μια βάση του διανυσματικού χώρου V και $g_{ij}=<e_i|e_j>$, τότε:

$$<x|y>=\left\langle \sum_i x_i e_i \middle| \sum_j y_j e_j \right\rangle = \sum_i\sum_j x_i y_j \langle e_i | e_j \rangle = \sum_i\sum_j x_i y_j g_{ij} = x^t g y$$

δηλ. η διγραμμική μορφή ορίζεται πλήρως αν δοθούν τα στοιχεία g_{ij}, που αποτελούν τον πίνακα g της διγραμμικής μορφής. Εάν ο πίνακας g είναι ο ταυτοτικός πίνακας E, τότε η αντίστοιχη διγραμμική μορφή δίνει το γνωστό ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο.

Μια διγραμμική μορφή λέγεται **συμμετρική** και θα την συμβολίζουμε με $< | >_\sigma$ και g_σ τον αντίστοιχο πίνακα εάν

$$(\forall x,y\in V)\Big[<x|y>_\sigma=<y|x>_\sigma \Big] \quad \text{ή ισοδύναμα } g_\sigma=g_\sigma^t$$

και **αντισυμμετρική** που θα την συμβολίζουμε με $< | >_\alpha$ και g_α τον αντίστοιχο πίνακα εάν

$$(\forall x,y\in V)\Big[<x|y>_\alpha=-<y|x>_\alpha \Big] \quad \text{ή ισοδύναμα } g_\alpha=-g_\alpha^t$$

στην τελευταία περίπτωση η διάσταση του διαν. χώρου V πρέπει να είναι άρτιος αριθμός. Παράδειγμα αντισυμμετρικής διγραμμικής μορφής είναι αυτή που αντιστοιχεί στον πίνακα:

$$g=\begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix} \quad \text{όπου } E_n \text{ ο ταυτοτικός } n\times n \text{ πίνακας}$$

με $<x|y>_\alpha=(x^1y^{n+1}-x^{n+1}y^1)+(x^2y^{n+2}-x^{n+2}y^2)+...+(x^2y^{2n}-x^{2n}y^n)=x^tgy$

Ένας τελεστής T, που επιδρά πάνω σ' έναν διαν. χώρο V εφοδιασμένο με μια διγραμμική μορφή < | >, θα λέγεται:

1) **ορθογώνιος** αν η διγραμμική μορφή είναι συμμετρική και ο τελεστής T ικανοποιεί την σχέση:

$<Tx|Ty>_\sigma=<x|y>_\sigma \quad \forall x,y\in V$

δηλ. αφήνει αναλλοίωτη την διγραμμική μορφή:

2) **συμπλεκτικός** αν η διγραμμική μορφή είναι αντισυμμετρική και ο τελεστής T ικανοποιεί την σχέση:

$<Tx|Ty>_\alpha=<x|y>_\alpha \quad \forall x,y\in V$

Σ' ένα χώρο, στον οποίο έχουμε ορίσει μια αντισυμμετρική μορφή, μπορούμε να βρούμε μια βάση $B=\{e_1,e_2,...,e_n,e_{-1},e_{-2},...,e_{-n}\}$, η οποία ονομάζεται **υπερβολική**, τέτοια ώστε:

$<e_i|e_j>_\alpha=<e_{-i}|e_{-j}> =0$, $<e_i|e_j>_\alpha=\delta_{ij}$

Χρησιμοποιώντας μια υπερβολική βάση, μια αντισυμμετρική διγραμμική μορφή μπορεί να παρασταθεί από τον πίνακα:

$$J=\begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix} \quad \text{όπου } E_n \text{ ο n ταυτοτικός πίνακας}$$

και θα έχουμε $<x|y>_\alpha=x^tJy$. Τότε ένας τελεστής T είναι συμπλεκτικός εάν ισχύει $T^tJT=J$, όπου E ο 2n ταυτοτικός τελεστής. Πράγματι, έστω x,y δυο τυχαία διανύσματα, $<\ |\ >_\alpha$ μια αντισυμμετρική διγραμμική μορφή και T ένας συμπλεκτικός τελεστής, τότε θα έχουμε

$$<Tx|Ty>_\alpha=<x|y>_\alpha \Rightarrow (Tx)^tJ(Ty)=x^tJy \Rightarrow x^t(T^tJT)y=x^tJy \Rightarrow T^tJT=J$$

Επειδή σε κάθε τελεστή T αντιστοιχεί ως προς μια βάση B ένας πίνακας, οι παραπάνω τελεστές χαρακτηρίζουν και τους αντίστοιχους πίνακες. Έτσι έχουμε την εξής ομάδα πινάκων:

Z) **Συμπλεκτική ομάδα**. Αποτελείται από τους πίνακες που αφήνουν αναλλοίωτη μια αντισυμμετρική διγραμμική μορφή. Εάν για μια αντισυμμετρική μορφή χρησιμοποιήσουμε την αντίστοιχη υπερβολική βάση, τότε ένας πίνακας M είναι συμπλεκτικός εάν έχουμε:

$$<Mx|My>_\alpha=<x|y>_\alpha=xJy$$

Οι πίνακες αυτές επιδρούν μόνο σε χώρους άρτιας διάστασης και χωρίζονται σε δυο υποομάδες $\mathbf{S_p(2n,R)}$ και $\mathbf{S_p(2n,C)}$ για πραγματικούς και μιγαδικούς χώρους αντίστοιχα. Ο αριθμός των ανεξαρτήτων παραμέτρων είναι:

$$(2n)^2-\binom{2n}{2}=n(2n+1) \qquad \text{για την } S_p(2n,R)$$

$$2(2n)^2-2\binom{2n}{2}=2n(2n+1) \qquad \text{για την } S_p(2n,C)$$

Οι πίνακες M της συμπλεκτικής ομάδας $S_p(2n)$ ικανοποιούν την σχέση $T^tMT=E$ με T οποιοδήποτε πίνακα και E ο ταυτοτικός πίνακας.

Εαν οι συνιστώσες των διανυσμάτων x και y είναι:

$$x=(x_1,x_2,\ldots,x_n,x_{-1},x_{-2},\ldots,x_{-n}) \quad \text{και}$$

$$y=(y_1,y_2,\ldots,y_n,y_{-1},y_{-2},\ldots,y_{-n})$$

τότε η έκφραση:

$$xJy=\sum_{i=1}^{n}\left(x_iy_{-i}-x_{-i}y_i\right) \quad \text{είναι αναλλοίωτη}$$

Η συμπλεκτική ομάδα παίζει ένα σημαντικό ρόλο στη γεωμετρία του φασικού χώρου της κλασικής μηχανικής. Πράγματι, ένας μετασχηματισμός συντεταγμένων

$$\tilde{x}_i=X_i(x,p) \ , \ \tilde{p}_i=P_i(x,p)$$

είναι συμπλεκτικός όταν διατηρεί την αγκύλη Poisson {, }, δηλ.

$$\{F,G\}_{\tilde{x},\tilde{p}}=\sum_i\left(\frac{\partial F}{\partial \tilde{x}_i}\frac{\partial G}{\partial \tilde{p}_i}-\frac{\partial F}{\partial \tilde{p}_i}\frac{\partial G}{\partial \tilde{x}_i}\right)=\sum_i\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial G}{\partial p_i}-\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial x_i}\right)=\{F,G\}_{x,p}$$

3. ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΟΜΑΔΕΣ

Στα προηγούμενα κεφάλαια ασχοληθήκαμε με τις πεπερασμένες ομάδες. Μια άλλη κατηγορία ομάδων με μεγάλο ενδιαφέρον και με σημαντικές εφαρμογές είναι οι **άπειρες ομάδες**, των οποίων το πλήθος των στοιχείων είναι άπειρο. Εδώ διακρίνουμε δυο κατηγορίες:

Α) τις **διακεκριμένες ομάδες**, (το πλήθος των στοιχείων είναι άπειρο αλλά αριθμήσιμο) και

Β) τις **συνεχείς ομάδες**, (το πλήθος των στοιχείων είναι άπειρο αλλά μη αριθμήσιμο).

Η θεωρία των πεπερασμένων ομάδων ισχύει εξ' ίσου καλά και στην περίπτωση των διακεκριμένων ομάδων. Όταν όμως ασχολούμαστε με τις συνεχείς ομάδες, τότε κάποιες τροποποιήσεις πρέπει να γίνουν. Επί πλέον κάποιες καινούργιες έννοιες πρέπει να ορισθούν, με τις οποίες θα μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε τα εργαλεία άλλων κλάδων των μαθηματικών, όπως ανάλυσης, τοπολογίας κ.α.

3.1 Πεπερασμένες συνεχείς ομάδες

Τα στοιχεία μιας συνεχούς ομάδας μπορούν να χαρακτηρισθούν από ένα σύνολο πραγματικών παραμέτρων $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$, των οποίων μια τουλάχιστον μεταβάλλεται κατά συνεχή τρόπο σ' ένα ορισμένο διάστημα. Το σύνολο των παραμέτρων πρέπει να είναι ικανό και αναγκαίο για να προσδιορίσει όλα τα στοιχεία της ομάδας. Έστω r, ($1\leq r\leq n$) το πλήθος των συνεχών παραμέτρων. Εάν ο αριθμός αυτός είναι πεπερασμένος, τότε η συνεχής ομάδα λέγεται **πεπερασμένη συνεχής ομάδα** και το r ονομάζεται **τάξη της συνεχούς ομάδας**. (Στην περίπτωση πεπερασμένης ομάδας, τάξη ονομάζεται το πλήθος των στοιχείων της).

Παράδειγμα 1: Το σύνολο R όλων των πραγματικών αριθμών αποτελεί μια συνεχή ομάδα, (με πράξη εσωτερικής συνθέσεως την πρόσθεση), τάξης 1, διότι κάθε πραγματικός αριθμός x μπορεί να προσδιοριστεί από μια παράμετρο, που είναι το ίδιο το x και που παίρνει τιμές στο διάστημα $[-\infty,+\infty]$. Οι πίνακες: $M_\alpha=\begin{pmatrix}1 & \alpha\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\alpha\in R$ αποτελούν ομάδα και ικανοποιούν την σχέση: $M_\alpha M_\beta=M_{\alpha+\beta}$. Η ομάδα αυτή είναι ισομορφική προς την ομάδα R των πραγματικών αριθμών και αποτελεί μια αναπαράσταση πινάκων 2×2 της R.

Παράδειγμα 2: Θεωρούμε ένα γραμμικό μετασχηματισμό από μια μεταβλητή x στην μεταβλητή x′ της μορφής:

$$x'=\alpha x+\beta\ ,\quad \alpha,\beta\in R \quad \alpha\neq 0 \tag{3.1}$$

Το σύνολο όλων αυτών των μετασχηματισμών είναι μια 2-παραμετρική ομάδα, (δηλ. μια συνεχής ομάδα τάξης 2), της οποίας τα στοιχεία μπορούν συμβολικά να παρασταθούν με Τ(α,β) έτσι ώστε:

$$T(\alpha,\beta)x=x'=\alpha x+\beta \tag{3.2}$$

Ο νόμος της εσωτερικής συνθέσεως προκύπτει ως εξής:

$$T(\alpha_1, \beta_1)T(\alpha_2, \beta_2)x=T(\alpha_1, \beta_1)(\alpha_2 x+\beta_2)=\alpha_1(\alpha_2 x+\beta_2)+\beta_1=\alpha_1\alpha_2 x+\alpha_1\beta_2+\beta_1 \qquad (3.3)$$

έτσι ώστε:

εάν $$T(\alpha_3, \beta_3)\equiv T(\alpha_1, \beta_1)T(\alpha_2, \beta_2)=T(\alpha_1\alpha_2, \alpha_1\beta_2+\beta_1) \qquad (3.4\alpha)$$

$$\alpha_3=\alpha_1\alpha_2 \ , \quad \beta_3=\alpha_1\beta_2+\beta_1 \qquad (3.4\beta)$$

Το ουδέτερο στοιχείο προφανώς είναι το T(1,0), το δε αντίστροφο, (συμμετρικό), του T(α,β) βρίσκεται ως εξής:

έστω $$T(\gamma,\delta)\equiv T^{-1}(\alpha,\beta) \qquad (3.5\alpha)$$

τότε $$T(\gamma,\delta)T(\alpha,\beta)x=x \Rightarrow T(\gamma,\delta)(\alpha x+\beta)=x \Rightarrow \gamma(\alpha x+\beta)+\delta=x \Rightarrow$$

$$\alpha\gamma=1 \text{ και } \gamma\beta+\delta=0 \Rightarrow$$

$$\gamma=1/\alpha \ , \quad \delta=-\beta/\alpha \qquad (3.5\beta)$$

Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα:

$$[T(\alpha_1,\beta_1)\ T(\alpha_2,\beta_2)]\ T(\alpha_3,\beta_3)=T(\alpha_1,\beta_1)[\ T(\alpha_2,\beta_2)\ T(\alpha_3,\beta_3)]$$

Πρέπει να σημειώσουμε ότι τα α_3 και β_3 είναι αναλυτικές συναρτήσεις των α_1, β_1, α_2, β_2 στη σχέση (3.4β), όπως και τα γ και δ είναι αναλυτικές συναρτήσεις των α και β στη σχέση (3.5β).

Παράδειγμα 3: Θεωρούμε το σύνολο όλων των μετατοπίσεων σ' ένα τρισδιάστατο πραγματικό διανυσματικό χώρο της μορφής:

$$x'=x+\alpha \ , \quad y'=y+\beta \ , \quad z'=z+\gamma \qquad (3.6)$$

Εάν συμβολίσουμε τις παραπάνω μετατοπίσεις με T(α,β,γ), τότε το σύνολο αυτό είναι μια 3-παραμετρική συνεχής ομάδα με νόμο εσωτερικής συνθέσεως την πρόσθεση των μετατοπίσεων:

$$T(\alpha_3,\beta_3,\gamma_3)= T(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)+T(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1), \text{ όπου } \alpha_3 =\alpha_1+\alpha_2,\ \beta_3=\beta_1+\beta_2,\ \gamma_3=\gamma_1+\gamma_2$$

Το ουδέτερο στοιχείο είναι το T(0,0,0) και το αντίστροφο του T(α,β,γ) είναι το T(-α,-β,-γ).

Παράδειγμα 4: Θεωρούμε ένα γραμμικό ομογενή μετασχηματισμό δυο μεταβλητών της μορφής:

$$x'=\alpha_{11}x+\alpha_{12}y \ , \quad y'=\alpha_{21}x+\alpha_{22}y \qquad (3.7)$$

ή υπό διανυσματική μορφή:

$$\mathbf{r}'=\mathbf{A}\mathbf{r} \quad ή \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad (3.8)$$

με $$\det\mathbf{A}=|\alpha_{ij}|\neq 0 \qquad (3.9)$$

Το σύνολο όλων αυτών των μετασχηματισμών, που προκύπτουν από όλες τις δυνατές τιμές των α_{ij} με τον περιορισμό (3.9) αποτελεί μια 4-παραμετρική συνεχή ομάδα, γνωστή σαν **γενική γραμμική ομάδα** δυο διαστάσεων και συμβολίζεται με GL(2,R).

Παράδειγμα 5: Θεωρούμε ένα γραμμικό ομογενή μετασχηματισμό n μεταβλητών, (μια γενίκευση του παραδείγματος 4):

$$x_i' = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \quad 1 \le i \le n \quad |\alpha_{ij}| \ne 0$$

Το σύνολο όλων αυτών των μετασχηματισμών αποτελεί μια n^2-παραμετρική συνεχή ομάδα, γνωστή σαν γενική γραμμική ομάδα n διαστάσεων και συμβολίζεται με GL(n,R).

Παράδειγμα 6: Το σύνολο όλων των περιστροφών γύρω από έναν άξονα αποτελεί μια συνεχή ομάδα τάξης 1, της οποίας η παράμετρος είναι η γωνία περιστροφής θ, που παίρνει τιμές στο διάστημα [-π,π] ή [0,2π]. Η ομάδα αυτή ονομάζεται **ειδική ορθογώνια ομάδα** και συμβολίζεται με SO(2,R). Εάν ο άξονας περιστροφής είναι ο OZ, τότε τα στοιχεία της ομάδας δίνονται από την σχέση:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

***Παράδειγμα** 7*: Το σύνολο όλων των περιστροφών γύρω από όλους τους άξονες, που διέρχονται από ένα σταθερό σημείο του χώρου των τριών διαστάσεων, αποτελεί ομάδα, της οποίας τα στοιχεία χαρακτηρίζονται από τις γωνίες Euler α, β, γ. Η ομάδα αυτή συμβολίζεται με SO(3,R), τα δε στοιχεία της μπορούν να παρασταθούν από τους πίνακες:

$$R(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \sin\alpha\sin\gamma & \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma + \sin\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\sin\beta \\ -\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos\alpha\sin\gamma & -\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma & -\sin\alpha\sin\beta \\ -\sin\beta\cos\gamma & -\sin\beta\sin\gamma & \cos\beta \end{pmatrix}$$

Με τις ομάδες SO(2), SO(3) όπως και με τις SU(2), SU(3) θα ασχοληθούμε σε επόμενη παράγραφο.

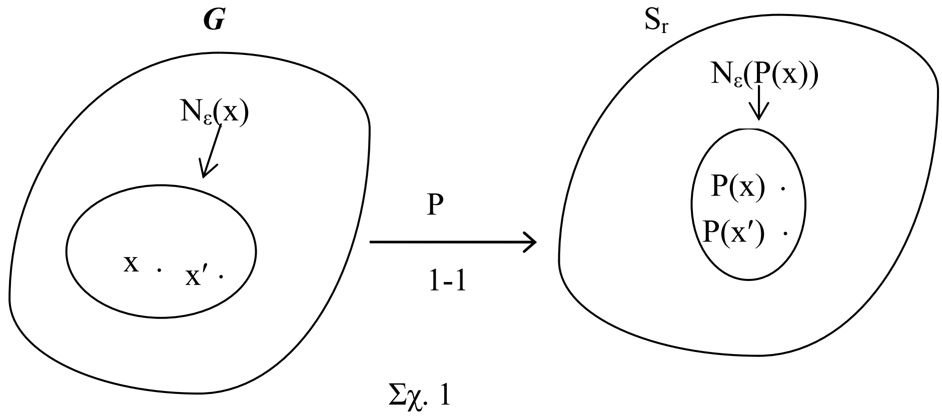
3.2 Τοπολογικές ομάδες.

Επειδή η μετάβαση από ένα στοιχείο μιας συνεχούς ομάδας σ' ένα άλλο γίνεται κατά συνεχή τρόπο, είναι επιθυμητό, (ίσως και επιβεβλημένο), να εισάγουμε μια τοπολογία στην ομάδα έτσι ώστε να μπορούμε να μιλάμε για την συνέχεια του νόμου εσωτερικής συνθέσεως, θεωρώντας τον σαν απεικόνιση δυο μεταβλητών. Για απλότητα θα περιοριστούμε σε ομάδες των οποίων τα στοιχεία μπορούν να τεθούν σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία με τα σημεία ενός υποσυνόλου S_r ενός r-διάστατου πραγματικού χώρου R^r εσωτερικού γινομένου από το οποίο ορίζεται μια norm $\|\cdot\cdot\|$. Το υποσύνολο S_r θα ονομάζεται **παραμετρικός χώρος** .

Έστω P(x) το σημείο του S_r, που αντιστοιχεί στο στοιχείο x της ομάδας ***G***, δηλ. η εικόνα του x, Σχ. 1.

Θεωρούμε τώρα μια ε-περιοχή[(15] $N_\varepsilon(P(x))$ του σημείου P(x) στο S_r, δηλ.

[(15] ή ε-γειτονιά, όπως λέγεται στην ορολογία της τοπολογίας



Σχ. 1

$$N_\varepsilon(P(x))=\left\{P(x')\in S_r \,/\, \|P(x')-P(x)\|<\varepsilon\right\} \qquad (3.11)$$

όπως και μια ε-περιοχή $N_\varepsilon(x)$ του στοιχείου x:

$$N_\varepsilon(x)=\left\{x'\in \boldsymbol{G} \,/\, \|P(x')-P(x)\|<\varepsilon\right\} \qquad (3.12)$$

Μπορούμε τώρα να ορίσουμε την συνέχεια του νόμου εσωτερικής συνθέσεως όπως και την συνέχεια της αντιστροφής των στοιχείων της ομάδας. Θεωρούμε την σύνθεση των στοιχείων x_1 και x_2:

$$x_1x_2=x_3 \qquad (3.13)$$

Ο νόμος εσωτερικής συνθέσεως λέγεται **συνεχής ως προς** x_2 εάν:

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)\left[x\in N_\delta(x_2)\rightarrow x_1x\in N_\varepsilon(x_3)\right] \qquad (3.14)$$

δηλ. $$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)\left[\|P(x)-P(x_2)\|<\delta\rightarrow \|P(x_1x)-P(x_3)\|<\varepsilon\right] \qquad (3.15)$$

Με όμοιο τρόπο ορίζεται η συνέχεια του νόμου συνθέσεως ως προς x_1.

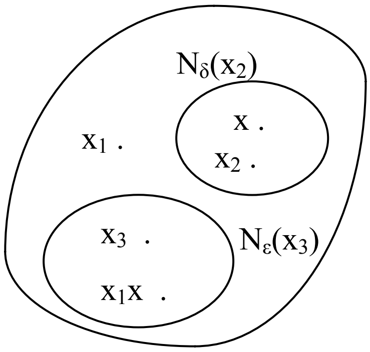
Η διαισθητική ερμηνεία των παραπάνω σχέσεων είναι η εξής: Μια μικρή αλλαγή στους παράγοντες του γινομένου x_1x_2 επιφέρει μικρή αλλαγή στο αποτέλεσμα x_3, Σχ. 2.

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε την συνέχεια της αντιστροφής των στοιχείων της ομάδας:

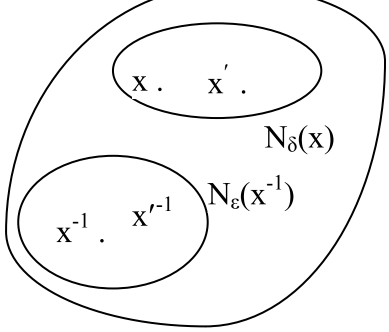
$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)\left[x'\in N_\delta(x)\rightarrow x'^{-1}\in N_\varepsilon(x^{-1})\right]$$

με την διαισθητική ερμηνεία ότι μια μικρή μεταβολή στο στοιχείο x επιφέρει μικρή μεταβολή στο αντίστροφο στοιχείο x^{-1}, Σχ. 3.

Σαν **τοπολογική ομάδα** ορίζουμε τώρα μια ομάδα στην οποία οι νόμοι της εσωτερικής



Σχ. 2



Σχ. 3

συνθέσεως και της αντιστροφής των στοιχείων είναι συνεχείς απεικονίσεις[16].

3.3 Συνεκτική και Συμπαγής ομάδα

Θεωρούμε δυο τυχαία στοιχεία x_1 και x_2 μιας τοπολογικής ομάδας $\boldsymbol{G}$ με εικόνες $P(x_1)$ και $P(x_2)$ στον παραμετρικό χώρο S_r . Εάν μπορούμε να συνδέσουμε τα σημεία $P(x_1)$ και $P(x_2)$ με μια καμπύλη, που κείται εξ' ολοκλήρου στον παραμετρικό χώρο S_r, τότε ο παραμετρικός χώρος λέγεται **συνεκτικός**, διαφορετικά λέγεται **μη συνεκτικός**.

Έστω $\boldsymbol{G}$ μια ομάδα, της οποίας ο παραμετρικός χώρος είναι συνεκτικός και θεωρούμε μια καμπύλη C, που συνδέει τα σημεία $P(x_1)$ και $P(x_2)$. Το σύνολο των στοιχείων x της $\boldsymbol{G}$, των οποίων οι εικόνες P(x) είναι σημεία της καμπύλης C, θα ονομάζεται **καμπύλη που συνδέει τα στοιχεία** x_1 και x_2 .

Μια ομάδα $\boldsymbol{G}$ λέγεται **συνεκτική ομάδα** εάν για δυο δεδομένα στοιχεία της $\boldsymbol{G}$ υπάρχει μια καμπύλη, που συνδέει τα δυο αυτά στοιχεία, δηλ. όταν ο παραμετρικός χώρος είναι συνεκτικός.

Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι η ιδιότητα της συνεκτικότητας είναι διαφορετική από την συνέχεια της ομάδας, η οποία εξαρτάται από την συνεχή μεταβολή μιας ή περισσοτέρων παραμέτρων της ομάδας. Έτσι μια συνεχής ομάδα μπορεί να μην είναι συνεκτική. Και αυτό συμβαίνει όταν ο παραμετρικός χώρος είναι μη συνεκτικός, όταν π.χ. αποτελείται από δυο ή περισσότερα διακεκριμένα υποσύνολα έτσι ώστε κάθε υποσύνολο να είναι συνεκτικό αλλά να μην μπορούμε να πάμε από το ένα υποσύνολο στο άλλο χωρίς να βγούμε έξω από τον παραμετρικό χώρο.

Μια συνεχής συνεκτική ομάδα λέγεται **πολλαπλά συνεκτική** αν υπάρχουν κλειστές καμπύλες στον παραμετρικό χώρο S_r, οι οποίες δεν μπορούν να συσταλούν και να εκφυλιστούν σε σημείο χωρίς να εγκαταλείψουν τον χώρο ή ισοδύναμα όταν υπάρχουν καμπύλες οι οποίες δεν μπορούν να παραμορφωθούν κατά συνεχή τρόπο για να συμπέσουν. Αυτό, διαισθητικά, συμβαίνει όταν ο χώρος περιέχει κενά. Εάν τα κενά είναι σε πλήθος k, τότε ο χώρος λέγεται **k-πολλαπλά συνεκτικός**.

Εάν μια τοπολογική ομάδα έχει r συνεχείς παραμέτρους και n-r διακεκριμένες, ο παραμετρικός της χώρος S_r θα αποτελείται από n-r διακεκριμένους υποχώρους. Στην περίπτωση αυτή και η ομάδα $\boldsymbol{G}$ θα αποτελείται από n-r διακεκριμένα υποσύνολα, τα οποία βρίσκονται σε αμφιμονοσύμαντη αντιστοιχία με τους n-r διακεκριμένους υποχώρους του S_r. Τις αναλυτικές ιδιότητες της ομάδας τις μελετάμε μόνο στο υποσύνολο της ομάδας που περιέχει το ουδέτερο στοιχείο.

Τέλος, μια τοπολογική ομάδα λέγεται **συμπαγής** αν ο παραμετρικός χώρος της είναι

---

[16] Πιο αυστηρά, σαν **τοπολογική ομάδα** ορίζουμε ένα σύνολο $\boldsymbol{G}$ τέτοιο ώστε:

α) Το $\boldsymbol{G}$ είναι ομάδα

β) Το $\boldsymbol{G}$ είναι τοπολογικός χώρος

γ) Οι απεικονίσεις: i) $f:\boldsymbol{G}\to\boldsymbol{G}$, $f: x\to f(x)=x^{-1}$, ii) $h:\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{G}\to\boldsymbol{G}$, $h: (x,y)\to h(x,y)=xy$

να είναι συνεχείς ως προς την τοπολογία που ορίζει ο τοπολογικός χώρος.

συμπαγής χώρος, δηλ. κλειστός και φραγμένος[17].

3.4 Lie-ομάδες

Η εξάρτηση των στοιχείων x_1, x_2, κ.λ.π. μιας τοπολογικής ομάδας ***G*** από τις r συνεχείς παραμέτρους μπορεί να γραφεί αναλυτικά:

$$x_1 \equiv x_1(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r)\,,\quad x_2 \equiv x_2(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_r)\quad \text{κ.λ.π.}$$

Έστω $$x_1x_2 = x_3 \equiv x_3(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_r)\ \text{ και }\ x_1^{-1} = x_4 \equiv x_4(\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_r)$$

Οι παράμετροι των x_3 και x_4 μπορούν να εκφραστούν σαν συναρτήσεις των παραμέτρων των x_1 και x_2, δηλ.:

$$\gamma_i \equiv \gamma_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_r\,;\beta_1,\ldots,\beta_r)$$

$$\delta_i \equiv \delta_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_r) \qquad\qquad i=1,\ldots,r \tag{3.17}$$

Μια τοπολογική ομάδα ***G*** ονομάζεται **Lie-ομάδα r διαστάσεων** αν υπάρχει μια γειτονιά N του ουδέτερου στοιχείου e έτσι ώστε οι συνεχείς παράμετροι του γινομένου δυο στοιχείων και οι παράμετροι του αντιστρόφου ενός στοιχείου της N να είναι συνεχείς διαφορίσιμες συναρτήσεις των παραμέτρων των στοιχείων, (δηλαδή αναλυτικές συναρτήσεις). Πιο συγκεκριμένα τα γ_i και δ_i των σχέσεων (3.17) είναι αναλυτικές συναρτήσεις των α_i και β_i για στοιχεία της γειτονιάς N, με την προϋπόθεση τα x_3, $x_4 \in N$ όταν x_1, $x_2 \in N$.

Για απλότητα και χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να επιλέξουμε τις συνεχείς παραμέτρους μιας Lie-ομάδας έτσι ώστε η εικόνα του ουδέτερου στοιχείου e της ομάδας να είναι η αρχή των αξόνων του παραμετρικού χώρου:

$$e \equiv x(0,0,\ldots,0).$$

Με αυτή την παραμετρικοποίηση, ένα στοιχείο x, γειτονικό του ταυτοτικού, μπορεί ν' αναπτυχθεί σε σειρά Taylor γύρω από την αρχή, και αυτό μπορεί να γίνει χάρη των αναλυτικών ιδιοτήτων της Lie-ομάδας ως εξής:

$$x(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r) = x(0,0,\ldots,0) +$$

$$+\sum_{\kappa=1}^{r}\alpha_\kappa\left(\frac{\partial x}{\partial\alpha_\kappa}\right)_{\alpha_\kappa=0} + \frac{1}{2}\sum_{\kappa=1}^{r}\sum_{\lambda=1}^{r}\alpha_\kappa\alpha_\lambda\left(\frac{\partial x}{\partial\alpha_\kappa}\right)_{\alpha_\kappa=0}\left(\frac{\partial x}{\partial\alpha_\lambda}\right)_{\alpha_\lambda=0} + \cdots \tag{3.18}$$

(Η έκφραση $\left(\frac{\partial x}{\partial\alpha_\kappa}\right)_{\alpha_\kappa=0}$ στον παραπάνω τύπο, σημαίνει $\left(\frac{\partial x(0,0,\cdots,0)}{\partial\alpha_\kappa}\right)_{\alpha_\kappa=0}$ δηλ. παραγωγίζουμε το $x(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$ ως προς α_κ και μετά θέτουμε $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_r=0$, ή ισοδύναμα, πρώτα θέτουμε $\alpha_i=0$ με $i\neq\kappa$, μετά παραγωγίζουμε ως προς α_κ και τέλος θέτουμε $\alpha_\kappa=0$)

Εάν περιοριστούμε μέχρι των όρων πρώτης τάξης και θέσουμε:

$$X_\kappa = iJ_\kappa = \left(\frac{\partial x}{\partial\alpha_\kappa}\right)_{\alpha_\kappa=0} \tag{3.19}$$

[17] Ένα σύνολο λέγεται **κλειστό** αν κάθε ακολουθία του Cauchy από στοιχεία του συνόλου συγκλίνει μέσα στο σύνολο και **φραγμένο** αν το μέτρο κάθε στοιχείο του είναι πεπερασμένος αριθμός.

με $i^2=-1$ έχουμε: $x(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)=x(0,0,\ldots,0)+i\sum_{\kappa=1}^{r}\alpha_\kappa J_\kappa$ Θεωρούμε το στοιχείο x, που αντιστοιχεί στις τιμές των παραμέτρων:

$$\alpha_i=\begin{cases}\varepsilon & i=\kappa \\ 0 & i\neq\kappa\end{cases} \quad \text{με } \varepsilon\text{=απειροστό}$$

δηλ. $x=x(0,\cdots,\varepsilon,\cdots,0)=x(0,0,\ldots,0)+i\varepsilon J_\kappa=e+i\varepsilon J_\kappa$

Για ένα οποιοδήποτε άλλο στοιχείο της μορφής $x=x(0,\ldots,\alpha_\kappa,\ldots,0)$, "απομακρυσμένο" από το ουδέτερο στοιχείο e, μπορούμε να θέσουμε:

$$\alpha_\kappa=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to\infty}}(\varepsilon N)$$

και επειδή:

$$x(0,\ldots,\varepsilon N,\ldots,0)=\underbrace{x(0,\cdots,\varepsilon,\cdots,0)\cdot x(0,\cdots,\varepsilon,\cdots,0)\cdots x(0,\cdots,\varepsilon,\cdots,0)}_{N\ \text{φορες}}=(A)$$ [18]

$$=\underbrace{(e+i\varepsilon J_\kappa)\cdot(e+i\varepsilon J_\kappa)\cdots(e+i\varepsilon J_\kappa)}_{N\ \text{φορες}}=(e+i\varepsilon J_\kappa)^N$$

θα έχουμε: $x(0,\ldots,\alpha_\kappa,\ldots,0)=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to\infty}} x(0,\ldots,\varepsilon N,\ldots,0)=$

$$=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to\infty}}(e+i\varepsilon J_\kappa)^N=\lim_{N\to\infty}\left(e+i\left(\frac{\alpha_k}{N}\right)J_\kappa\right)^N=\exp(i\alpha_\kappa J_\kappa)$$

(είναι γνωστό ότι $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n=e^\alpha$).

Επομένως:

$$x=x(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r)=\exp(i\alpha_1 J_1)\exp(i\alpha_2 J_2)\ldots\exp(i\alpha_r J_r) \tag{3.20}$$

Έτσι όλα τα στοιχεία της Lie-ομάδας, που ανήκουν στο υποσύνολο που περιέχει το ταυτοτικό στοιχείο e, μπορούν να προκύψουν από τους **απειροστούς τελεστές** J_κ δίνοντας κατάλληλες τιμές στις παραμέτρους $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$. Γι' αυτό τον λόγο οι τελεστές J_κ λέγονται **γεννήτορες της ομάδας**. Μια Lie-ομάδα με r συνεχείς παραμέτρους έχει r γεννήτορες. Με την υπόθεση ότι οι τελεστές J_κ δρουν με την σειρά της εξισώσεως (3.20), μπορούμε να γράψουμε:

$$x=x(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r)=\exp\left\{\sum_{\kappa=1}^{r}i\alpha_\kappa J_\kappa\right\} \tag{3.21}$$

Τα απειροστά στοιχεία μιας Lie-ομάδας αποτελούν από μόνα τους μια αβελιανή ομάδα. Πράγματι έστω:

$$x_\kappa\equiv x(0,\ldots,\varepsilon_\kappa,\ldots,0)=e+i\varepsilon_\kappa J_\kappa$$

και $$x_\lambda\equiv x(0,\ldots,\varepsilon_\lambda,\ldots,0)=e+i\varepsilon_\lambda J_\lambda$$

[18] Για την απόδειξη της σχέσεως (A) βλέπε στο τέλος της παραγράφου

τότε $x_\kappa x_\lambda = x_\lambda x_\kappa \cong e + i(\varepsilon_\kappa J_\kappa + \varepsilon_\lambda J_\lambda)$ που είναι και αυτό ένα απειροστό στοιχείο της Lie-ομάδας ***G***.

<u>Συμπλήρωμα – Απόδειξη της σχέσεως (Α)</u>:

Την σχέση (3.17) $\gamma_i \equiv \gamma_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_r;\beta_1,\ldots,\beta_r)$ i=1,···,r

αναπτύσσουμε κατά Taylor:

$$\gamma_i \equiv \gamma_i(0,\ldots,0;0,\ldots,0) + \sum_{\kappa=1}^{r}\left\{\alpha_\kappa \frac{\partial\gamma_i(0,\cdots 0)}{\partial\alpha_\kappa} + \beta_\kappa \frac{\partial\gamma_i(0,\cdots 0)}{\partial\beta_\kappa}\right\} +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\kappa,\lambda=1}^{r}\left\{\alpha_\kappa\alpha_\lambda \frac{\partial^2\gamma_i(0,\cdots 0)}{\partial\alpha_\kappa\partial\alpha_\lambda} + 2\alpha_\kappa\beta_\lambda \frac{\partial^2\gamma_i(0,\cdots 0)}{\partial\alpha_\kappa\partial\beta_\lambda} + \beta_\kappa\beta_\lambda \frac{\partial^2\gamma_i(0,\cdots 0)}{\partial\beta_\kappa\partial\beta_\lambda}\right\} + \cdots$$

Εάν θέσουμε $x_1 = x_2 = e$ τότε και $x_3 = e$, δηλ. εάν $\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0$ και $\beta_1 = \cdots = \beta_r = 0$ τότε και $\gamma_1 = \cdots = \gamma_r = 0$. Επομένως $\gamma_i(0,\cdots,0;0,\cdots,0) = 0$.

Επίσης εάν θέσουμε $x_2 = e$, τότε $x_3 = x_1$ και επομένως:

$$\frac{\partial\gamma_i(0,\cdots,0)}{\partial\alpha_\kappa} = \delta_{i\kappa} \qquad \text{και} \qquad \frac{\partial^2\gamma_i(0,\cdots,0)}{\partial\alpha_\kappa\partial\alpha_\lambda} = 0$$

όπου δ_{ik} το γνωστό σύμβολο του Kronecker.

Τελικά το ανάπτυγμα Taylor παίρνει την μορφή:

$$\gamma_i = \alpha_i + \beta_i + \sum_{\kappa,\lambda}^{r} d^i_{\kappa\lambda}\alpha_\kappa\beta_\lambda + \cdots$$

Επομένως εάν θεωρήσουμε τα στοιχεία x_1, x_2, να είναι ίδια και της μορφής $x(0,\cdots,\varepsilon,\cdots 0)$ με ε=απειροστό, τότε η παραπάνω σχέση απλοποιείται σε $\gamma_i = \alpha_i + \beta_i$ με $\alpha_I = \beta_i = \varepsilon$, επομένως $\gamma_i = 2\varepsilon$.

3.5 Αναπαράσταση μιας συνεχούς ομάδας.

Θεωρούμε ένα σύνολο πινάκων M(x), που είναι μια αναπαράσταση της Lie-ομάδας ***G***, δηλ. $M(x_1)M(x_2) = M(x_3)$ όταν $x_1 x_2 = x_3$ και $M(x)M(x') = M(e)$ όταν $xx' = e$. Η αναπαράσταση Μ λέγεται **συνεχής αναπαράσταση** όταν:

$$\lim_{x\to x_0} M(x) \to M(x_0)$$

Η ομάδα ***G*** είναι **ομομορφική** προς την ομάδα Μ των πινάκων, οι οποίοι μπορούν να προσδιοριστούν από τις ίδιες παραμέτρους που προσδιορίζουν τα στοιχεία της ***G***.

Εάν περιοριστούμε στην μελέτη των συνεχών αναπαραστάσεων μιας συμπαγούς ομάδας, τότε ισχύουν τα παρακάτω σημαντικά θεωρήματα, που παρατίθενται χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 1: Κάθε αναπαράσταση έχει μια ισοδύναμη αναπαράσταση, της οποίας οι πίνακες είναι μοναδιαίοι, (unitary), και η αναπαράσταση λέγεται **μοναδιαία**.

Θεώρημα 2: Κάθε μοναδιαία αναπαράσταση είναι πλήρως αναγωγίσιμη, δηλ. κάθε πίνακας της αναπαράστασης μπορεί να γραφεί υπό block μορφή π.χ.:

$$\mathrm{M(x)}=\begin{pmatrix} M^{1}(x) & & & \\ & M^{2}(x) & & \bigcirc \\ & \bigcirc & \ddots & \\ & & & M^{S}(x) \end{pmatrix}$$

Θεώρημα 3: Κάθε **μη αναγωγίσιμη** αναπαράσταση είναι πεπερασμένης διαστάσεως.

3.6 Η αξονική ομάδα περιστροφών SO(2)

Ας θεωρήσουμε το σύνολο των περιστροφών ενός κύκλου γύρω από τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδο του κύκλου. Κάθε στοιχείο αυτού του συνόλου προσδιορίζεται από μια παράμετρο, η οποία επιλέγεται να είναι η γωνία περιστροφής θ που παίρνει τιμές στο διάστημα [0,2π]. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι το σύνολο αυτό αποτελεί μια μονοπαραμετρική, συνεχή, συνεκτική, αβελιανή, συμπαγή Lie-ομάδα, γνωστή σαν **αξονική ομάδα περιστροφών** και συμβολίζεται με SO(2). Επειδή οι περιστροφές κατά θ και θ+2nπ $n\in N$ είναι ταυτόσημες, ο παραμετρικός χώρος είναι το υποσύνολο [0,2π) των πραγματικών αριθμών. Η ομάδα αυτή είναι απείρως πολλαπλά συννεκτική, διότι υπάρχουν άπειρο το πλήθος καμπύλες που συνδέουν δυο τυχαία στοιχεία της ομάδας, που δεν μπορούν να συμπέσουν με συνεχή παραμόρφωση χωρίς να εγκαταλείψουν τον χώρο. Η καμπύλη που διαγράφει τον κύκλο n φορές δεν ταυτίζεται με εκείνη που τον διαγράφει n+1 φορές.

Εάν συμβολίσουμε με R(θ) ένα στοιχείο αυτής της ομάδας, τότε ο νόμος εσωτερικής συνθέσεως γράφεται:

$$\mathrm{R}(\theta_1)\mathrm{R}(\theta_2)=\mathrm{R}(\theta_2)\mathrm{R}(\theta_1)=\begin{cases}\mathrm{R}(\theta_1+\theta_2) & \text{εάν } \theta_1+\theta_2\langle 2\pi \\ \\ \mathrm{R}(\theta_1+\theta_2-2\pi) & \text{εάν } \theta_1+\theta_2\geq 2\pi\end{cases} \tag{3.22}$$

Το ταυτοτικό στοιχείο είναι το R(0) και το αντίστροφο του R(θ) είναι το R(2π-θ).

Εάν στο επίπεδο του κύκλου θεωρήσουμε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων με αρχή το κέντρο του κύκλου, τότε οι μετασχηματισμοί των (x,y) κάτω από τις περιστροφές της ομάδας SO(2) μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να δώσουν μια αναπαράσταση της ομάδας. Η επίδραση ενός στοιχείου R(θ) πάνω στο ζεύγος (x,y) είναι:

$$\mathrm{R}(\theta)(\mathrm{x,y})\equiv(\mathrm{x',y'})=\mathrm{R}(\theta)\begin{pmatrix}\mathrm{x}\\ \mathrm{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{x'}\\ \mathrm{y'}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{x}\\ \mathrm{y}\end{pmatrix} \tag{3.23}$$

Ο πίνακας του μετασχηματισμού στο δεξιό μέλος είναι ένας ορθογώνιος πίνακας τάξης 2. Σε κάθε στοιχείο R(θ) της ομάδας μπορούμε να αντιστοιχίσουμε κατά τρόπο αμφιμονοσήμαντο έναν 2×2 ορθογώνιο πίνακα με ορίζουσα +1. Το σύνολο όλων των ορθογωνίων πινάκων τάξης 2 με ορίζουσα +1 αποτελεί ομάδα, που είναι ισομορφική με την αξονική ομάδα περιστροφών και επομένως είναι μια αναπαράσταση δυο διαστάσεων. Η ομάδα αυτή των πινάκων συμβολίζεται με το ίδιο σύμβολο SO(2).

3.6.1. Γεννήτορες της SO(2).

Επειδή η SO(2) είναι μια μονοπαραμετρική ομάδα, έχει μόνο ένα γεννήτορα. Η μορφή του εξαρτάται από την αναπαράσταση της SO(2) που μελετάμε. Τα επόμενα παραδείγματα θα διασαφηνίσουν τα παραπάνω.

Παράδειγμα 1: Θεωρούμε την ομάδα S_1 των μιγαδικών αριθμών x=exp(iθ) με $0\leq\theta<2\pi$ οι οποίοι ορίζουν τον μοναδιαίο κύκλο στο μιγαδικό επίπεδο. Η ομάδα αυτή είναι ισομορφική προς την SO(2) για τον εξής λόγο: Εάν z=x+iy ένας μιγαδικός αριθμός με πολική έκφραση:

$$z=r\cos\alpha+ir\sin\alpha=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)=re^{i\alpha},$$

τότε το γινόμενο $\quad e^{i\theta}z=e^{i\theta}re^{i\alpha}=re^{i(\theta+\alpha)}=w$

παριστάνει έναν μιγαδικό αριθμό με μέτρο |w|=r=|z| και όρισμα θ+α, δηλ. ο w μπορεί να θεωρηθεί ότι έχει προκύψει από τον z δια περιστροφής του z κατά γωνία θ. Από την σχέση (3.19) με x=exp(iθ) προκύπτει:

$$J=\frac{1}{i}\frac{\partial x}{\partial\theta}\bigg|_{\theta=0}=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta}\exp(i\theta)\bigg|_{\theta=0}=\frac{1}{i}i=1 \qquad (3.24)$$

και από την (3.20), $x=e^{i\alpha_k J_k}$, κάθε στοιχείο της ομάδας μπορεί να γραφεί σαν exp(iθ), που είναι τετριμμένα αληθές.

Παράδειγμα 2: Θεωρούμε την ομάδα όλων των ορθογωνίων πινάκων τάξης 2 με ορίζουσα +1. Τα στοιχεία αυτής της ομάδας έχουν την μορφή:

$$x=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} \qquad (3.25)$$

και ο γεννήτορας είναι:

$$J=\frac{1}{i}\frac{\partial x}{\partial\theta}\bigg|_{\theta=0}=\frac{1}{i}\begin{pmatrix}-\sin\theta & \cos\theta\\ -\cos\theta & -\sin\theta\end{pmatrix}_{\theta=0}=\frac{1}{i}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix} \qquad (3.26)$$

που είναι ο σ_2 spin πίνακας του Pauli. Εύκολα μπορεί να αποδειχθεί ότι κάθε ορθογώνιος πίνακας R(θ) 2×2 με ορίζουσα +1 μπορεί να γραφεί σαν:

$$R(\theta)=\exp(i\theta\sigma_2) \qquad (3.27)$$

Παράδειγμα 3: Θεωρούμε έναν κύκλο ακτίνας ρ και έστω ότι το x μετρά την απόσταση κατά μήκος της περιφέρειας. Έστω f(x) μια συνάρτηση ορισμένη πάνω στην περιφέρεια και R(θ) η "περιστροφή" της συνάρτησης f κατά γωνία θ γύρω από τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου και είναι κάθετος στο επίπεδο του. Επειδή η f ορίζεται μόνο πάνω στην περιφέρεια, η επίδραση της περιστροφής R(θ) είναι να μεταθέτει το όρισμα της συνάρτησης κατά ρθ δηλ.

$$R(\theta)f(x)=f(x+\rho\theta) \qquad (3.28)$$

Ο γεννήτορας J είναι τότε ένας τελεστής, του οποίου η επίδραση πάνω στην f(x) είναι:

$$Jf(x)=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta}\big(R(\theta)f(x)\big)_{\theta=0}=-i\frac{\partial}{\partial\theta}f(x+\rho\theta)\bigg|_{\theta=0}=-i\rho\frac{\partial f(x)}{\partial x}$$

δηλ. $$\mathrm{Jf(x)}=-\mathrm{i}\rho\frac{\partial f(x)}{\partial x} \Rightarrow \mathrm{J}=-\mathrm{i}\rho\frac{\partial}{\partial x} \qquad (3.29)$$

και βλέπουμε ότι ο γεννήτορας J είναι ανάλογος του κλασικού τελεστή της ορμής:

$$P_x=-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$$

($\hbar$ είναι η σταθερά του Plank διαιρεμένη με το 2π). Έτσι ένας τελεστής που είναι στοιχείο της ομάδας SO(2) και που επενεργεί πάνω στην ομάδα των συναρτήσεων f(x), γράφεται:

$$R(\theta)=\exp\left(\rho\theta\frac{\partial}{\partial x}\right) \qquad (3.30)$$

με την έννοια ότι: $R(\theta)f(x)=f(x+\rho\theta)$

Παράδειγμα 4: Έστω f=f(x,y) μια συνάρτηση δυο μεταβλητών και R(θ) ο ορθογώνιος μετασχηματισμός του συστήματος συντεταγμένων (x,y), σχέση (3.23). Η επίδραση του R(θ) πάνω στην συνάρτηση f(x,y) δίνεται από την σχέση:

$$R(\theta)f(x,y)=f(x',y')=f(x\cos\theta+y\sin\theta,-x\sin\theta+y\cos\theta) \qquad (3.31)$$

Ο γεννήτορας J βρίσκεται ως εξής:

$$\mathrm{Jf(x,y)}=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta}\big(R(\theta)f(x,y)\big)_{\theta=0}=-i\frac{\partial}{\partial\theta}\big(f\left(x\cos\theta+y\sin\theta,-x\sin\theta+y\cos\theta\right)\big)_{\theta=0}=$$

$$=-i\left(\frac{\partial f}{\partial x}[-x\sin\theta+y\cos\theta]+\frac{\partial f}{\partial y}[-x\cos\theta-y\sin\theta]\right)_{\theta=0}=-i\left(\frac{\partial f}{\partial x}y+\frac{\partial f}{\partial y}(-x)\right)\Rightarrow$$

$$J=-i\left(y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y}\right)=-\frac{L_z}{\hbar} \qquad (3.32)$$

όπου $L_z=i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y}\right)$ είναι η συνιστώσα του τελεστή της στροφορμής, η κάθετος στο επίπεδο OXY.

Έτσι ένας ορθογώνιος μετασχηματισμός των συντεταγμένων του επιπέδου OXY δίνεται από την σχέση:

$$R(\theta)=\exp\left(-i\theta\frac{L_z}{\hbar}\right) \qquad (3.33)$$

3.7 Η ομάδα περιστροφών SO(3)

Θεωρούμε έναν τριδιάστατο πραγματικό διανυσματικό χώρο V εσωτερικού γινομένου και το σύνολο όλων των ορθογωνίων μετασχηματισμών, (τελεστών), που δρουν πάνω στον V. (Ένας γραμμικός μετασχηματισμός λέγεται ορθογώνιος όταν διατηρεί τις γωνίες και τα μήκη των διανυσμάτων του V ή ισοδύναμα όταν διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο). Το σύνολο αυτών των ορθογωνίων μετασχηματισμών αποτελεί ομάδα, που συμβολίζεται με O(3). Η ομάδα αυτή ισοδύναμα μπορεί να ορισθεί σαν η ομάδα όλων των ορθογωνίων πινάκων 3×3. Οι δυο αυτές ομάδες είναι ισομορφικές. Έστω R ένας ορθογώνιος πίνακας:

$$RR^t=R^tR=E \tag{3.34}$$

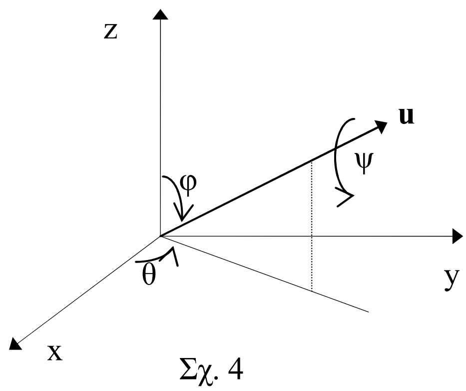
όπου E ο ταυτοτικός πίνακας και R^t ο ανάστροφος του R. Επειδή $\det R=\det R^t$ έχουμε:

$$\det(RR^t)=\det R\det(R^t)=(\det R)^2=\det E=1 \;\Rightarrow\; \det R=\pm 1 \tag{3.35}$$

Έτσι οι πίνακες της ομάδας O(3) χωρίζονται σε δυο σύνολα, το ένα περιέχει τους πίνακες με ορίζουσα +1 και το άλλο τους πίνακες με ορίζουσα -1. Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι το πρώτο σύνολο αποτελεί ομάδα, την οποία θα συμβολίζουμε με SO(3).

Θεωρώντας τον ισομορφισμό, που συνδέει τους ορθογώνιους πίνακες με τους ορθογώνιους μετασχηματισμούς, βλέπουμε ότι ένας ορθογώνιος πίνακας με ορίζουσα +1 αντιστοιχεί σε **γνήσια**, (**proper**), **περιστροφή** του συστήματος συντεταγμένων. Ένας ορθογώνιος πίνακας με ορίζουσα -1 αντιστοιχεί σ' έναν ορθογώνιο μετασχηματισμό, ο οποίος μπορεί να εκφρασθεί σαν γινόμενο μιας γνήσιας περιστροφής και μιας **αντιστροφής**. Οι μετασχηματισμοί αυτοί ονομάζονται **μη γνήσιες**, (**improper**), **περιστροφές**. Ο πίνακας, που αντιστοιχεί στην πράξη της αντιστροφής, είναι ο αντίθετος του ταυτοτικού:

$$I_3=-E=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$



Σχ. 4

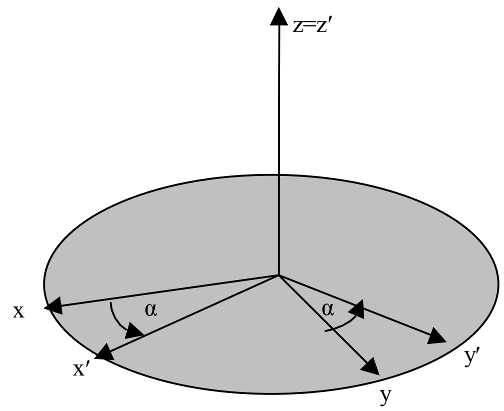
Οι πίνακες E και I_3 αποτελούν ομάδα τάξης 2. Επειδή ο πίνακας της αντιστροφής μετατίθεται με όλους του πίνακες περιστροφών, ισχύει η σχέση:

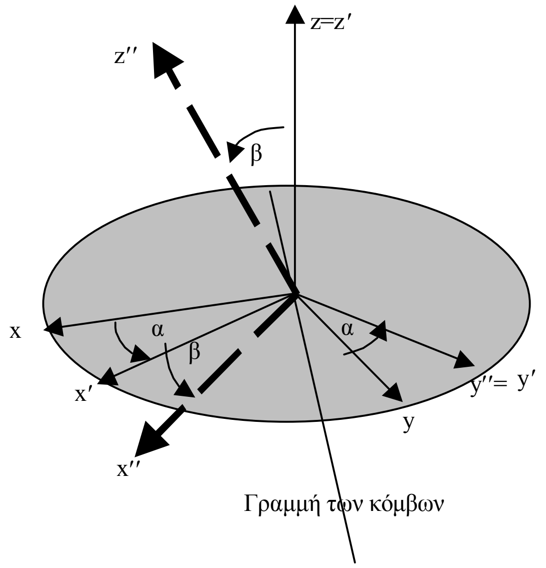
$$O(3)=SO(3)\otimes\{E,I_3\} \tag{3.36}$$

Η ομάδα $\{E, I_3\}$ έχει μόνο δυο μονοδιάστατες αναπαραστάσεις μη αναγωγίσιμες. Επομένως οι αναπαραστάσεις της O(3) μπορούν εύκολα να προκύψουν από τις αναπαραστάσεις της SO(3) από την θεωρία των τανυστικών γινομένων ομάδων. Έτσι θα μελετήσουμε μόνο μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις της SO(3). Η ομάδα O(3) ονομάζεται **ομάδα περιστροφών - αντιστροφών** τριών διαστάσεων. Οι παράμετροι της SO(3) μπορούν να εκλεγούν κατά διαφόρους τρόπους. Έστω (x,y,z) ένα τριδιάστατο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Μια περιστροφή προσδιορίζεται από έναν άξονα **u** και μια γωνία ψ και συμβολίζεται με $R_{\mathbf{u}}(\psi)$. Ο άξονας **u** χρειάζεται δυο παραμέτρους για να προσδιοριστεί η διεύθυνση του, έστω τις πολικές γωνίες (θ,φ) Σχ. 4. Τα διαστήματα των γωνιών είναι: $0\le\theta<2\pi$, $0\le\varphi\le\pi$, $0\le\psi<2\pi$ [19].

Ένας άλλος καταλληλότερος τρόπος είναι να προσδιορίσουμε τις περιστροφές χρησιμοποιώντας τις γωνίες του Euler. Όπως είναι γνωστό, κάθε περιστροφή μπορεί να γραφεί σαν γινόμενο τριών περιστροφών ως προς τους άξονες του συστήματος συντεταγμένων, ακολουθώντας την εξής διαδικασία:

[19] Οι περιστροφές $R_{\mathbf{u}}(\theta)$ και $R_{-\mathbf{u}}(2\pi-\theta)$ ταυτίζονται.





α) περιστροφή κατά γωνία α γύρω από τον άξονα Oz

β) περιστροφή κατά γωνία β γύρω από τον άξονα Oy′

γ) περιστροφή κατά γωνία γ γύρω από τον άξονα Oz″

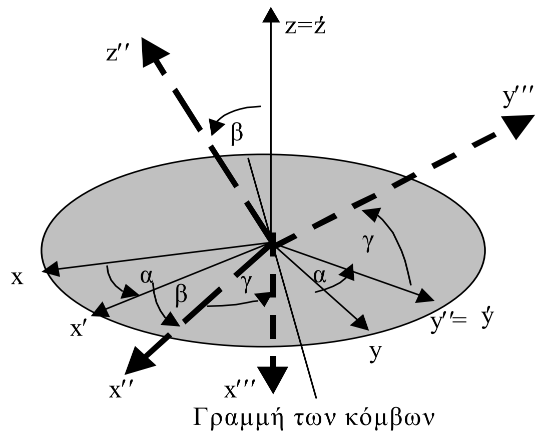
Έτσι μια περιστροφή R γράφεται: $R=R(\alpha,\beta,\gamma)=R_{z''}(\gamma)R_{y'}(\beta)R_z(\alpha)$

Η περιστροφή R(α,β,γ) μπορεί να εκφραστεί και σαν συνάρτηση περιστροφών γύρω από τους αρχικούς άξονες. Μπορεί να δειχθεί ότι

$R_{y'}(\beta)=R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(-\alpha)$.

Όμοια: $R_{z''}(\gamma)=R_{y'}(\beta)R_{z'}(\gamma)R_{y'}(-\beta)$, με $R_{z'}(\gamma)=R_z(\gamma)$

και $R_{z''}(\gamma)=R_{y'}(\beta)R_z(\gamma)R_{y'}(-\beta)=\{R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(-\alpha)\}R_z(\gamma)\{R_z(\alpha)R_y(-\beta)R_z(-\alpha)\}$



Τελικά θα είναι:

$$R(\alpha,\beta,\gamma)=R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma) \tag{3.37}$$

όπου $$R_z(\alpha)=\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_y(\beta)=\begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}$$

$$R_z(\gamma)=\begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Εάν πάρουμε το γινόμενο της σχέσης (3.37), προκύπτει:

$$R(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\sin\alpha\sin\gamma & \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma+\sin\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\sin\beta \\ -\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos\alpha\sin\gamma & -\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma+\cos\alpha\cos\gamma & -\sin\alpha\sin\beta \\ -\sin\beta\cos\gamma & -\sin\beta\sin\gamma & \cos\beta \end{pmatrix} \tag{3.38}$$

που είναι ένας ορθογώνιος πίνακας με ορίζουσα +1 και δίνει το γενικό στοιχείο της ομάδας SO(3).

Οι γεννήτορες της SO(3) υπό μορφή πινάκων 3×3 βρίσκονται εάν θεωρήσουμε περιστροφές γύρω από τους άξονες Ox, Oy, Oz. Για την περιστροφή γύρω από τον άξονα OZ, έχουμε:

$$R(\alpha)=\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$J_z=-i\left(\frac{\partial R(\alpha)}{\partial\alpha}\right)_{\alpha=0}=-i\begin{pmatrix} -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ -\cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\alpha=0}=-i\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Με όμοιο τρόπο βρίσκουμε του γεννήτορες γύρω από τους άλλους άξονες OX, OY:

$$J_x=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_y=\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Οι γεννήτορες της SO(3) μπορούν επίσης να προκύψουν πιο γενικά, θεωρώντας μια περιστροφή κατά γωνία ψ γύρω από έναν άξονα **u**. Η ομάδα των περιστροφών $R_{\mathbf{u}}(\psi)$ με $0\le\psi<2\pi$, που είναι υποομάδα της SO(3), είναι ισομορφική με την SO(2) και επομένως από την σχέση (3.32) έχουμε:

$$J_{\mathbf{u}}=-\frac{L_{\mathbf{u}}}{\hbar} \qquad (3.39)$$

όπου $L_{\mathbf{u}}=\mathbf{L}\cdot\mathbf{u}_0$ είναι η συνιστώσα του τελεστή της στροφορμής L ως προς την διεύθυνση **u** και $\mathbf{u}_0$ το αντίστοιχο μοναδιαίο διάνυσμα. Επειδή κάθε περιστροφή μπορεί να εκφρασθεί σαν γινόμενο τριών περιστροφών γύρω από τους άξονες του συστήματος συντεταγμένων, διαπιστώνουμε ότι χρειαζόμαστε τους τρείς τελεστές:

$$J_{\mathbf{x}}=-\frac{L_{\mathbf{x}}}{\hbar}\;,\quad J_{\mathbf{y}}=-\frac{L_{\mathbf{y}}}{\hbar}\;,\quad J_{\mathbf{z}}=-\frac{L_{\mathbf{z}}}{\hbar} \qquad (3.40)$$

Κάθε λοιπόν περιστροφή μπορεί τώρα να γραφεί:

$$R_{\mathbf{u}}(\psi)=\exp(i\psi J_{\mathbf{u}})=\exp\left(-i\psi\frac{(\mathbf{L}\cdot\mathbf{u}_0)}{\hbar}\right) \qquad (3.41)$$

Η πλήρης ομάδα περιστροφών-αντιστροφών O(3) έχει τέσσερις παραμέτρους (α,β,γ,δ), όπου α,β,γ οι παράμετροι της SO(3) και δ είναι η τιμή της ορίζουσας ενός στοιχείου και μπορεί να πάρει τις τιμές ±1. Έτσι ο παραμετρικός χώρος της O(3) αποτελείται από δυο μη συνεκτικές περιοχές, είναι 4-παραμετρικός με τρεις συνεχείς παραμέτρους και μια διακεκριμένη. Επομένως η ομάδα O(3) είναι μια συνεχής, συμπαγής Lie-ομάδα, όχι όμως συνεκτική.

3.8 Η ειδική μοναδιαία ομάδα, (special unitary Group), SU(2).

Έστω V διανυσματικός χώρος επί του σώματος C των μιγαδικών αριθμών διαστάσεων 2 και u= $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ [20] ένα διάνυσμα αυτού του χώρου. Μια περιστροφή σ' αυτόν τον χώρο μετασχηματίζει το διάνυσμα u= $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ στο v= $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ που συνδέονται

[20] Τα διανύσματα αυτής της μορφής ονομάζονται **spinor** στην Κβαντομηχανική.

με την σχέση: $$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$ (3.42)

όπου a,b,c,d είναι μιγαδικοί αριθμοί και επομένως ο πίνακας μετασχηματισμού περιέχει 8 πραγματικές παραμέτρους. Εάν θεωρήσουμε τώρα εκείνες τις περιστροφές T που αφήνουν τα μέτρα των διανυσμάτων αναλλοίωτα:

$$u_1u_1^*+u_2u_2^*=v_1v_1^*+v_2v_2^*$$

βλέπουμε ότι ο πίνακας μετασχηματισμού (3.42) πρέπει να είναι ένας μοναδιαίος πίνακας T, δηλ.:

$$TT^{+}=E \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$|a|^2+|b|^2=1, \quad |c|^2+|d|^2=1, \quad ac^*+bd^*=0 \tag{3.43}$$

Επειδή οι συντελεστές είναι μιγαδικοί αριθμοί, η τελευταία σχέση των (3.43) ισοδυναμεί με δυο συνθήκες. Οι σχέσεις (3.43), που είναι 4 σε πλήθος, ανάγουν τον αριθμό των παραμέτρων της σχέσεως (3.42) από 8 σε 4. Από τις σχέσεις (3.43) μπορούμε να γράψουμε:

$$a=\cos\theta e^{i\alpha}, \quad b=-\sin\theta e^{i(\beta-\gamma)}, \quad c=\sin\theta e^{i\gamma}, \quad d=\cos\theta e^{i(\beta-\alpha)}$$

και ο πίνακας T παίρνει την μορφή:

$$T(\alpha,\beta,\gamma,\theta)=\begin{pmatrix} \cos\theta e^{i\alpha} & -\sin\theta e^{i(\beta-\gamma)} \\ \sin\theta e^{i\gamma} & \cos\theta e^{i(\beta-\alpha)} \end{pmatrix} \tag{3.44}$$

από την οποία βλέπουμε ότι τα α,β,γ,θ είναι οι τέσσερεις πραγματικοί παράμετροι.

Το σύνολο όλων αυτών των μετασχηματισμών αποτελεί την ομάδα U(2), η οποία είναι ισομορφική προς την ομάδα των μοναδιαίων πινάκων τάξης 2. Η ομάδα U(2) είναι 4-παραμετρική, συνεχής, συννεκτική, συμπαγής και Lie-ομάδα.

Η υποομάδα της U(2) με ορίζουσα +1 είναι ειδικού ενδιαφέροντος για την φυσική. Από την σχέση (3.44) και απαιτώντας να ισχύει detT=1, προκύπτει ότι $\cos^2\theta e^{i\beta}+\sin^2\theta e^{i\beta}=1$. Η σχέση αυτή ισχύει μόνο για β=0. Επομένως η (3.44) παίρνει την μορφή:

$$T(\alpha,\beta,\gamma,\theta)=\begin{pmatrix} \cos\theta e^{i\alpha} & -\sin\theta e^{-i\gamma} \\ \sin\theta e^{i\gamma} & \cos\theta e^{i\alpha} \end{pmatrix}$$

και εάν αντικαταστήσουμε το γ με το –β η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$T(\alpha,\beta,\theta)=\begin{pmatrix} \cos\theta e^{i\alpha} & \sin\theta e^{i\beta} \\ -\sin\theta e^{-i\beta} & \cos\theta e^{-i\alpha} \end{pmatrix} \tag{3.45}$$

Επίσης εάν θέσουμε στην (3,45) $a=\cos\theta e^{i\alpha}$ και $b=\sin\theta e^{i\beta}$ προκύπτει η μορφή:

$$T(a,b)=\begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \quad \text{με} \ |a|^2+|b|^2=1$$

(3.46)

Η υποομάδα αυτή των μετασχηματισμών, με αναπαράσταση τους πίνακες (3.46), ονομάζεται **ειδική μοναδιαία ομάδα** SU(2). Εξ' αιτίας της σχέσεως detT=+1, η ομάδα SU(2) είναι 3-παραμετρική. Όμως και η ομάδα SO(3) είναι 3-παραμετρική. Αυτό μας κάνει να σκεφθούμε ότι υπάρχει σχέση μεταξύ αυτών των δυο ομάδων. Η ομάδα SO(3), σαν ομάδα περιστροφών στον χώρο R^3 αφήνει αναλλοίωτη την ποσότητα $x^2+y^2+z^2$ ενώ η ομάδα SU(2) αφήνει την ποσότητα $|u_1|^2+|u_2|^2$ αναλλοίωτη. Είναι επομένως λογικό να εξετάσουμε εάν η ομάδα SU(2) αφήνει αναλλοίωτη και την ποσότητα $x^2+y^2+z^2$. Γι' αυτό, θεωρούμε έναν πίνακα M, 2×2, που είναι γραμμικός συνδυασμός των τριών πινάκων του Pauli:

$$M=x\sigma_1+y\sigma_2+z\sigma_3 \Rightarrow$$

$$M=\begin{pmatrix} z & x-iy \\ x+iy & -z \end{pmatrix} \quad \text{με } x,y,z\in R \tag{3.47}$$

(του οποίου η ορίζουσα είναι $-(x^2+y^2+z^2)$, δηλ. η ποσότητα που θέλουμε να ελέγξουμε ότι παραμένει αναλλοίωτη), και τον μετασχηματισμό ομοιότητας:

$$M \to M'=TMT^+ \tag{3.48}$$

όπου $$T=T(a,b)=\begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \quad \text{με} \ |a|^2+|b|^2=1$$

Η (3.48) γράφεται:

$$\begin{pmatrix} z' & x'-iy' \\ x'+iy' & -z' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z & x-iy \\ x+iy & -z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^* & -b \\ b^* & a \end{pmatrix}$$

με $x'=1/2(a^2+a^{*2}-b^2-b^{*2})x+1/2(a^2-a^{*2}+b^2-b^{*2})y+(ab+a^*b^*)z$

$y'=i/2(a^2-a^{*2}-b^2+b^{*2})x+1/2(a^2+a^{*2}+b^2+b^{*2})y-i(ab-a^*b^*)z$

$z'=-(a^*b+ab^*)x+i(a^*b-ab^*)y+(aa^*-bb^*)z$

Εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι οι συντελεστές των x, y, z, είναι πραγματικοί αριθμοί.

Επειδή τώρα ο μετασχηματισμός ομοιότητας διατηρεί την τιμή της ορίζουσας έχουμε:

$$\det M'=\det M \Rightarrow -(x^2+y^2+z^2)=-[(x')^2+(y')^2+(z')^2] \tag{3.50}$$

Συνεπώς ο μετασχηματισμός T διατηρεί επίσης την ποσότητα $x^2+y^2+z^2$ αναλλοίωτη. Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι οι ομάδες SU(2) και SO(3) μπορεί να είναι ισομορφικές ή ομομορφικές. Για να το διαπιστώσουμε αυτό ας θεωρήσουμε μερικές απλές περιπτώσεις. Θέτουμε στην σχέση (3.45) $a=e^{i\alpha}$ και b=0, ή ισοδύναμα $a=e^{i\alpha}$ και θ=0 στη σχέση (3,45) και έχουμε:

$$T_z=T(\alpha,0,0)=\begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix}$$

Παίρνουμε τώρα τους unitary μετασχηματισμούς των πινάκων του Pauli:

$$T_z\sigma_1 T_z^{+}=\begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & e^{2i\alpha} \\ e^{-2i\alpha} & 0 \end{pmatrix}$$

Εκφράζουμε το αποτέλεσμα αυτό συναρτήσει των πινάκων του Pauli πολλαπλασιάζοντας με το x:

$$T_z x\sigma_1 T_z^{+}=x\begin{pmatrix} 0 & \cos 2\alpha + i\sin 2\alpha \\ \cos 2\alpha - i\sin 2\alpha & 0 \end{pmatrix}=$$

$$= x\cos 2\alpha\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - x\sin 2\alpha\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}=x\cos 2\alpha\sigma_1 - x\sin 2\alpha\sigma_2$$

Με όμοιο τρόπο έχουμε:

$$T_z y\sigma_2 T_z^{+}=y\sin 2\alpha\sigma_1+y\cos 2\alpha\sigma_2$$

$$T_z z\sigma_3 T_z^{+}=z\sigma_3$$

Εάν ξεκινάγαμε με το ήμισυ της γωνίας, δηλ. εάν για α θέταμε α/2, τότε από τις σχέσεις (3.47), (3.48) θα είχαμε:

$$M'=T_z M T_z^{+} \;\Rightarrow\; x'\sigma_1+y'\sigma_2+z'\sigma_3=T_z(x\sigma_1+y\sigma_2+z\sigma_3)T_z^{+}= T_z x\sigma_1 T_z^{+} + T_z y\sigma_2 T_z^{+} + T_z z\sigma_3 T_z^{+}=$$

$$=[\, x\cos\alpha\sigma_1 - x\sin\alpha\sigma_2]+[\, y\sin\alpha\sigma_1+y\cos\alpha\sigma_2]+[z\sigma_3]=[\, x\cos\alpha+y\sin\alpha]\sigma_1+[\, y\cos\alpha - x\sin\alpha]\sigma_2+z\sigma_3$$

Τελικά προκύπτουν οι σχέσεις:

$$x'=x\cos\alpha+y\sin\alpha$$

$$y'=-x\sin\alpha+y\cos\alpha$$

$$z'=z$$

οι οποίες δηλώνουν ότι ο 2×2 unitary μετασχηματισμός $T_z(\alpha/2)$ αντιστοιχεί με τον πίνακα περιστροφής $R_z(\alpha)=\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ δηλ.

$$T_z(\alpha/2)=\begin{pmatrix} e^{i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha/2} \end{pmatrix} \rightarrow R_z(\alpha)=\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Με όμοιο τρόπο βρίσκουμε και τις παρακάτω αντιστοιχίες:

$$T_y(\beta/2)=\begin{pmatrix} \cos\beta/2 & \sin\beta/2 \\ -\sin\beta/2 & \cos\beta/2 \end{pmatrix} \rightarrow R_y(\beta)=\begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}$$

(Ο Πίνακας $T_y(\beta/2)$ προέρχεται από την σχέση (3.45) με τις αντικαταστάσεις: $\theta\rightarrow\beta/2$, $\alpha\rightarrow 0$, $\beta\rightarrow 0$)

$$T_x(\gamma/2)=\begin{pmatrix}\cos\gamma/2 & i\sin\gamma/2\\ i\sin\gamma/2 & \cos\gamma/2\end{pmatrix}\rightarrow R_x(\gamma)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\gamma & \sin\gamma\\ 0 & -\sin\gamma & \cos\gamma\end{pmatrix}$$

(Ο Πίνακας $T_x(\gamma/2)$ προέρχεται από την σχέση (3.45) με τις αντικαταστάσεις: $\theta\rightarrow\gamma/2$, $\alpha\rightarrow 0$, $\beta\rightarrow\pi/2$)

Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι ο πίνακας $T_k(\psi/2)$ έχει την γενική μορφή:

$T_k(\psi/2)=I\cos\psi/2+i\sigma_k\sin\psi/2$ με $k=x,y,z$ $\sigma_x=\sigma_1$, $\sigma_y=\sigma_2$, $\sigma_z=\sigma_3$, και I ο ταυτοτικός πίνακας.

Η αντιστοιχία: $T_z(\alpha/2)=\begin{pmatrix}e^{i\alpha/2} & 0\\ 0 & e^{-i\alpha/2}\end{pmatrix}\rightarrow R_z(\alpha)=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha & 0\\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

δεν είναι αμφιμονοσήμαντη. Συγκεκριμένα όταν το α στον πίνακα $R_z(\alpha)$ μεταβάλλεται από 0 έως 2π, η παράμετρος στον πίνακα $T_z(\alpha/2)$, μεταβάλλεται από 0 έως π. Βρίσκουμε δε ότι:

$R_z(\alpha+2\pi)=R_z(\alpha)$

$$T_z(\alpha/2+\pi)=\begin{pmatrix}-e^{i\alpha/2} & 0\\ 0 & -e^{-i\alpha/2}\end{pmatrix}=-T_z(\alpha/2)$$

Επομένως και οι δυο πίνακες $T_z(\alpha/2)$ και $T_z(\alpha/2+\pi)=-T_z(\alpha/2)$ αντιστοιχούν στον πίνακα $R_z(\alpha)$. Η αντιστοιχία λοιπόν είναι 2 προς 1 και επομένως οι ομάδες SU(2) και SO(3) είναι ομομορφικές.

Κάθε περιστροφή $R(\alpha,\beta,\gamma)$, που είναι στοιχείο της ομάδας SO(3) και αντιστοιχεί στις γωνίες Euler α,β,γ, μπορεί να τεθεί σε αντιστοιχία με τα στοιχεία της ομάδας SU(2) ως εξής:

$$R(\alpha,\beta,\gamma)\ \rightarrow\ T_z(\gamma/2)T_y(\cos\beta/2)T_z(\alpha/2)=$$

$$=\begin{pmatrix}e^{i\gamma/2} & 0\\ 0 & e^{-i\gamma/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta/2 & \sin\beta/2\\ -\sin\beta/2 & \cos\beta/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{i\alpha/2} & 0\\ 0 & e^{-i\alpha/2}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\frac{\beta}{2}\exp\left(i\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) & -\sin\frac{\beta}{2}\exp\left(i\frac{\gamma-\alpha}{2}\right)\\ \sin\frac{\beta}{2}\exp\left(i\frac{\alpha-\gamma}{2}\right) & \cos\frac{\beta}{2}\exp\left(-i\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)\end{pmatrix}\qquad(3.51)$$

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας 2×2 της αντιστοιχίας (3.51) έχει την γενική μορφή ενός πίνακα SU(2), όπως δίνεται από την εξίσωση (3.45).

Τέλος οι γεννήτορες της ομάδας SU(2) βρίσκονται από τις γενικές εκφράσεις των στοιχείων:

$$T_z(\alpha)=\begin{pmatrix}e^{i\alpha} & 0\\ 0 & e^{-i\alpha}\end{pmatrix},\quad T_y(\beta)=\begin{pmatrix}\cos\beta & \sin\beta\\ -\sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix},\quad T_x(\gamma)=\begin{pmatrix}\cos\gamma & i\sin\gamma\\ i\sin\gamma & \cos\gamma\end{pmatrix}$$

Συγκεκριμένα έχουμε:

$$J_z(\alpha) = -i\frac{\partial}{\partial\alpha}\begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix}_{\alpha=0} = -i\begin{pmatrix} ie^{i\alpha} & 0 \\ 0 & -ie^{-i\alpha} \end{pmatrix}_{\alpha=0} = -i\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \sigma_z$$

$$J_y(\beta) = -i\frac{\partial}{\partial\beta}\begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}_{\beta=0} = -i\begin{pmatrix} -\sin\beta & \cos\beta \\ -\cos\beta & -\sin\beta \end{pmatrix}_{\beta=0} = -i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \sigma_y$$

$$J_x(\gamma) = -i\frac{\partial}{\partial\gamma}\begin{pmatrix} \cos\gamma & i\sin\gamma \\ i\sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix}_{\gamma=0} = -i\begin{pmatrix} -\sin\gamma & i\cos\gamma \\ i\cos\gamma & -\sin\gamma \end{pmatrix}_{\gamma=0} = -i\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_x$$

Δηλαδή οι γεννήτορες της ομάδας SU(2) είναι οι πίνακες του Pauli.

3.9 Οι γεννήτορες των ομάδων U(n) και SU(n)

Υπενθυμίζουμε ότι η ομάδα U(n) αποτελείται από το σύνολο των μοναδιαίων πινάκων, (με μιγαδικά στοιχεία), τάξης n, ενώ η ομάδα SU(n) από το σύνολο των μοναδιαίων πινάκων τάξης n με ορίζουσα +1. Προφανώς η ομάδα SU(n) είναι υποομάδα της U(n). Επειδή ένας μοναδιαίος πίνακας τάξης n έχει n^2 πραγματικά ανεξάρτητα στοιχεία, η ομάδα U(n) είναι μια συνεχής, συνεκτική, n^2-παραμετρική, συμπαγής, Lie-ομάδα. Τα στοιχεία της ομάδας SU(n) ικανοποιούν μια επί πλέον συνθήκη: η ορίζουσα τους πρέπει να είναι +1. Επομένως η SU(n) είναι μια συνεχής, συνεκτική, $(n^2$-1)-παραμετρική, συμπαγής, Lie-ομάδα.

Οι γεννήτορες της U(n) ομάδας, που είναι σε πλήθος n^2, μπορούν να προκύψουν ως εξής:

Κατ' αρχήν θυμίζουμε ότι εάν H είναι ένας ερμιτιανός, (hermitian) πίνακας, $(H=H^+)$, τότε ο πίνακας exp(iH) είναι μοναδιαίος. Το αντίστροφο επίσης αληθεύει, δηλ. εάν U είναι ένας μοναδιαίος πίνακας, τότε μπορεί να γραφεί σαν:

$$U=\exp(iH) \tag{3.52}$$

όπου H ερμιτιανός πίνακας. Επίσης κάθε γραμμικός συνδυασμός ερμιτιανών πινάκων με πραγματικούς συντελεστές είναι ερμιτιανός πίνακας. Επομένως υπάρχουν το πολύ n^2 ανεξάρτητοι ερμιτιανοί πίνακες τάξης n, από τους γραμμικούς συνδυασμούς των οποίων, (με την βοήθεια της εκθετικής συναρτήσεως), μπορεί να προκύψει κάθε μοναδιαίος πίνακας U. Έστω τώρα $H_1, H_2,\ldots,H_N$ ένα σύνολο n^2 <u>ανεξαρτήτων</u> ερμιτιανών πινάκων με $N=n^2$ και α_j, $(1\le j\le N)$, n^2 πραγματικοί παράμετροι. Τότε προφανώς κάθε μοναδιαίος πίνακας τάξης n μπορεί να γραφεί:

$$U=\exp\left[i\sum_{j=1}^{N}\alpha_j H_j\right] \tag{3.53}$$

δηλ. όλα τα στοιχεία της U(n) μπορούν να παραχθούν από το δεξιό μέλος της (3.53)[21] δίνοντας όλες τις δυνατές τιμές στις N πραγματικές παραμέτρους α_j. Επομένως <u>οι N το πλήθος ανεξάρτητοι ερμιτιανοί πίνακες H_j είναι οι γεννήτορες της ομάδας U(n)</u>. Προφανώς δεν είναι οι μοναδικοί, οποιοιδήποτε N γραμμικοί συνδυασμοί αυτών των ερμιτιανών πινάκων μπορούν εξ' ίσου καλά να χρησιμοποιηθούν σαν γεννήτορες της ομάδας U(n).

Εάν A είναι ένας τετραγωνικός πίνακας, τότε

$$\det(e^A)=e^{trA} \tag{3.54}$$

[21] η οποία είναι όμοια με την (3.21)

όπου trA=ίχνος του A= άθροισμα των διαγωνίων στοιχείων του A.

Από την (3.52) βλέπουμε ότι:

$$\det U=\det(e^{iH})=\exp(i\,trH) \qquad (3.55)$$

Επειδή τα διαγώνια στοιχεία ενός ερμιτιανού πίνακα H είναι πραγματικοί αριθμοί, πραγματικός αριθμός είναι και το ίχνος του trH=α και επομένως η ορίζουσα detU=exp(iα) έχει μέτρο 1, δηλ. |detU|=|expiα|=1.

Για την ομάδα τώρα SU(n) γράφουμε τα στοιχεία της σαν $U_0=\exp(iH_0)$ και επειδή $\det U_0=1$ πρέπει $trH_0=0$. Δηλ. υπάρχουν το πολύ n^2-1 ανεξάρτητοι ερμιτιανοί πίνακες με ίχνος μηδέν κατάλληλα επιλεγμένοι ώστε να αποτελούν τους γεννήτορες της ομάδας SU(n).

Πρακτικά είναι πιο βολικό να διαλέξουμε πρώτα τους n^2-1 γεννήτορες της SU(n) και μετά να προσθέσουμε τον ταυτοτικό πίνακα τάξης n για να προκύψουν οι n^2 γεννήτορες της ομάδας U(n).

Για παράδειγμα, οι τρεις γεννήτορες της ομάδας SU(2) μπορούν να είναι οι τρεις πίνακες του Pauli, (που περιγράφουν το spin στην κβαντομηχανική),:

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad \sigma_2=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix},\quad \sigma_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

(3.56)

Οι πίνακες αυτοί είναι ανεξάρτητοι, ερμιτιανοί, τάξης 2 και με ίχνος μηδέν.

Για τους γεννήτορες της ομάδας U(2) μπορούμε να διαλέξουμε τους εξής πίνακες: $(E,\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z)$, όπου E ο ταυτοτικός πίνακας τάξης 2.

Με την βοήθεια των παραπάνω μπορούμε να βρούμε τους γεννήτορες της ομάδας SU(2) και μ' ένα διαφορετικό τρόπο: Επειδή U=exp(iH) ⇒ det(U)=exp(itrH)=1 ⇒ trH=0. Επίσης τα διαγώνια στοιχεία ενός ερμιτιανού πίνακα είναι πραγματικά. Άρα η μορφή του πίνακα H θα είναι:

$$H=\begin{pmatrix}\alpha & \beta+i\gamma\\ \beta-i\gamma & -\alpha\end{pmatrix}$$

Έχουμε τότε

$$H=\begin{pmatrix}\alpha & \beta+i\gamma\\ \beta-i\gamma & -\alpha\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}-\gamma\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}=\alpha\sigma_3+\beta\sigma_1-\gamma\sigma_2$$

Συνεπώς κάθε ερμιτιανός πίνακας H 2×2 με ίχνος μηδέν, trH=0, εκφράζεται συναρτήσει των τριών βασικών πινάκων του Pauli σ_1, σ_2, σ_3.

3.10 H Lie-άλγεβρα μιας Lie-ομάδας

Θεωρούμε μια Lie-ομάδα ***G*** με r παραμέτρους $\alpha_1, \alpha_2,\cdots, \alpha_r$, και με r γεννήτορες J_1, J_2, …,J_r . Από τα προηγούμενα είδαμε ότι κάθε στοιχείο της Lie-ομάδας μπορεί να εκφρασθεί υπό την μορφή:

$$x(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r)=\exp\left(i\sum_{k=1}^{r}\alpha_k J_k\right) \qquad (3.57)$$

Όταν η ομάδα G είναι πεπερασμένη, τότε όλες οι ιδιότητες μπορούν να προκύψουν από την δομή του πολλαπλασιαστικού της πίνακα. Στην περίπτωση μιας Lie-ομάδας θα δούμε ότι οι μεταθέτες, (commutators), των γεννητόρων της καθορίζουν την δομή της ομάδας. Πράγματι:

Ας θεωρήσουμε δυο συγκεκριμένα στοιχεία της Lie-ομάδας της μορφής:

$$x(0,0,\ldots,\alpha_k,\ldots,0)=\exp(i\alpha_k J_k)$$
$$x(0,0,\ldots,\alpha_l,\ldots,0)=\exp(i\alpha_l J_l)$$

Το γινόμενο αυτών των δυο στοιχείων, $\exp(i\alpha_k J_k)\exp(i\alpha_l J_l)$ πρέπει να ανήκει στην ομάδα και επομένως πρέπει να εκφράζεται υπό την μορφή (3.57) με κατάλληλες τιμές των παραμέτρων α_k. Επειδή τώρα οι γεννήτορες μιας Lie-ομάδας γενικά δεν μετατίθενται, δεν υπάρχει κάποιος απλός τρόπος για να γράψουμε το γινόμενο αυτό [22]. Μπορούμε όμως να χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι ένα τέτοιο γινόμενο περιέχει τον μεταθέτη των J_k και J_l. Για να ανήκει το γινόμενο $\exp(i\alpha_k J_k)\exp(i\alpha_l J_l)$ στην ομάδα πρέπει ο μεταθέτης $[J_k, J_l]=J_kJ_l-J_lJ_k$ να είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των γεννητόρων, δηλ.:

$$[J_k, J_l]=\sum_{j=1}^{r} c^{j}_{k\ell}J_j \qquad 1\le k,\ l\le r \qquad (3.58)$$

με $c^{j}_{k\ell}$ συγκεκριμένοι συντελεστές. Οι μεταθέτες των γεννητόρων μιας Lie-ομάδας ορίζουν πλήρως την δομή της Lie-ομάδας κατά αναλογία προς τον πολλαπλασιαστικό πίνακα μιας πεπερασμένης ομάδας. Οι συντελεστές $c^{j}_{k\ell}$ ονομάζονται **δομικές σταθερές** της Lie-ομάδας, αποτελούν χαρακτηριστική ιδιότητα και δεν εξαρτώνται από τις αναπαραστάσεις της. Όμως δεν είναι μοναδικές εφ' όσον οι γεννήτορες μιας Lie-ομάδας δεν είναι μοναδικοί.

Όπως είδαμε παραπάνω, κάθε γραμμικός συνδυασμός γεννητόρων με πραγματικούς συντελεστές μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν γεννήτορας της ομάδας. Είναι επομένως προφανές ότι *οι r γεννήτορες της Lie-ομάδας αποτελούν βάση ενός γραμμικού διανυσματικού χώρου **L** διαστάσεως r*.

Η εξίσωση (3.58) μας παρέχει και έναν δεύτερο νόμο εσωτερικής συνθέσεως μεταξύ των στοιχείων του διανυσματικού χώρου ***L*** έτσι ώστε ο διανυσματικός αυτός χώρος να είναι άλγεβρα[23] και μάλιστα **Lie-άλγεβρα**, αφού ικανοποιούνται οι απαραίτητες ιδιότητες, που είναι:

α) $(\forall x,y\in L)\big[[x,y]=xy-yx\in L\big]$

β) $(\forall x,y\in L)\ \big[[x,y]=-[y,x]\big]$

γ) $(\forall x,y,z,)\ \big[\,[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0\big]$ (ταυτότητα Jacobi)

Γενικά όταν ο δεύτερος νόμος εσωτερικής συνθέσεως μιας άλγεβρας ικανοποιεί τις παραπάνω τρεις ιδιότητες, η έκφραση [x,y], (που δεν χρειάζεται να εκφράζεται από την διαφορά xy-yx)[24], ονομάζεται **Lie παρένθεση**.

---

[22] Για $[A,B]=AB-BA\neq 0$ ισχύει $e^{A}e^{B}=e^{A+B}e^{1/2[A,B]}$

[23] Για τον ορισμό της Άλγεβρας βλέπε Β′ Μέρος ορισμός 1.1.9.

[24] Γενικά μια άλγεβρα είναι Lie όταν ο δεύτερος νόμος εσωτερικής συνθέσεως ικανοποιεί τις σχέσεις:
α) $x^2=0$ β) $(xy)z+(yz)x+(zx)y=0$

Επειδή οι μεταθέτες (3.58) των γεννητόρων της Lie-ομάδας ***G*** ικανοποιούν τις παραπάνω ιδιότητες, ισχύουν οι εξής σχέσεις μεταξύ των δομικών σταθερών c_{kl}^{j} :

$$c_{k\ell}^{j} = -c_{\ell k}^{j}$$

$$\sum_{m=1}^{r}\left[c_{k\ell}^{m}c_{jm}^{s} + c_{\ell j}^{m}c_{km}^{s} + c_{jk}^{m}c_{lm}^{s}\right] = 0 \qquad (3.59)$$

και επειδή οι γεννήτορες J_k είναι ερμιτιανοί, από την (3.58) συμπεραίνουμε ότι οι δομικές σταθερές είναι καθαρά φανταστικοί αριθμοί. Η πρώτη των σχέσεων (3.59) οφείλεται στην αντιμεταθετικότητα και η δεύτερη στην προσεταιριστικότητα του νόμου εσωτερικής συνθέσεως.

Η σπουδαιότητα της Lie-άλγεβρας βρίσκεται στο γεγονός ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε μια αναπαράσταση της Lie-ομάδας ***G*** θεωρώντας μια αναπαράσταση πινάκων της Lie-άλγεβρας ***L***. Έτσι αν μπορέσουμε να βρούμε r τετραγωνικούς πίνακες, έστω τάξης p, που να ικανοποιούν τις σχέσεις μεταθέσεως (3.58) με τις δεδομένες δομικές σταθερές και τους χρησιμοποιήσουμε στη θέση των J_k στη σχέση (3.57), τότε θα έχουμε μια **p-διαστάσεως αναπαράσταση** της Lie-ομάδας ***G***. Σαν κανόνα, μπορούμε να διατυπώσουμε το εξής:

Καθε αναπαράσταση μιας Lie-άλγεβρας μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δώσει μια αναπαράσταση της αντίστοιχης Lie-ομάδας.

Σαν παράδειγμα των παραπάνω θα χρησιμοποιήσουμε την ομάδα SU(2). Οι σχέσεις (3.56) δίνει τους γεννήτορες της, που ικανοποιούν τις σχέσεις μεταθέσεως:

$$[\sigma_j,\sigma_k]=2i\sum_{\ell}\varepsilon_{jk\ell}\sigma_{\ell} \qquad (3.60)$$

όπου $\varepsilon_{jk\ell}$, (σύμβολο των Levi-Civita), είναι ο αντισυμμετρικός τανυστής τάξης 3, του οποίου τα μόνα μη μηδενικά στοιχεία είναι:

$$\varepsilon_{123}=\varepsilon_{231}=\varepsilon_{312}=-\varepsilon_{213}=-\varepsilon_{132}=-\varepsilon_{321}=1 \qquad (3.61)$$

Οι συνιστώσες του τανυστή ε_{jkl} πολλαπλασιασμένοι με 2i αποτελούν τις δομικές σταθερές της ομάδας SU(2). Η Lie-άλγεβρα της SU(2) αποτελείται από το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών των πινάκων σ_x, σ_y, σ_z με πραγματικούς συντελεστές.

Μια άλλη αναπαράσταση της ομάδας SU(2) αποτελούν και οι πίνακες:

$$\lambda_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ \lambda_2=\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ \lambda_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix} \qquad (3.62)$$

οι οποίοι ικανοποιούν τις ίδιες σχέσεις μεταθέσεως: $[\lambda_j,\lambda_k]=2i\sum_{l}\varepsilon_{jkl}\lambda_l$

Η αναπαράσταση αυτή είναι τριών διαστάσεων.

Εύκολα αποδεικνύεται ότι ο μεταθέτης [x,y]=xy-yx ικανοποιεί τις παραπάνω σχέσεις.

Ο ελάχιστος αριθμός των γεννητόρων μιας Lie-ομάδας, που μετατίθενται μεταξύ τους ονομάζεται **τάξη της Lie-ομάδας**. Η τάξη της SO(3) είναι 1 διότι κανένα ζεύγος από τους γεννήτορες L_x, L_y, L_z δεν μετατίθενται. Η τάξη της SO(2) είναι επίσης 1.

Ένας γεννήτορας που μετατίθεται με όλους τους γεννήτορες μιας Lie-ομάδας ονομάζεται **τελεστής Casimir**. Από το θεώρημα του Racah, ο αριθμός των ανεξαρτήτων τελεστών Casimir μιας Lie-ομάδας ισούται με την τάξη της ομάδας. Ο ίδιος ο Casimir είχε αναγνωρίσει ότι ένας τέτοιος τελεστής πάντα μπορεί να κατασκευαστεί παίρνοντας έναν κατάλληλο διγραμμικό συνδυασμό των γεννητόρων.

Η Ομάδα SO(3) έχει έναν και μόνο έναν τελεστή Casimir, που είναι ο

$$L^2 \equiv L_x^2+L_y^2+L_z^2$$

που μετατίθεται με καθ' ένα από τους L_x, L_y, L_z . Η Ομάδα SU(2) επίσης έχει έναν μόνο τελεστή Casimir τον $\sigma^2 \equiv \sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2$.

Παράδειγμα 1: Για την ίδια Lie ομάδα SO(2), (βλέπε παράδειγμα 1, παρ. 3.2.1), θεωρούμε την αναπαράσταση: $R(\theta)=e^{i\theta}$ με αντίστοιχο μοναδικό γεννήτορα τον J=1. Ο γεννήτορας J παράγει τον διανυσματικό χώρο R των πραγματικών αριθμών, ο οποίος είναι και Lie άλγεβρα με δεύτερο νόμο εσωτερικής συνθέσεως τον πολλαπλασιασμό, ο οποίος ορίζει την τετριμμένη Lie παρένθεση: [α,β]=αβ-βα=0. Προφανώς εδώ οι δομικές σταθερές c^j_{kl} είναι όλες μηδέν.

Παράδειγμα 2: Για την Lie ομάδα SO(2), (βλέπε παράδειγμα 2, παρ.3.2.1), θεωρούμε την αναπαράσταση: $R(\theta)=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ με αντίστοιχο μοναδικό γεννήτορα: $J=\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$.

Ο γεννήτορας J παράγει τον διανυσματικό υπόχωρο *U* των πινάκων 2×2 με φανταστικά στοιχεία, δηλ. $U=\{ M \,/\, M=\alpha J,\ \alpha\in R\}$. Ο διανυσματικός αυτός υπόχωρος *U* αποτελεί και Lie άλγεβρα με δεύτερο νόμο εσωτερικής συνθέσεως την τετριμμένη Lie παρένθεση: [J,J]=JJ-JJ=0=0J. Προφανώς οι δομικές σταθερές c^j_{kl} είναι όλες μηδέν.

Παράδειγμα 3: Για την ίδια Lie ομάδα SO(2) θεωρούμε την αναπαράσταση: R(θ), με $R(\theta)=\exp\left(\rho\theta\frac{\partial}{\partial x}\right)$, (βλέπε παράδειγμα 3 παρ. 3.2.1), με αντίστοιχο μοναδικό γεννήτορα τον $J=-i\rho\frac{\partial}{\partial x}$. Ο γεννήτορας J παράγει τον διανυσματικό χώρο των τελεστών $U=\{F/F=\alpha J,\ \alpha\in R\}$, ο οποίος είναι και Lie άλγεβρα με δεύτερο νόμο εσωτερικής συνθέσεως την τετριμμένη Lie παρένθεση: [F,G]=FG-GF=αJβJ-βJαJ=αβ(J-J)=0. Προφανώς και εδώ οι δομικές σταθερές $c^j_{k\ell}$ είναι όλες μηδέν.

Παράδειγμα 4: Για την ίδια Lie ομάδα SO(2) θεωρούμε την αναπαράσταση: R(θ), με $R(\theta)=\exp\left(-i\theta\frac{L_z}{\hbar}\right)$, (βλέπε παράδειγμα 4 παρ. 3.2.1), με αντίστοιχο μοναδικό γεννήτορα τον

$J=-i\left(y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y}\right)=-\frac{L_z}{\hbar}$. Ο γεννήτορας J παράγει τον διανυσματικό χώρο των τελεστών $U=\{F/F=\alpha J,\ \alpha\in R\}$, ο οποίος είναι και Lie άλγεβρα με δεύτερο νόμο εσωτερικής συνθέσεως την τετριμμένη Lie παρένθεση: $[F,G]=FG-GF=\alpha J\beta J-\beta J\alpha J=\alpha\beta(J-J)=0$. Προφανώς και εδώ οι δομικές σταθερές $c^j_{k\ell}$ είναι όλες μηδέν.

Παράδειγμα 5: Για την Lie ομάδα SO(3), (βλέπε παρ. 3.3), θεωρούμε τους γεννήτορες:

$$J_x=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix},\quad J_y=\begin{pmatrix}0&0&-i\\0&0&0\\i&0&0\end{pmatrix},\quad J_z=\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&&0\end{pmatrix}$$

Οι γεννήτορες J_x, J_y, J_z παράγουν τον διανυσματικό υπόχωρο U των πινάκων 3×3 με φανταστικά στοιχεία, δηλ. $U=\{\ M\ /\ M=\alpha J_x+\beta J_y+\gamma J_z,\ \ \alpha,\beta,\gamma\in R\}$. Ο διανυσματικός αυτός υπόχωρος U αποτελεί και Lie άλγεβρα με δεύτερο νόμο εσωτερικής συνθέσεως την Lie παρένθεση. Συγκεκριμένα έχουμε:

$$[J_x,J_y]=iJ_z,\qquad [J_y,J_z]=iJ_x,\qquad [J_z,J_x]=iJ_y$$

Από τις σχέσεις αυτές προκύπτουν οι δομικές σταθερές, οι οποίες ταυτίζονται με τον αντισυμμετρικό τανυστή των Levi-Civita: $c^j_{k\ell}=\varepsilon_{ik\ell}$.

3.11 Η ειδική μοναδιαία ομάδα SU(3).

Η ομάδα SU(3) αποτελείται από όλους τους μοναδιαίους πίνακες τάξης 3 με ορίζουσα +1. Έχει 3^2-1=8 γεννήτορες, οι οποίοι συνήθως συμβολίζονται με λ_1, λ_2, …, λ_8 και μπορούν να επιλεγούν κατά πολλούς τρόπους. Έχει καθιερωθεί να χρησιμοποιούνται οι εξής πίνακες:

$$\lambda_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ \lambda_2=\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ \lambda_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ \lambda_4=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},$$

$$\lambda_5=\begin{pmatrix}0&0&-i\\0&0&0\\i&0&0\end{pmatrix},\ \lambda_6=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\ \lambda_7=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix},\ \lambda_8=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

(3.64)

Οι μεταθέτες των γεννητόρων είναι:

$$[\lambda_j,\lambda_k]=2i\sum_\ell c_{jk\ell}\lambda_\ell$$

όπου οι μόνες μη μηδενικές συνιστώσες του τανυστή $c_{jk\ell}$ είναι:

$c_{123}=1$

$c_{147}=c_{516}=c_{246}=c_{257}=c_{345}=c_{637}=1/2$

$$c_{458}=c_{678}=\sqrt{3/2} \tag{3.66}$$

Οι δομικές αυτές σταθερές είναι μια χαρακτηριστική ιδιότητα της ομάδας SU(3) και δεν εξαρτώνται από την συγκεκριμένη αναπαράσταση (3.64).

Οι πίνακες λ_3 και λ_8 είναι διαγώνιοι και επομένως μετατίθενται μεταξύ τους. Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι κανένας άλλος πίνακας δεν μετατίθεται με τους λ_3 και λ_8 . Η τάξη επομένως της ομάδας SU(3) είναι 2.

Η ομάδα SU(3) έχει επίσης δυο τελεστές Casimir. Ένας από αυτούς είναι ένας τετραγωνικός συνδυασμός των γεννητόρων:

$$C_1=\sum_{i=1}^{8}\lambda_i^2 \tag{3.67}$$

Ο άλλος τελεστής Casimir δίνεται από έναν πολύπλοκο τριγραμμικό συνδυασμό των γεννητόρων.

3.12 Φυσικές εφαρμογές των ομάδων SU(2) και SU(3)

Είναι γνωστό από την φυσική ότι η κατάσταση ενός ηλεκτρονίου περιγράφεται από τις γνωστές κυματοσυναρτήσεις, που ονομάζονται σφαιρικές αρμονικές $Y_l^m(\theta,\varphi)$. Οι κυματοσυναρτήσεις αυτές γεννούν την μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση $D^{(l)}$ της SO(3) ομάδας βάσει της σχέσεως:

$$R(\alpha,\beta,\gamma)Y_\ell^m(\theta,\varphi)=\sum_{m'=-1}^{\ell} Y_\ell^{m'}(\theta,\varphi)D_{m'm}^{(1)}(\alpha,\beta,\gamma)$$

Οι κυματοσυναρτήσεις, που περιγράφουν το spin ενός ηλεκτρονίου, και που ονομάζονται **spin συναρτήσεις**, γεννούν τις αναπαραστάσεις της SU(2) ομάδας. Ας θεωρήσουμε τώρα ένα ηλεκτρόνιο με spin στροφορμής $s=1/2\hbar\sigma$, όπου $\sigma\equiv(\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z)$ και σ_i οι spin πίνακες του Pauli. Οι δυο ορθοκανονικές spin συναρτήσεις, που συμβολίζονται με χ(1/2) και χ(-1/2), είναι συγχρόνως ιδιοσυναρτήσεις των τελεστών s^2 και s_z. Κάτω από ένα ορθογώνιο μετασχηματισμό συντεταγμένων, οι spin αυτές συναρτήσεις υφίστανται έναν μοναδιαίο μετασχηματισμό στον μιγαδικό 2-διαστάσεων χώρο Hilbert, που παράγεται από τα βασικά διανύσματα χ(1/2) και χ(-1/2). Ο χώρος αυτός λέγεται **χώρος spinor** και κάθε διάνυσμα του, (που είναι γραμμικοί συνδυασμοί των βασικών διανυσμάτων), λέγονται **spinor**. Οι spin συναρτήσεις χ(1/2) και χ(-1/2) γεννούν μια 2-διαστάσεων αναπαράσταση της SU(2), η οποία ταυτίζεται με την D.

Ας θεωρήσουμε στην συνέχεια την περίπτωση δυο ηλεκτρονίων. Αφού οι spin συναρτήσεις του καθένα ηλεκτρονίου μετασχηματίζονται σύμφωνα με την αναπαράσταση $D^{(½)}$, οι spin συναρτήσεις του σύνθετου συστήματος θα μετασχηματίζονται σύμφωνα με την αναπαράσταση του ευθέως γινομένου $D^{(½)}\otimes D^{(½)}$ που είναι μια τεσσάρων διαστάσεων αναπαράσταση της SU(2) ομάδας.

Η ομάδα SU(2) βρίσκει άλλη μια σπουδαία εφαρμογή στη διατύπωση του ισοτοπικού spin των στοιχειωδών σωματιδίων. Στον μακρύ κατάλογο των στοιχειωδών σωματιδίων, μπορούμε να δούμε ότι υπάρχει ένας μεγάλος αριθμός ζευγών, τέτοιων ώστε τα δυο μέλη κάθε ζεύγους έχουν πρακτικά ταυτόσημες ιδιότητες εκτός από το ηλεκτρικό φορτίο τους. Ένα παράδειγμα των παραπάνω είναι το ζεύγος, που αποτελείται από ένα πρωτόνιο και ένα νετρόνιο, των οποίων όλες σχεδόν οι ιδιότητες είναι ίδιες εκτός από τις ηλεκτρομαγνητικές. Μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε το πρωτόνιο και το νετρόνιο σαν δυο καταστάσεις ενός νουκλεονικού πεδίου. Συμβολίζουμε τις καταστάσεις με |p> και |n> και ορίζουμε ένα τελεστή τ_3, που ικανοποιεί τις παρακάτω εξισώσεις ιδιοτιμών:

$$\tau_3|p\rangle=\frac{1}{2}|p\rangle\ ,\quad \tau_3|n\rangle=-\frac{1}{2}|n\rangle$$

Οι καταστάσεις $|p\rangle$ και $|n\rangle$ γεννούν ένα χώρο Hilbert 2-διαστάσεων στον οποίο ο τελεστής τ_3 θα έχει την ίδια αναπαράσταση όπως και ο σ_z. Κατά αναλογία με το πρόβλημα του spin του ηλεκτρονίου, κάνουμε την υπόθεση ότι υπάρχει ένας τελεστής τ, που θα ονομάζεται τελεστής του ισοτοπικού spin, και που δίνεται από την σχέση:

$$\tau^2=\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2$$

όπου τ_1, τ_2, τ_3 είναι οι συνιστώσες του διανυσματικού τελεστή τ. Ο μαθηματικός φορμαλισμός είναι ακριβώς παρόμοιος με το πρόβλημα του spin του ηλεκτρονίου. Όπως θεωρούμε το ηλεκτρόνιο σαν ένα σωμάτιο με δυο καταστάσεις: spin "πάνω" και spin "κάτω", και όχι σαν δυο διαφορετικά σωμάτια, έτσι πρέπει να θεωρούμε το ζεύγος του πρωτονίου και του νετρονίου σαν δυο διαφορετικές καταστάσεις ενός σωματίου, του "νουκλεονίου". Πρέπει να γίνει αντιληπτό ότι η σύμπτωση μεταξύ των δυο περιπτώσεων δεν είναι τυχαία. Προκύπτει από το γεγονός ότι στην κβαντομηχανική, σε αντίθεση προς την κλασική μηχανική, η έννοια της στροφορμής είναι καθαρά μια μαθηματική έννοια που αντιστοιχεί σε κάποια φυσικά παρατηρίσιμα μεγέθη. (Στην κλασική μηχανική μπορούμε να πούμε πολύ απλοϊκά ότι η στροφορμή δηλώνει κάτι που κινείται γύρω από κάποιον άξονα πάνω σε καθορισμένη κλειστή τροχιά. Στην κβαντομηχανική όμως δεν έχει νόημα η τροχιά).

3.13 Μερικές ενδιαφέρουσες έννοιες και παραδείγματα των Lie-αλγεβρών

Προκειμένου να γίνουν εύκολα κατανοητές οι παρακάτω έννοιες, είναι σκόπιμο να αναφερθούμε σε κάποιες πολύ γνωστές Lie-άλγεβρες που χρησιμοποιούνται στη Φυσική. Αντί των χωρικών μεταβλητών x, y, z θα χρησιμοποιήσουμε τα σύμβολα x_1, x_2, x_3 για να γράφονται οι τύποι σε πιο συμπυκνωμένη μορφή.

Α) **so(3) Lie-άλγεβρα των περιστροφών** . Είδαμε στην παράγραφο 3.6.1 ότι η μονοπαραμετρική ομάδα των περιστροφών γύρω από τον άξονα OZ, η SO(2), έχει ένα γεννήτορα, που μπορεί να πάρει την διαφορική μορφή:

$$J=-i\left(y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

Θεωρούμε τώρα τους διαφορικούς τελεστές:

$$R_k=x_j\frac{\partial}{\partial x_i}-x_i\frac{\partial}{\partial x_j}\qquad i,j,k=1,2,3$$

όπου τα i, j, k γράφονται σε κυκλική σειρά. Οι τελεστές αυτοί παριστάνουν περιστροφές γύρω από τους άξονες OX_1, OX_2, OX_3. Το σύνολο αυτών των τριών διαφορικών τελεστών μπορούν να θεωρηθούν σαν γεννήτορες της Lie-ομάδας περιστροφών SO(3). Εάν πάρουμε τους μεταθέτες αυτών των διαφορικών τελεστών, θα βρούμε:

$$[R_i, R_j]=\varepsilon_{ijk}R_k$$

(Ας μη ξεχνάμε ότι οι τελεστές αυτοί επενεργούν πάνω στον διανυσματικό χώρο $C^\infty(R^3)$ των απείρως διαφορισίμων συναρτήσεων $f(x_1, x_2, x_3)$ τριών μεταβλητών). Το σύνολο των γραμμικών συνδυασμών αυτών των τριών διαφορικών τελεστών αποτελεί μια Lie-άλγεβρα, που θα την συμβολίζουμε με so(3).

Β) **t(3) Lie-άλγεβρα των μετατοπίσεων**. Ένα άλλο παράδειγμα Lie-άλγεβρας είναι η άλγεβρα των μετατοπίσεων, που παράγεται από τους τρεις διαφορικούς τελεστές:

$$P_i = \frac{\partial}{\partial x_1} \qquad i=1,2,3$$

Οι τελεστές αυτοί επενεργούν πάνω στο διανυσματικό χώρο $C^{\infty}(R)$ των απείρως διαφορισίμων συναρτήσεων $f(x_i)$ μιας μεταβλητής και έχουν την εξής ενδιαφέρουσα ιδιότητα

$$e^{\alpha P_i} f\left(x_i\right) = \exp\left(\alpha \frac{\partial}{\partial x_1}\right) f\left(x_i\right) = f\left(x_i + \alpha\right)$$

μετατοπίζουν δηλαδή το όρισμα της συνάρτησης $f(x_i)$ κατά α.

Το σύνολο των τριών αυτών τελεστών: $\{P_1, P_2, P_3\}$ δημιουργεί μια Lie-άλγεβρα, που συμβολίζεται με t(3) και ονομάζεται Lie-άλγεβρα των μετατοπίσεων.

Γ) **e(3) η Ευκλείδεια Lie-άλγεβρα**. Εάν θεωρήσουμε τώρα το σύνολο των παραπάνω έξι διαφορικών τελεστών:

$$\{P_1, P_2, P_3, R_1, R_2, R_3\}$$

Το σύνολο αυτό παράγει μια νέα άλγεβρα την e(3) με μεταθέτες:

$$[R_i, R_j]=\varepsilon_{ijk}R_k$$

$$[R_i, P_j]=\varepsilon_{ijk}P_k$$

$$[P_i, P_j]=0$$

Η άλγεβρα e(3) ονομάζεται ευκλείδεια Lie-άλγεβρα.

Με την βοήθεια αυτών των τριών αλγεβρών προχωρούμε στις παρακάτω έννοιες:

1) **Υποάλγεβρα**: Θεωρούμε μια Lie-άλγεβρα L και ένα υποσύνολο της $S\subset L$. Το υποσύνολο S θα λέγεται υποάλγεβρα της L εάν

α) είναι διανυσματικός υπόχωρος του διανυσματικού χώρου L και

β) να είναι κλειστό ως προς τον μεταθέτη, δηλαδή για κάθε

$$\forall\ s_1, s_2 \in S \ \Rightarrow\ [s_2, s_2]\in S \ \text{ ή ισοδύναμα } [S, S]\subset S$$

Π.χ. η άλγεβρα e(3) έχει 2 υποάλγεβρες: την so(3) και την t(3).

2) **Ευθύ άθροισμα**: Μια Lie-άλγεβρα L είναι το ευθύ άθροισμα των δυο αλγεβρών A και B εάν L=A+B ,(θεωρώντας τα A, B, L σαν διανυσματικούς χώρους), και ο μεταθέτης [A, B]=0. Θα γράφουμε $L=A\oplus B$. Οι άλγεβρες A και B σαφώς είναι υποάλγεβρες της L. Π.χ. η άλγεβρα t(3) είναι το ευθύ άθροισμα των αλγεβρών $\{P_1\},\{P_2\},\{P_3\}$,

3) **Ημιευθύ άθροισμα**: Μια Lie-άλγεβρα L είναι το ημιευθύ άθροισμα των δυο αλγεβρών A και B εάν L=A+B σαν διανυσματικός χώρος αλλά ο μεταθέτης $[A, B]\subset A$.Σε αυτή την περίπτωση θα γράφουμε $L=A\oplus_s B$.
Π.χ. η άλγεβρα e(3) είναι το ημιάθροισμα των t(3) και so(3).

4) **Ιδεώδες**: Μια υποάλγεβρα S της L ονομάζεται ιδεώδες εάν $[S, L]\subset S$.

Π.χ. η υποάλγεβρα t(3) είναι ιδεώδες της άλγεβρας e(3) αλλά η υποάλγεβρα so(3) δεν είναι.

5) **Κέντρο**: Το κέντρο C μιας Lie-άλγεβρας L είναι το μεγαλύτερο ιδεώδες τέτοιο ώστε [L, C]=0. Το κέντρο C είναι μοναδικό.
Π.χ. Το κέντρο της e(3) είναι το μηδέν, ενώ το $\{P_3\}$ είναι το κέντρο της υποάλγεβρας της e(3) που παράγεται από το σύνολο $\{R_3, P_1, P_2, P_3\}$.

6) **Άλγεβρα πηλίκο**: Όπως υπάρχει η έννοια της ομάδας πηλίκο στη θεωρία των ομάδων, έτσι και εδώ μπορούμε να δώσουμε την έννοια της άλγεβρας πηλίκο. Θεωρούμε μια υποάλγεβρα $S \subset L$ της Lie-άλγεβρα L και ένα διάνυσμα $X \in L$. Ορίζουμε το σύνολο:

$$X+S=\{T=X+Y \;/\; Y \in S\}$$

Η παραπάνω σχέση είναι μια σχέση ισοδυναμίας και σαν τέτοια χωρίζει την άλγεβρα L σε κλάσεις. Το σύνολο αυτών των κλάσεων δεν αποτελεί γενικά Lie-άλγεβρα εκτός εάν η υποάλγεβρα S είναι ιδεώδες. Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να ορίσουμε μια Lie-παρένθεση πάνω στο σύνολο των κλάσεων ως εξής:

$$[X+S,\, Y+S]=[X,Y]+S$$

Έτσι το σύνολο των κλάσεων αποτελεί μια Lie-άλγεβρα, η οποία ονομάζεται άλγεβρα πηλίκο και συμβολίζεται: L/S.
Π.χ. η άλγεβρα e(3) και το ιδεώδες της t(3) δημιουργούν μια άλγεβρα πηλίκο e(3)/t(3), η οποία είναι ισομορφική με την so(3).

7) **Επιλύσιμη άλγεβρα**: Το σύνολο των μεταθετών [L, L] είναι ένα ιδεώδες της L, που το συμβολίζουμε με $L^{(1)}=[L, L]$. Ομοίως το $L^{(2)}=[L^{(1)}, L^{(1)}]$ είναι ένα ιδεώδες της $L^{(1)}$. Κατασκευάζουμε την ακολουθία των ιδεωδών: $L^{(n+1)}=[L^{(n)}, L^{(n)}]$. Εάν αυτή η ακολουθία τερματίζεται στο μηδέν, δηλαδή $L^{(n)}=0$, τότε λέμε ότι η άλγεβρα L είναι επιλύσιμη.
Π.χ. $e(3)^{(1)}=e(3) \Rightarrow e(3)^{(n)}=e(3)$. Επομένως η e(3) δεν είναι επιλύσιμη.
Η άλγεβρα $q=\{R_3, P_1, P_2, P_3\}$ είναι επιλύσιμη διότι $q^{(2)}=0$.

Το σύνολο των άνω τριγωνικών πινάκων n×n:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

είναι επιλύσιμη Lie-άλγεβρα.

8) **Μηδενοδύναμη άλγεβρα**: Ας θεωρήσουμε τώρα μια άλλη ακολουθία ιδεωδών, που ορίζεται από τις σχέσεις:

$$L_{(1)}=[L, L],\quad L_{(2)}=[L, L_{(1)}],\quad L_{(3)}=[L, L_{(2)}],\; \ldots,\; L_{(n+1)}=[L, L_{(n)}]$$

Εδώ παρατηρούμε ότι

$$L_{(n+1)} \subseteq L_{(n)} \subseteq \ldots \subseteq L_{(1)}=L^{(1)} \subseteq L$$

Λέμε ότι η άλγεβρα L είναι μηδενοδύναμη εάν η παραπάνω ακολουθία τερματίζει στο μηδέν. Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι $L_{(n)} \supseteq L^{(n)}$, επομένως όταν μια άλγεβρα είναι μηδενοδύναμη, τότε είναι και επιλύσιμη. Το αντίστροφο εν γένει δεν ισχύει.

Π.χ. η άλγεβρα $q=\{R_3, P_1, P_2, P_3\}$ δεν είναι μηδενοδύναμη, αφού $q_{(1)}=\{P_1, P_2\}=q_{(n)}$ για κάθε n.

Η άλγεβρα που περιέχει σαν στοιχεία της τους πίνακες:

$$\begin{pmatrix} \lambda & a_{12} & \cdots & \alpha_{1\nu} \\ 0 & \lambda & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

Είναι μια μηδενοδύναμη άλγεβρα.

9) **Ριζικό μιας άλγεβρας** είναι το μεγαλύτερο επιλύσιμο ιδεώδες. Συμβολίζεται με R, είναι μοναδικό και περιέχει όλα τα άλλα επιλύσιμα ιδεώδη.

Π.χ. το t(3) είναι το ριζικό της ομάδας e(3).

10) **Απλή άλγεβρα**: Μια Lie-άλγεβρα L ονομάζεται απλή εάν δεν περιέχει κανένα γνήσιο ιδεώδες. Δηλαδή περιέχει μόνο τα τετριμμένα ιδεώδη L και {0}.

11) **Ημιαπλή άλγεβρα**: Μια Lie-άλγεβρα L ονομάζεται ημιαπλή εάν δεν περιέχει κανένα αβελιανό ιδεώδες.

Ένα από τα βασικά προβλήματα της θεωρίας των Lie-αλγεβρών είναι η ταξινόμηση τους. Ένα θεμελιώδη ρόλο σ' αυτό το πρόβλημα παίζει το θεώρημα του Levi:

Θεώρημα Levi. Κάθε Lie-άλγεβρα μπορεί να γραφεί σαν ευθύ άθροισμα, (με την έννοια των διανυσματικών χώρων), ως εξής:

$$L=R\oplus S$$

όπου R το ριζικό της L και S μια ήμιαπλή υποάλγεβρα της L.

Π.χ. η Lie άλγεβρα e(3) μπορεί να γραφεί ως: $e(3)=t(3)\oplus so(3)$ αφού η υποάλγεβρα t(3) είναι το ριζικό της e(3) και η υποάλγεβρα so(3) αποτελεί μια ημιαπλή υποάλγεβρα της e(3).

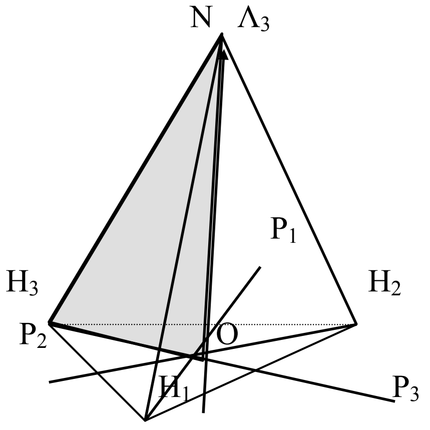
Αν και το ριζικό R μιας Lie άλγεβρας L ορίζεται μονοσήμαντα, το ευθύ άθροισμα $L=R\oplus S$ δεν είναι μοναδικό διότι μπορεί να υπάρχουν πολλές κατάλληλες ημιαπλές υποάλγεβρες. Οι ημιαπλές Lie-άλγεβρες αποτελούν μια σημαντική κλάση Lie-αλγεβρών και παίζουν ένα θεμελιώδη ρόλο στη Γεωμετρία και στη Φυσική. Έναν πλήρη κατάλογο και ταξινόμηση των μιγαδικών ημιαπλών Lie-αλγεβρών δόθηκε από τον Cartan. Η ταξινόμηση των ημιαπλών Lie αλγεβρών περιγράφεται στο παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα: Κάθε ημιαπλή Lie άλγεβρα S μπορεί να γραφεί ως ευθύ άθροισμα απλών αλγεβρών: $S=\oplus S_k$ όπου S_k απλές άλγεβρες.

4. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΟΜΑΔΩΝ ΣΤΗ ΦΥΣΙΚΗ

1. Η συμμετρία της αμμωνίας.

Στο παράδειγμα αυτό θα εξετάσουμε τους τελεστές συμμετρίας μιας ορθής πυραμίδας με βάση ισόπλευρο τρίγωνο της οποίας η κορυφή N παραμένει ακίνητη. (Τέτοια είναι και η συμμετρία του μορίου της αμμωνίας NH_3).



Σχ. 1 Συμμετρία c_{3v}

Τα στοιχεία συμμετρίας είναι :

1. Ένας άξονας συμμετρίας με τάξη 360/120=3 που συμβολίζεται με $Λ_3$. Στο σχήμα είναι ο άξονας NO.
2. Υπάρχουν τρία επίπεδα τα οποία γεννούν συμμετρίες κατοπτρισμού ως προς το επίπεδο . Αυτά είναι τα επίπεδα $NH_1O \leftrightarrow P_1$, $NH_2O \leftrightarrow P_2$, και $NH_3O \leftrightarrow P_3$.

Για να κάνουμε ευκολότερη την καταμέτρηση των συμμετριών μπορούμε να φανταστούμε ότι οι κορυφές H_1,H_2,H_3, έχουν και από ένα διαφορετικό χρώμα .Στην πραγματικότητα όμως οι τρεις κορυφές είναι όμοιες .

Έχουμε τώρα τους εξής τελεστές συμμετρίας :

1. Ακινησία . Αντιστοιχεί στο ταυτοτικό στοιχείο E.

2. Στροφή γύρω από τον άξονα $Λ_3$.
   Στη στροφή κατά γωνία $Φ=120^0$ αντιστοιχεί ο τελεστής C_3 και στην στροφή κατά γωνία $Φ=240^0$ αντιστοιχεί ο τελεστής $C^2{}_3=C_3C_3$.

3. Κατοπτρισμοί $σ_1,σ_2$, και $σ_3$ ως προς τα επίπεδα P_1,P_2, και P_3

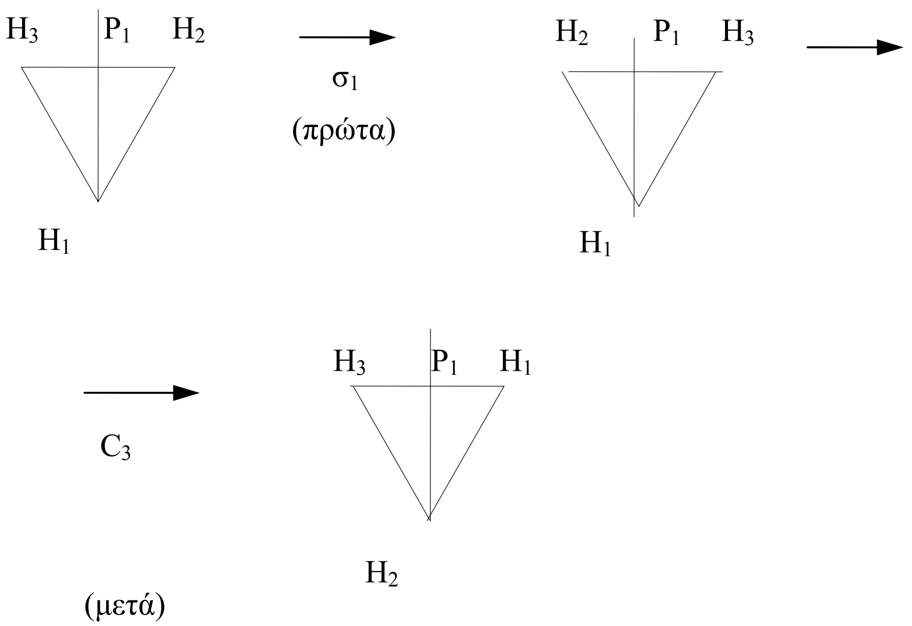
Οι τελεστές αυτοί είναι οι μόνοι που όταν δράσουν στο σύστημα το αφήνουν αναλλοίωτο.

Δεν υπάρχουν άλλοι τελεστές συμμετρίας .

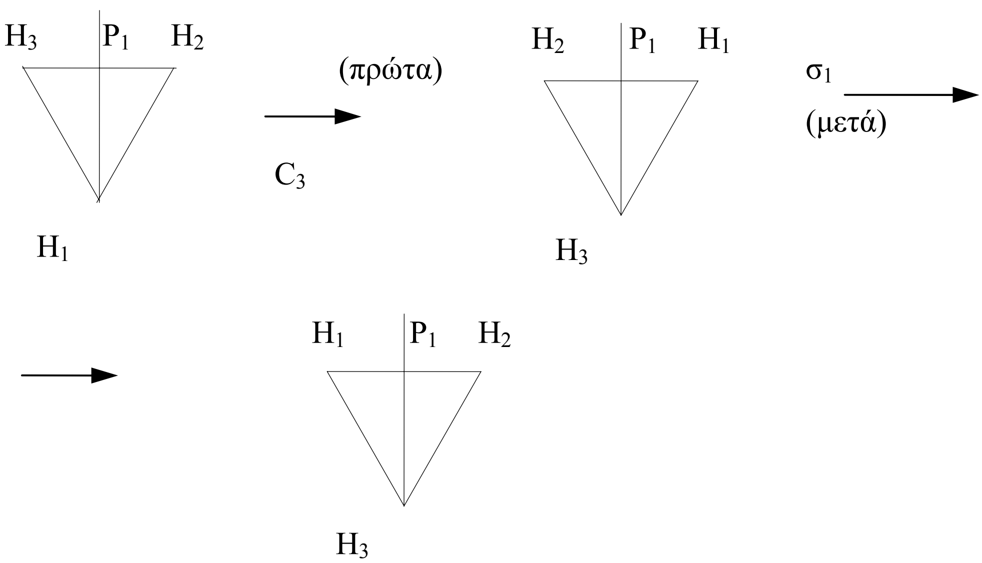
Άρα θεωρούμε το σύνολο :

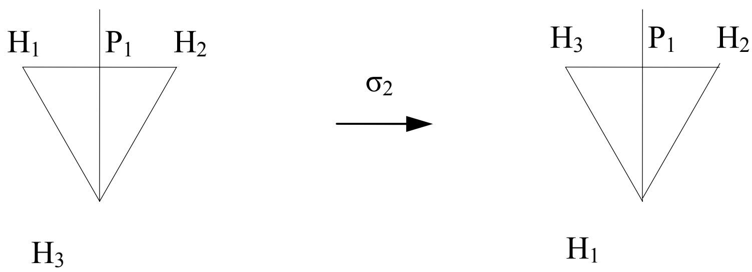
$$C_{3v}=\{E,C_3,C_3^2,σ_1,σ_2,σ_3\}$$

Διαπιστώνουμε ότι η διαδοχική εφαρμογή των σ_1 (πρώτα) και σ_3 (μετά) δίνει



Η τελική κατάσταση μπορεί να επιτευχθεί με μία μόνο πράξη συμμετρίας πάνω στην αρχική κατάσταση, δηλαδή εκείνη που ανταλλάσσει τις κορυφές H_1 και H_2 . Ο αντίστοιχος τελεστής είναι ο σ_3 . Άρα $C_3\sigma_1=\sigma_3$.





προχωρώντας κατά τον ίδιο τρόπο κατασκευάζουμε τον ακολουθώ **πολλαπλασιαστικό πίνακα .**

C_{3v}	E	C_3	C_3^2	σ_1	σ_2	σ_3
E	E	C_3	C_3^2	σ_1	σ_2	σ_3
C_3	C_3	C_3^2	E	σ_3	σ_1	σ_2
C_3^2	C_3^2	E	C_3	σ_2		σ_1
σ_1	σ_1	σ_2	σ_3	E	C_3	C_3^2
σ_2	σ_2	σ_3	σ_1	C_3^2	E	C_3
σ_3	σ_3	σ_1	σ_2	C_3	C_3^2	E

$\sigma_2(C_3\sigma_1)= \sigma_2\ \sigma_3= C_3$

$(\sigma_2 C_3)= \sigma_3\ \sigma_1= C_3$ κ.τ λ

Εύκολα φαίνεται ότι ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα .

Κάθε στοιχείο έχει τον αντίστροφο του που μας δίνεται από τον πολλαπλασιαστικό πίνακα.

Συνεπώς τα στοιχεία $\{E,C_3,C_3^2,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\}$ αποτελούν ομάδα , η οποία συμβολίζεται με το γράμμα C_{3v} .

2. *Η ομάδα των τελεστών μετατοπίσεων*

Με την ανάπτυξη της κβαντομηχανικής στην οποία βασικό ρόλο διαδραματίζει η εξίσωση του κύματος, η θεωρία των ομάδων έχει γίνει ιδιαίτερα σημαντική. Για να δούμε το γιατί θα πρέπει πρώτα να εξετάσουμε και να ορίσουμε τι ακριβώς εννοούμε με τις φράσεις "αναλλοίωτο ως προς τις μετατοπίσεις και "αναλλοίωτο ως προς τις περιστροφές".

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια ομάδα G, από τελεστές $U_1, U_2, U_3,$... οι οποίοι μπορούν να επιδράσουν πάνω στα στοιχεία x ενός διανυσματικού χώρου V . Τα αποτελέσματα της επίδρασης των U_1, U_2, U_3... πάνω στο x θα συμβολίζονται με U_1x, U_2x, U_3x, ... Στον 3-διάστατο χώρο ένα παράδειγμα μιας τέτοιας ομάδας είναι το σύνολο{ $T_{\boldsymbol{\alpha}}$ }, όπου **α** είναι ένα οποιοδήποτε 3-διάστατο διάνυσμα και ο $T_{\boldsymbol{\alpha}}$ δρα στο διάνυσμα σύμφωνα με το νόμο :

$$T_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{r})=\mathbf{r}-\boldsymbol{\alpha} \qquad (1).$$

Έτσι ο $T_{\boldsymbol{\alpha}}$ είναι ένας **τελεστής μετατόπισης** . Εύκολα διαπιστώνουμε ότι υπάρχει μια απειρία τέτοιων τελεστών, εφόσον το **α** μπορεί να είναι οποιοδήποτε διάνυσμα . Το σύνολο αυτών των τελεστών { $T_{\boldsymbol{\alpha}}$ } αποτελεί ομάδα . Η κλειστότητα υπάρχει γιατί το αποτέλεσμα δύο μετατοπίσεων είναι ξανά μια μετατόπιση. Από την εξίσωση ορισμού εύκολα συμπεραίνουμε ότι η ομάδα αυτή είναι και αβελιανή εφόσον ισχύει:

$$T_{\boldsymbol{\alpha}}T_{\boldsymbol{\beta}}=T_{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}}= T_{\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}} =T_{\boldsymbol{\beta}}T_{\boldsymbol{\alpha}}$$

Τέτοιοι τελεστές μπορούν να γενικευτούν σε οποιαδήποτε διάσταση .

Τώρα, ας υποθέσουμε ότι σε αυτόν τον διανυσματικό χώρο έχουμε επιπλέον ορίσει συναρτήσεις f, g, ... οι οποίες αντιστοιχούν το κάθε διάνυσμα σε κάποιον αριθμό. Στον 3-διαστατό χώρο ένα παράδειγμα μιας τέτοιας συνάρτησης είναι η $f(r)=x^4+y^4+z^4$. Γενικά συμβολίζουμε το αποτέλεσμα της δράσης της f πάνω σε ένα διάνυσμα x στο χώρο V με f(x).

Ας δούμε τώρα την επίδραση της f πάνω σε ένα μετασχηματισμένο διάνυσμα $U_i^{-1}(x)$. Ορίζουμε έναν τελεστή $\aleph_i$ ο οποίος δρα πάνω σε συναρτήσεις του x με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε για όλες τις f να ισχύει :

$$\aleph_i f(x)=f(U_i^{-1}x)$$

Τώρα θεωρούμε την ποσότητα $\aleph_i\aleph_j f(x)$. Έχουμε από την παραπάνω εξίσωση :

$$\aleph_i\aleph_j f(x)= \aleph_i f(U_j^{-1}x)=f(U_j^{-1}U_i^{-1})=f([U_iU_j]^{-1}x)$$

Έτσι εάν $U_iU_j=U_k$ τότε $\aleph_i\aleph_j=\aleph_k$ και τα στοιχεία $\aleph_i$, $\aleph_j$..αποτελούν μια ομάδα, *Y,* η οποία είναι ισόμορφη με το G.

Για να τονίσουμε αυτό που έχουμε στο μυαλό μας, ας επεκτείνουμε το παράδειγμα της ομάδας των τελεστών { T_α }, που έχει οριστεί στην εξισώσει (1) και ας θέσουμε το εξής ερώτημα : είναι δυνατόν να βρούμε έναν τελεστή $\Im_\alpha$ τέτοιον ώστε :

$$\Im_\alpha f(\mathbf{r})=f\,(T_{\boldsymbol{\alpha}}^{-1}\,\mathbf{r}\,)= f\,(\mathbf{r}+\boldsymbol{\alpha})$$

Γενικά είναι απαραίτητο να προσδώσουμε κάποιες κατάλληλες ιδιότητες για τις συναρτήσεις f(x), g(x), ... πριν βρούμε την ακριβή έκφραση για τον $\Im_\alpha$. Για λόγους απλότητας θεωρούμε τις συναρτήσεις αναλυτικές έτσι ώστε μπορούμε να αναπτύξουμε κατά σειρά Taylor την $f(\mathbf{r}+\boldsymbol{\alpha})$:

$$f(\mathbf{r}+\boldsymbol{\alpha})=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{n!}[\boldsymbol{\alpha}\nabla]^n f(\mathbf{r})\,.$$

Συμβολικά αυτό γράφεται :

$$f(\mathbf{r}+\boldsymbol{\alpha})=e^{\alpha\nabla}f(\mathbf{r}),$$

έτσι φαίνεται ότι ισχύει:

$$\Im_{\boldsymbol{\alpha}}=e^{\boldsymbol{\alpha}\nabla} \qquad (2)$$

Εάν τώρα μεταφέρουμε αυτόν τον τελεστή στην κβαντομηχανική, θα μπορούσαμε να γράψουμε :

$$\Im_\alpha=e^{i\boldsymbol{\alpha}\,p/h} \qquad (3)$$

όπου $\mathbf{p}= -ih\nabla$ είναι ο τελεστής της ορμής στην κβαντομηχανική .

Όμοια εάν κάποιος σκεφτεί τις περιστροφές ,R_a^z, ενός συστήματος συντεταγμένων γύρω από τον άξονα OZ έτσι ώστε $(r,\theta,\varphi) \rightarrow (r,\theta,\varphi+\alpha)$,τότε ο αντίστοιχος τελεστής θα είναι :

$$\Re_\alpha^z=e^{\alpha\,\partial/\partial\phi}=e^{i\alpha\frac{L_z}{\hbar}}$$

όπου L_Z=-ih$-i\hbar\dfrac{\partial}{\partial\phi}$ είναι ο τελεστής της κβαντομηχανικής για την z-συνιστώσα της ορμής .
Για περιστροφές κατά γωνία β και γ γύρω από τον άξονα ΟΥ και ΟΧ αντίστοιχα έχουμε :

$$\Re_\beta^{y}=e^{i\beta\frac{L_y}{\hbar}}\ ,\quad \Re_\gamma^{\chi}=e^{i\gamma\frac{L_x}{\hbar}} \qquad (4)$$

Ομάδες αυτού του τύπου που χαρακτηρίζονται από το σύνολο των τελεστών $\{\Im_\alpha\}$ ή $\{\Re_\alpha^{z}\}$ ονομάζονται **ομάδες μετασχηματισμών** .

Ας υποθέσουμε τώρα ότι οι συναρτήσεις, τις οποίες αναφέραμε παραπάνω, ανήκουν σε ένα διανυσματικό χώρο Η και σε αυτόν τον χώρο εφαρμόζουμε κάποιον γραμμικό τελεστή A_x . Τώρα αν εφαρμόσουμε πάνω σε οποιαδήποτε f(x)∈H , τον τελεστή A_x δίνει ένα άλλο διάνυσμα g(x) ∈ H :

$$A_x\, f(x)=g(x) \qquad (5)$$

Ο δείκτης x στο A μας εξυπηρετεί στο να μας θυμίζει ότι ο A_x είναι ένας τελεστής σε ένα χώρο συναρτήσεων των οποίων η συμπεριφορά εξαρτάται από το σημείο στο οποίο η συνάρτηση εχει υπολογισθεί, π.χ. μπορεί να έχουμε :

$$A_r=\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Έστω ℵ∈Υ δρα πάνω στην εξισώση (5) . Τότε βρίσκουμε ότι :

$$\aleph A_x\, f(x)=\aleph g(x)=g(U^{-1}x)\ .$$

Εφόσον $\aleph\aleph^{-1}$=I , θα έχουμε :

$$\aleph A_x\aleph^{-1}\aleph f(x)=g(U^{-1}x)$$

ή
$$\aleph A_x\aleph^{-1}f(U^{-1}x)=g(U^{-1}x)$$

Αλλά αφού $A_x f(x)=g(x)$ θα έχουμε επίσης

$$A_{U^{-1}x}f(U^{-1}x)=g(U^{-1}x)$$

Έτσι συμπεραίνουμε ότι :

$$\aleph A_x\aleph^{-1}f(U^{-1}x)= AU^{-1}{}_x f(U^{-1}x)$$

Για κάθε f∈H $\qquad \aleph A_x\aleph^{-1}= AU^{-1}x$

Ο $\aleph A_x\aleph^{-1}$ ονομάζεται **μετασχηματισμένος τελεστής**. Η παραπάνω εξίσωση μας λέει ότι ο τελεστής στο σημείο x είναι ίσος με έναν μη-μετασχηματισμένο τελεστή στο σημείο $U^{-1}x$. Συχνά για λόγους απλότητας για να βρούμε τον μετασχηματισμένο τελεστή, υπολογίζουμε το $A_{x'}$ όπου $A_{x'}$= $U^{-1}x$ αντί του $\aleph A_x\aleph^{-1}$. Τώρα εάν συμβεί ο μετασχηματισμένος τελεστής στο σημείο x να ισούται με τον μη μετασχηματισμένο τελεστή στο σημείο x , δηλ. εάν :

$$\aleph Ax\aleph^{-1}= A_x$$

για κάθε ℵ∈Υ τότε λέμε ότι ο A_x παραμένει αναλλοίωτος υπό την επίδραση της ομάδας Υ.

Όμοια εάν ισχύει για όλα τα $\aleph \in Y$, $\aleph f(x)=f(x)$, τότε λέμε ότι η f είναι αναλλοίωτη υπό την Υ .

Σημειώστε ότι το κριτήριο για να είναι η A_x αναλλοίωτη μπορεί να γράφει ως εξής

$$A_x\aleph= \aleph A_x$$

Με αλλά λόγια , εάν όλα τα $\aleph \in Y$ εναλλάσσονται με το A_x , τότε το A_x παραμένει αναλλοίωτο στο Y. Εύκολα διαπιστώνεται ότι τελεστής

$$A_r=\nabla^2= \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

είναι αναλλοίωτος στο $\Im_\alpha$ για όλα τα **α** , όπου το $\Im_\alpha$ έχει οριστεί από την εξισώση (2) . Αυτό έπεται από το γεγονός ότι οι μερικές παράγωγοι ως προς x,y,z εναλλάσσονται μεταξύ τους και ως εκ τούτου το exp.($a\nabla$) εναλλάσσεται με το ∇^2 . Έτσι μπορούμε να πούμε ότι η Λαπλασιανή είναι αναλλοίωτη ως προς τις μετατοπίσεις. Μια παρόμοια κατάσταση επικρατεί για τους περιστροφικούς τελεστές $\Re_a^{z}$, $\Re_\beta^{y}$, $\Re_\gamma^{x}$, όπως έχουν οριστεί στην εξίσωση (4) . Από την κβαντομηχανική γνωρίζουμε ότι η εξίσωση ∇^2 είναι άμεσα συνδεδεμένη με το $L^2=L^2_x + L^2_{y+} L^2_z$ και εφόσον οι $L_x, L_y, L_z,$ εναλλάσσονται με τον L^2 , βλέπουμε ότι οι περιστροφικοί τελεστές επίσης θα εναλλάσσονται με το L^2 και ως εκ τούτου με το ∇^2 . Έτσι ο ∇^2 είναι αναλλοίωτος ως προς τις περιστροφές .

Ένα **παράδειγμα** μιας συνάρτησης που είναι αναλλοίωτη ως προς τις περιστροφές είναι η f(**r**)=g(r) όπου g είναι μια οποιαδήποτε συνάρτηση και r είναι το μέτρο του **r .** Αυτό έπεται κατευθείαν από το γεγονός ότι $L_x, L_y, L_z,$ εξαρτώνται από τη γωνία θ και φ που οριζουν τον προσανατολισμό του **r** και οχι από το μετρο του **r.**

Για να καταλάβουμε πως λειτουργεί η παραπάνω μεθοδολογία είναι καλύτερα να εξετάσουμε πως έναν τελεστή ο οποίος δεν είναι αναλλοίωτος σε μια ορισμένη ομάδα, π.χ. ας θεωρήσουμε τον τελεστή X_x ο οποίος ορίζεται ως εξής :

$$X_x\ f(x)=xf(x)$$

Θα εξετάσουμε πως αυτός ο τελεστής μετασχηματίζεται υπό την επίδραση των x-μετατοπίσεων τελεστών T_α ($T_\alpha\ x=x-\alpha$, $\forall x$). Μπορούμε να υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό του X_x με δυο τρόπους. Η απλούστερη μέθοδος είναι να κάνουμε χρήση της σχέσης $\Im_\alpha X_x \Im_\alpha^{-1}=XT_\alpha^{-1}x$

Εφόσον $T_\alpha^{-1}x= x+\alpha$, αμέσως έχουμε ότι

$$\Im_\alpha X_x \Im_\alpha^{-1}=X_x+\alpha.$$

Μπορούμε επίσης να συνεχίσουμε εφαρμόζοντας το $\Im_\alpha X_x \Im_\alpha^{-1}$ σε μια τυχαία συνάρτηση :

$$\Im_\alpha X_x \Im_\alpha^{-1}f(x)= \Im_\alpha X_x f(T_\alpha x)= \Im_\alpha X_x f(x-\alpha)=\Im_\alpha X f(x-\alpha)=(x-\alpha)f(x)=(X_x+\alpha)\ f(x).$$

Αυτό είναι ακριβώς και το αποτέλεσμα που θέλαμε. Φαίνεται καθαρά ότι ο τελεστής X_x δεν είναι αναλλοίωτος στις ομάδες των μετατοπίσεων.

Τώρα ας δούμε το πρόβλημα των **ιδιοτιμών**

$$A_x f(x)=\lambda f(x)$$

Ας υποθέσουμε ότι σ' ένα πρόβλημα φυσικής, έχουμε έναν αυτοσυζυγή, (self-adjoint), τελεστή A_x ο οποίος είναι αναλλοίωτος ως προς την ομάδα των τελεστών $\aleph$, της οποίας τα στοιχεία τα σημειώνουμε με U. Τώρα τίθεται η ερώτηση : είναι ο τελεστής A_x αναλλοίωτος ως προς την ομάδα $\aleph$; Για να απαντήσουμε σε αυτή την ερώτηση εφαρμόζουμε το U και στις δυο πλευρές της εξίσωσης και έχουμε :

$$UA_x f(x)=\lambda Uf(x)$$

Εφόσον $$UA_x = A_x U,$$

$$A_x Uf(x)=\lambda Uf(x)$$

Αυτή η εξίσωση μας λέει ότι εάν η f(x) είναι μια ιδιοσυνάρτηση της A_x που αντιστοιχεί στο λ τότε είναι και η Uf(x) είναι ιδιοσυνάρτηση. Αυτό δεν σημαίνει ότι f(x)=Uf(x). Ωστόσο εάν λ είναι μια μη-εκφυλισμένη ιδιοτιμή, τότε συμπεραίνουμε ότι Uf(x) είναι απλά ένα πολλαπλάσιο της f(x) :

$$Uf(x)=D(U)f(x)$$

όπου γράφουμε D(U) για να δώσουμε έμφαση ότι η τιμή του D μπορεί να εξαρτάται από το στοιχείο της ομάδας G που χρησιμοποιείται. Εάν ωστόσο το λ έχει πολλαπλότητα μ, τότε πρέπει να γράψουμε :

$$A_x f_i(x)=\lambda f_i(x)\ , \quad i=1,2,3...,\mu$$

$$A_x Uf_i(x)=\lambda Uf_i(x)\ , \quad i=1,2,3...,\mu$$

Σε αυτήν την περίπτωση πρέπει να πούμε ότι $Uf_i(x)$ είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του συνόλου $\{f_j(x)\}$:

$$Uf_i(x)=\sum_{j=1}^{\mu} D_{ji}(U)f_j(x).$$

Τώρα ας θεωρήσουμε την έκφραση $U_iU_2f_if(x)$, όπου $U_i,U_2\in\aleph$. Από την προηγούμενη εξίσωση έχουμε:

$$U_iU_2f_i(x)=U_i\sum_{j=1}^{\mu} D_{ji}(U_2)f_j(x).=\sum_{j=1}^{\mu} D_{ji}(U_2)U_1f_j(x).$$

Εφόσον $$U_if_j(x)=\sum_{k=1}^{\mu} D_{kj}(U_1)f_k(x).$$

Αλλά επίσης ισχύει $$U_iU_2f_i(x)=\sum_{k=1}^{\mu} D_{ki}(U_1U_2)f_k(x).$$

Συνδυάζοντας τις δυο τελευταίες εξισώσεις έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα

$$\sum_{k=1}^{\mu}[D_{ki}(U_1U_2)-\sum_{j=1}^{\mu} D_{\mu j}(U_1)D_{ji}(U_2)]f_k(x)=0$$

Όμως το σύνολο $\{f_k(x):\kappa=1,2,...\mu\}$είναι γραμμικά ανεξάρτητο , όποτε

$$D_{ki}(U_1U_2)=\sum_{j=1}^{\mu} D_{kj}(U_1)D_{ji}(U_2)$$

για κάθε i,k=1,2...μ. Έτσι οι πίνακες $D(U_1),D(U_2)$,...δημιουργούν μια ομάδα η οποία είναι ομομορφική ως προς την ομάδα G και την ομάδα $\aleph$. Ένα τέτοιο σύνολο πινάκων ονομάζεται **αναπαράσταση** της ομάδας G. Μια αναπαράσταση της ομάδας G είναι μια ομομορφική απεικόνιση του G σε ένα σύνολο πινάκων πεπερασμένης διάστασης .

Έτσι μπορούμε να δούμε ότι υπάρχει μια στενή σχέση ανάμεσα στις συμμετρίες και στους εκφυλισμούς στα προβλήματα ιδιοτιμών της φυσικής. Για παράδειγμα στην κβαντομηχανική έχουμε συχνά την περίπτωση η χαμιλτόνια να είναι περιστροφικά αναλλοίωτη ως προς τις περιστροφές. Θα περιμέναμε ότι οι ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν σε κάποιο εκφυλισμένο επίπεδο ενέργειας να μετασχηματίζονται μεταξύ τους από τις περιστροφές και έτσι να έχουμε μια αναπαράσταση η οποία να αποτελεί μια ομάδα περιστροφών. Εφόσον ο εκφυλισμός τείνει να γίνει κανόνας παρά η εξαίρεση στα προβλήματα φυσικής, δεν πρέπει να αποτελεί έκπληξη ότι οι αναπαραστάσεις ομάδων παίζουν σημαντικό ρόλο στη φυσική.

3. Η ομάδα μεταφοράς στο χώρο

Ο κρύσταλλος σε αντίθεση με τα μόρια χαρακτηρίζεται από μεταφορική συμμετρία δηλαδή είναι μεταφορική επανάληψη ενός συνόλου σωματιδίων. Το διάνυσμα μεταφοράς $\vec{\alpha}$ στην περίπτωση ενός κρυστάλλου δεν είναι αυθαίρετο αλλά ορίζεται με την βοήθεια τριών βασικών (μη επιπέδων) διανυσμάτων $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2$ και $\vec{\alpha}_3$ ως εξής:

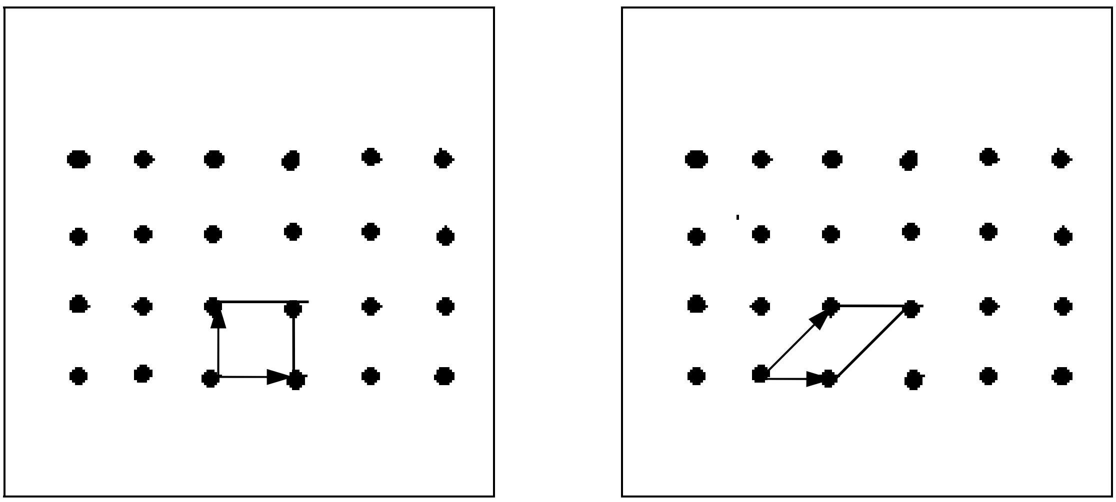
$$\vec{\alpha} = n_1\vec{\alpha}_1 + n_2\vec{\alpha}_2 + n_3\vec{\alpha}_3 \tag{1}$$

όπου n_1, n_2, n_3 είναι ακέραιοι. Τα διανύσματα $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2$ και $\vec{\alpha}_3$ δεν είναι αναγκαστικά ορθογώνια. Έτσι δυο ισοδύναμα σημεία πάνω στον κρύσταλλο καθορίζονται από διανύσματα $\vec{r}$ και $\vec{r}'$ αντίστοιχα τα οποία σχετίζονται ως εξής:

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{\alpha} \tag{2}$$

όπου το $\vec{\alpha}$ δίνεται από την (1).

Αν τώρα σχεδιάσουμε όλα τα δυνατά διανύσματα $\vec{\alpha}$, τα πέρατα τους σχηματίζουν μια κυψελίδα η οποία είναι γνωστή σαν κυψελίδα Bravais και χαραχτηρίζει έναν κρύσταλλο. Τα πέρατα των διανυσμάτων αυτών χαρακτηρίζουν τις κυψελίδες θέσης. Τρία βασικά κυψελικά διανύσματα έχουν την προφανή ιδιότητα : Το στοιχειώδες παραλληλεπίπεδο που σχηματίζουν δεν περιέχει κυψελική θέση. Όπως φαίνεται από το σχήμα η εκλογή βάσης



Σχ. 1 Δυο δυνατές επιλογές σε μια διδιάστατη κυψελίδα Το εμβαδόν και στις δυο κυψελίδες είναι το ίδιο.

ίδιων διανυσμάτων δεν είναι μονοσήμαντη. Όμως ο όγκος του στοιχειώδους παραλληλεπίπεδου είναι πάντα ο ίδιος. Οι διάφορες κυψελίδες Bravais που συναντούμε είναι το κυβικό, τετραγωνικό, εξαγωνικό, τριγωνικό, ορθορομβικό, και το τρίκλινες. Κύριο χαρακτηριστικό της κάθε μίας είναι η μετρική της που ορίζεται από τη σχέση:

$$g_{ij} = \vec{\alpha}_i \cdot \vec{\alpha}_j \qquad (3)$$

Οι περιστροφικές συμμετρίες οι οποίες είναι συνεπείς με την μεταφορική συμμετρία δίνονται από τον ακόλουθο **πίνακα:**

cosθ	θ	τάξη του άξονα
-1	π	n=2
-½	2π/3	n=3
0	π/2	n=4
½	π/3	n=6
1	0	n=1

Προφανώς οι μετασχηματισμοί (2) αποτελούν μια ομάδα η οποία λέγεται μεταφορική και δηλώνεται με το γράμμα $\mathrm{T}(\vec{\alpha})$. Έχουμε :

$$\begin{aligned} &\mathrm{T}(\vec{\alpha})\vec{r} = \vec{r} + \vec{\alpha} \\ &\mathrm{T}(\vec{b})\mathrm{T}(\vec{\alpha})\vec{r} = \mathrm{T}(\vec{b})\,(\vec{\alpha} + \vec{r}) = \vec{r} + \vec{\alpha} + \vec{b} + \mathrm{T}(\vec{\alpha} + \vec{b}) \qquad (4) \\ &(\mathrm{T}(\vec{\alpha}))^{-1} = T(-\alpha) \end{aligned}$$

4. *Κρυσταλλικές συμμετρίες*

Εκτός από την μεταφορική συμμετρία η κυψελίδα Bravais έχει και μια συμμετρία σημείου , δηλαδή στροφές και ανακλάσεις. Έστω ότι η ομάδα αυτή είναι G_0. Έστω ότι η G_0 στο σύνολο των κυψελικών διανυσμάτων $\vec{a}$ αναπαριστάται από μετασχηματισμούς R. Τότε η απαίτηση να είναι ταυτόχρονα τα διανύσματα $\vec{a}$ και $R\vec{a}$ κυψελιδικά, περιορίζει κατά πολύ τις δυνατές ομάδες G_0. Προφανώς η ομάδα G_0 θα πρέπει υποχρεωτικά να περιέχει το στοιχείο της αναστροφής I. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι εάν υπάρχει στοιχείο μεταφορικής συμμετρίας $\mathrm{T}(\vec{a})$ θα πρέπει να υπάρχει και το στοιχείο $\mathrm{T}(-\vec{a})$.

Η μεταφορική συμμετρία επιβάλλει επίσης περιορισμούς πάνω στις δυνατές στροφές. Π.χ. αν θεωρήσουμε στροφές που στρέφουν ένα κυψελιδικό διάνυσμα $\vec{a}$ κατά μία γωνία θ τότε μία τυπική στροφή σε μια ορθογώνια καρτεσιανή βάση παίρνει τη μορφή :

$$\rho(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Αν η στροφή είναι ανακλοστροφική , δηλαδή γίνεται ταυτόχρονα στροφή και ανάκλαση του άξονα στροφής, παίρνουμε:

$$\rho(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Αν τώρα εκφράσουμε την ίδια στροφή στο σύστημα αξόνων a_1, a_2, a_3 θα πάρουμε έναν πίνακα (ρ′). Επειδή το διάνυσμα $|\vec{a}_i\rangle = R|\vec{a}_i\rangle = \sum_j (\rho')_{ij}|\vec{a}_j\rangle$ θα πρέπει να μπορεί να πάρει τη μορφή (1), θα πρέπει $(\rho')_{ij}$= ακέραιος. Επειδή οι πίνακες (ρ) και (ρ′) εκφράζουν το ίδιο πράγμα σε δύο διαφορετικές βάσεις θα είναι αναγκαστικά όμοιοι, δηλαδή υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας (5) τέτοιος ώστε :

$$(\rho')=(S)^{-1}(\rho)(S) \qquad (5)$$

Επειδή το ίχνος ενός πίνακα παραμένει αναλλοίωτο κάτω από την επίδραση μετασχηματισμού ομοιότητας έχουμε :

$$\mathrm{tr}(\rho') = \mathrm{tr}(\rho)$$

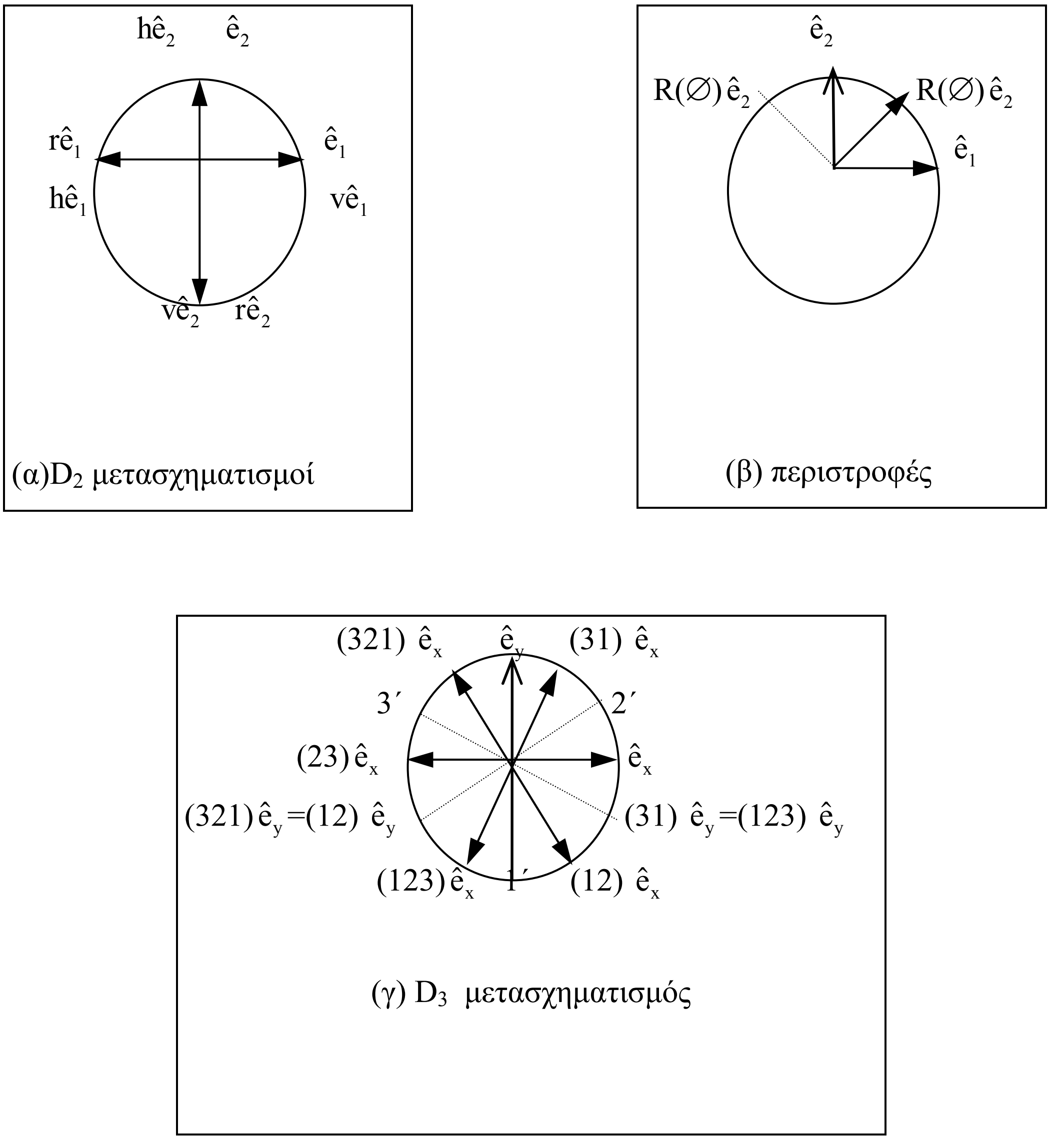
Αλλά tr(ρ)=ακέραιος και $\mathrm{tr}(\rho)=2\cos\theta \pm 1$. Συνεπώς η γωνία θ θα πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση :

$$2\cos\theta = \text{ακέραιος} \Rightarrow \cos\theta = \pm 1, \pm\frac{1}{2}, 0$$

Έτσι οι δυνατές τάξεις των αξόνων περιστροφής θα είναι n=1,2,3,4,6 (όπως φαίνεται στον πίνακα 1.)

5. Η ομάδα dihedral D_2

Έστω G η dihedral D_2 ομάδα αποτελούμενη από τα στοιχεία e (ουδέτερο στοιχείο), h (ανάκλαση σε οριζόντια διεύθυνση), u (ανάκλαση σε κάθετη διεύθυνση) και r (περιστροφή γύρω από την αρχή των αξόνων κατά γωνία π). Και έστω V_2 είναι ο διδιάστατος ευκλείδειος χώρος με βασικά διανύσματα ($\vec{e}_1, \vec{e}_2$). Από το σχήμα.1 έχουμε :



Σχήμα 1. Αναπαραστάσεις τριών διαφορετικών ομάδων στον 2-διάστατο χώρο

6. Η ομάδα των συνεχών περιστροφών

Έστω G μια ομάδα των συνεχών περιστροφών στο επίπεδο γύρω από την αρχή των αξόνων O, $G=\{R(\varphi), 0\leq\varphi\leq\pi\}$. Έστω V_2 διδιάστατος ευκλείδειος χώρος.

Εφόσον (σχήμα 1.β)

$$\hat{e}_1{}'=U(\varphi)\hat{e}_1 = \hat{e}_1\cos\varphi+\hat{e}_2\sin\varphi$$

$$\hat{e}_2{}'=U(\varphi)= \hat{e}_1(-\sin\varphi)+\hat{e}_2\cos\varphi$$

προκύπτει :

$$D(\varphi)=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}$$

Σημειώνουμε ότι εάν το x ήταν ένα αυθαίρετο διάνυσμα του V_2, $x_2=e_i x^\iota$, τότε

$$x'=U(\varphi)x=e_i x^\iota$$

$$x'^j=D(\varphi)^j{}_\iota x^\iota \quad ;$$

ή

$$\begin{bmatrix}x'^1\\ x'^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x^1\\ x^2\end{bmatrix}$$

Εφαρμόζοντας 2 περιστροφές των γωνιών φ και θ μπορεί να εξακριβωθεί ότι το αποτέλεσμα του γινόμενου των πινάκων D(φ)D(θ) είναι το ίδιο με μία περιστροφή υπό (φ+θ), το D(φ+θ). Οπότε το {U(φ)} παρέχει μια διδιάστατης αναπαράσταση της ομάδας των περιστροφών {R(φ)∈R(2)}. Αντίστοιχα {D(φ)} είναι η πινακοειδής αναπαράσταση της {U(φ)} στην συγκεκριμένη βάση $\{e_i\}$

7. Η Ομάδα dihedral D_3

Έστω G η dihedral ομάδα D_3 αποτελούμενη από 3 ανακλάσεις και ε περιστροφές. Και πάλι V_2 είναι ο διδιάστατος ευκλείδειος χώρος. Τα δύο διανύσματα βάσης $\{\hat{e}_i\}$ μετασχηματίζονται υπό την ομάδα τελεστών . Εφαρμόζοντας τα μετασχηματισμένα διανύσματα U(g)$\{\hat{e}_i\}$ με όρους της κανονικής βάσης διανυσμάτων :

$$U(g)\left|e_i\right\rangle=\left|e_j\right\rangle D(g)^j_i\,,g\in G$$

Θα κερδίσουμε 6-διδιάστατους πίνακες {D(g)} = την αναπαράσταση της ομάδας D_3. Εφόσον η D_3 ομάδα είναι ισομορφική με την συμμετρική ομάδα S_3 αυτοί οι πίνακες περιέχουν μια αναπαράσταση και για την S_3 επίσης.

Από τα τρία τελευταία παραδείγματα έχουμε την αναπαράσταση διαφορετικών ομάδων στον ίδιο διανυσματικό χώρο.

8 . Η ομάδα μετασχηματισμών

Έστω V_f ο χώρος των complex linear homogeneous συναρτήσεων f δύο μεταβλητών (x,y):

$$f(x,y)=ax+by$$

όπου (a,b) αυθαίρετοι complex συντελεστές. Εάν ερμηνεύσουμε τα (x,y) ως στοιχεία ενός διανύσματος x στο διδιάστατο ευκλείδειο χώρο V_2 ,(xy)≡ (x^1,x^2) τότε οι τελεστές ομάδος από οποιοδήποτε από τα τρία προηγούμενα παραδείγματα θα παράγουν τον ακόλουθο μετασχηματισμό στο χώρο συναρτήσεων V_f :

$$f\xrightarrow{g\in G}f'(x^1,x^2)\equiv(x'^1,x'^2)\qquad(1)$$

Όπου $x' = U(g^{-1})x$. Θα πρέπει να δείξουμε ότι η αντιστοιχία (στο χώρο συναρτήσεων V_f) τις σχέσεις (1) είναι ομομορφισμός ,γιατί εάν $g''g' = g$ τότε :

$$f \xrightarrow{g'} f' \qquad f'(x) = f(U(g')^{-1} x \qquad (2)$$

$$f' \xrightarrow{g''} f \qquad f''(x) = f'(U(g'')^{-1} x \qquad (3)$$

Αντικαθιστώντας το f΄ της πρώτης εξίσωσης στο δεξιό μέρος της δεύτερης εξίσωσης έχουμε:

$$f''(x) = f\,[U(g')^{-1}U(g'')^{-1}x] = f\,[U(g''g')^{-1}x] = f\,[U(g)^{-1}x]$$

$$\text{ή} \quad f \xrightarrow{g = g''g'} f'' \qquad f''(x) = f[U(g)^{-1}x]$$

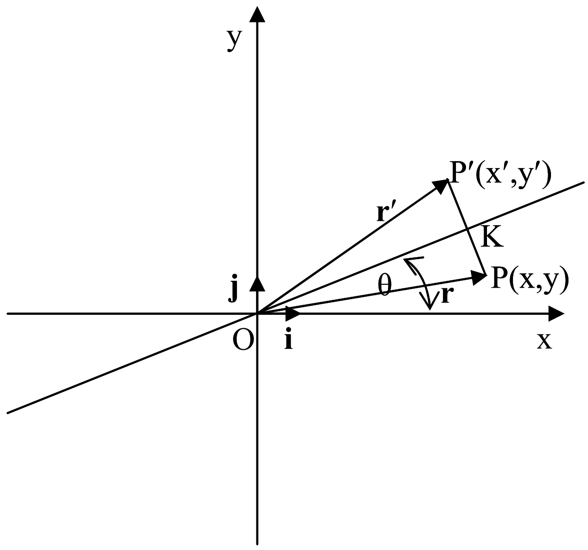
Επομενώς το σύνολο των μετασχηματισμών που ορίζονται στην (1) διαμορφώνουν μια αναπαράσταση της ομάδας G .Ο χώρος των συναρτήσεων στην περίπτωση των δύο διαστάσεων και (λόγω της γραμμικής φύσης της συνάρτησης f) οι αναπαραστάσεις που πραγματώνονται πάνω στο V_F είναι οι ίδιες που πραγματώνονται πάνω στο $\{x \in V_2\}$που περιγράφθηκε στα τρία προηγούμενα παραδείγματα .

Υπάρχουν, φυσικά και άλλοι χώροι συναρτήσεων πάνω στο (x,y) οι οποίοι είναι αυθαίρετα υψηλής διάστασης .

9 *Μια 2×2 αναπαράσταση της ομάδας C_{3v}*

Η ομάδα C_{3v} των συμμετριών του ισοπλεύρου τριγώνου περιέχει περιστροφές, $\{C_3, C_3^2\}$ και ανακλάσεις $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$. Οι περιστροφές αναφέρονται στο επίπεδο του τριγώνου, το οποίο εάν ταυτιστεί με το συντεταγμένο επίπεδο OXY, έτσι ώστε η αρχή O να συμπέσει με την τομή των διαμέσων και η διάμεσος AE να είναι στον άξονα OY, τότε οι περιστροφές μπορούν να γραφούν υπό μορφή πίνακος 2×2 θέτοντας στον γενικό τύπο

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$



που περιγράφει τις περιστροφές, θ=2π/3 για το στοιχείο C_3 και θ=4π/3 για το στοιχείο C_3^2. Έτσι προκύπτουν οι πίνακες:

$$T(C_3) = \begin{bmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

θ=2π/3 $\quad T(C_3^2) = \begin{bmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}$

θ=4π/3

Για να βρούμε αντίστοιχους πίνακες για τις ανακλάσεις σ_1, σ_2, σ_3, παρατηρούμε πρώτα ότι οι ανακλάσεις αυτές είναι συμμετρίες ως προς τις διαμέσους. Μια συμμετρία του επιπέδου OXY ως προς άξονα (ε) που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα OX δίνεται από τον τύπο

$$S(\theta)=\begin{pmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{pmatrix} \qquad (2)$$

Πράγματι έστω P(x, y) τυχόν σημείο του επιπέδου και P′(x′, y′) το συμμετρικό του ως προς τον άξονα (ε). Εάν **e** το μοναδιαίο διάνυσμα το κάθετο προς τον άξονα (ε), τότε

$\mathbf{e}=-\sin\theta\,\mathbf{i}+\cos\theta\,\mathbf{j}$

Επίσης $\mathbf{r}'=\mathbf{OP}'=\mathbf{OP}+\mathbf{PP}'=\mathbf{r}+|\mathbf{PP}'|\mathbf{e}$

αλλά $\mathbf{OK}=\mathbf{r}+1/2|\mathbf{PP}'|\mathbf{e} \Rightarrow 0=\mathbf{OK}\cdot\mathbf{e}=\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}+1/2|\mathbf{PP}'| \Rightarrow |\mathbf{PP}'|=-2\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}$

Άρα $\mathbf{r}'=\mathbf{r}-2(\mathbf{r}\cdot\mathbf{e})\mathbf{e} \Rightarrow$

$x'\mathbf{i}+y'\mathbf{j}= x\mathbf{i}+y\mathbf{j}-2(-x\sin\theta+y\cos\theta)(-\sin\theta\,\mathbf{i}+\cos\theta\,\mathbf{j}) \Rightarrow$

$x'=x(1-2\sin^2\theta)+y\sin 2\theta, \qquad y'=y(1+2\cos^2\theta)+x\sin 2\theta \Rightarrow$

$x'=x\cos 2\theta+y\sin 2\theta, \qquad y'=x\sin 2\theta-y\cos 2\theta \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

Για να βρούμε τώρα τον πίνακα, που αντιστοιχεί στην ανάκλαση σ_1, παρατηρούμε ότι ο άξονας (ε) συμπίπτει, στην περίπτωση αυτή, με τον άξονα OY, δηλαδή η γωνία $\theta=\pi/2$ και επομένως έχουμε:

$$T(\sigma_1)=\begin{pmatrix}\cos\pi & \sin\pi\\ \sin\pi & -\cos\pi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Για την ανάκλαση σ_2 ο άξονας συμμετρίας σχηματίζει γωνία $\theta=\pi/6$ με τον άξονα OX και θα έχουμε:

$$T(\sigma_2)=\begin{pmatrix}\cos\pi/6 & \sin\pi/6\\ \sin\pi/6 & -\cos\pi/6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2 & -\sqrt{3}/2\\ -\sqrt{3}/2 & -1/2\end{pmatrix}$$

Τέλος για την ανάκλαση σ_3 η αντίστοιχη γωνία $\theta=5\pi/6$ και επομένως

$$T(\sigma_3)=\begin{pmatrix}\cos 5\pi/6 & \sin 5\pi/6\\ \sin 5\pi/6 & -\cos 5\pi/6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2 & \sqrt{3}/2\\ \sqrt{3}/2 & -1/2\end{pmatrix}$$

Η παραπάνω αναπαράσταση έχει διάσταση 2 καθ’ όσον οι τελεστές δρουν στον διδιάστατο χώρο.

Εύκολα μπορούμε να βρούμε μια τρισδιάστατη αναπαράσταση θεωρώντας

$$x\to x', \quad y\to y' \quad z\to z'$$

όποτε

$$T'(C_3)=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad T'(C_3)=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ κ.ο.κ.}$$

Η μέθοδος αυτή συμπίπτει με την μέθοδο της επέκτασης.

10. Κατοπτρισμός

Μια άλλη πράξη συμμετρίας είναι ο **κατοπτρισμός** ως προς ένα επίπεδο. Τέτοιου είδους συμμετρία έχει π.χ. το ανθρώπινο σώμα. Η πράξη αυτή συμβολίζεται με το γράμμα σ.

Πολλές φορές προστίθεται ένας δείκτης ο οποίος χαρακτηρίζει το επίπεδο κατοπτρισμού (προβολής).Προφανώς σ^2 =Ε. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι ο κατοπτρισμός, σε αντιδιαστολή με τις στροφές είναι μία ιδεατή δράση. Δεν αντιστοιχεί σε πραγματική μετακίνηση του σώματος.

11. Συμμετρικές και αντισυμμετρικές κυματοσυναρτήσεις

Συμμετρική και πλήρως αντισυμμετρική συνάρτηση τριών σωματιδίων σε τρεις διαφορετικές κβαντικές καταστάσεις

Τρία κβαντομηχανικά μη διακρίσιμα σωματίδια μπορούν να καταλάβουν τρεις ιδιοκαταστάσεις Ψα Ψβ Ψγ με κβαντικούς αριθμούς α,β,γ . Θα κατασκευάσουμε την κυματοσυνάρτηση που περιγράφει την ιδιοκατάσταση τριών σωματιδίων τα οποία δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Για να απλοποιήσουμε λίγο τα πράγματα θα υποθέσουμε ότι οι τρεις κβαντικοί αριθμοί είναι διάφοροι μεταξύ τους. Για μια συνάρτηση τριών μη αλληλεπιδρώντων σωματιδίων είναι το γινόμενο της κυματοσηνάρτησης του καθενός π.χ.

$$\Psi(123)=\Psi\alpha(1)\Psi\beta(2)\Psi\gamma(3)$$

Η Ψ(123) δεν είναι λύση για κβαντικά (μη διακρίσιμα) σωματίδια γιατί δεν έχει την κατάλληλη συμμετρία ως προς την ανταλλαγή των σωματιδίων .

Από τα στοιχεία της S_3 κατασκευάζεται ο τελεστής

$$S=\{E+(312)+(132)+(213)+(321)\}$$

Ο τελεστής αυτός είναι ο τελεστής συμμετρίας ο οποίος έχει και την ιδιότητα ότι για κάθε μετάθεση (i,j) i,j=1,2 ισχύει (i,j)S=S

Όμοια κατασκευάζεται και ο αντισυμμετρικός τελεστής

$$A=\{E-(312)-(132)-(213)-(321)\}$$

ο οποίος έχει την ιδιότητα (i,j)A=A

Άρα η ζητούμενη κυματοσυνάρτηση φερμιονίων είναι:

$$\Psi c=\frac{1}{\sqrt{6}}A\Psi(213)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{6}}\{\Psi\alpha(1)\Psi\beta(2)\Psi\gamma(3)-\Psi\alpha(2)\Psi\beta(1)\Psi\gamma(3)-\Psi\alpha(3)\Psi\beta(2)\Psi\gamma(1)$$

-Ψα(1)Ψβ(3)Ψγ(2)+Ψα(2)Ψβ(3)Ψγ(1)+Ψα(3)Ψβ(1)Ψγ(2)

Ο παράγοντας $\frac{1}{\sqrt{6}}$ δεν παίζει κανέναν σημαντικό ρόλο απλά μας δηλώνει ότι η Ψ(213) είναι κανονικοποιιμένη . Όμοια βρίσκουμε ότι η συνάρτηση μποζωνίων είναι :

$$Ψβ=\frac{1}{\sqrt{6}}\{Ψα(1)Ψβ(2)Ψγ(3)+Ψα(2)Ψβ(1)Ψγ(3)+$$

$$+Ψα(3)Ψβ(2)Ψγ(1)+Ψα(1)Ψβ(3)Ψγ(2)+Ψα(2)Ψβ(3)Ψγ(1)+$$

$$Ψα(3)Ψβ(1)Ψγ(2)$$

12. Κανονικοί τρόποι ταλάντωσης

Το πρόβλημα συναντάται σε πολλές περιοχές της φυσικής τόσο στην κλασική όσο και στην κβαντική θεωρία . Χονδρικά είναι ένα πρόβλημα N δεδομένων ταλαντωτών σε κανονικές συντεταγμένες q_i , i=1,2,3..και αντίστοιχες σταθερές ελατήριων k_{ij} . Ζητείται να βρεθεί το κατά πόσο το σύστημα αυτό μπορεί να ταλαντώνεται σαν σύνολο και ποιες είναι οι αντίστοιχες συχνότητες . Οι συχνότητες αυτές είναι γνωστές σαν κανονικοί τρόποι ταλάντωσης και οι αντίστοιχες συντεταγμένες λέγονται κανονικές . Η περιγραφή αυτή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στην μοριακή φυσική στερεού και γενικά όταν η συνάρτηση δυναμικού μπορεί να προσεγγισθεί με τον αρμονικό όρο .

Πιο συγκεκριμένα :

Έστω ότι η συνάρτηση Hamilton δίνεται ως εξής

$$H= T+V \qquad (1)$$

όπου :

$$T=\frac{1}{2}\sum m_i q_i'^2 \text{ (κινητική ενέργεια)} \qquad (2)$$

$$V=\sum_{i=1}^{3N}\sum_{j=1}^{3N} V(q_i q_j) \text{ (δυναμική ενέργεια)} \qquad (3)$$

$$q_i' = \frac{dq_i}{dt} \qquad (4)$$

δηλαδή η κινητική ενέργεια είναι διαγώνια και η δυναμική ενέργεια ανεξάρτητη από τις ταχύτητες q_i' και άμεσα από το χρόνο t . Επιπλέον θα υποθέσουμε ότι :

$$V(q_i,q_j)=V(q_j,q_i) \qquad (5)$$

δηλαδή είναι συμμετρική συνάρτηση των q_j,q_i .

Οι πιο πάνω υποθέσεις ικανοποιούνται σχεδόν πάντα . Έστω τώρα ότι κάνουμε μια επέκταση του δυναμικού σε μία σειρά Taylor γύρω από ένα δεδομένο σημείο π.χ. την αρχή αξόνων δηλαδή γράφουμε :

$$V(q_i,q_j) = V(0,0) + q_i \left.\frac{\partial V}{\partial q_i}\right|_{q_i=0} + q_i \left.\frac{\partial V}{\partial q_j}\right|_{q_j=0} + q_i q_j \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right|_{q_i=0\, q_j=0} + \ldots$$

Η σταθερά V(0,0) είναι άνευ σημασίας και συνήθως :

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = 0$$

Συνεπώς η (3) γράφεται : $V(q_i,q_j) \cong u'_{ij} q_i q_j$ (6)

$$u'_{ij} = \left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right|_{q_i=0\, q_j=0} \quad (7)$$

Για μεγαλύτερη ευκολία αλλάζουμε την κλίμακα των αξόνων γράφοντας

$$n_i = \sqrt{m_i} q_i \quad (8)$$

οπότε : $T=\frac{1}{2}\sum_i n'^2_i$ και $V = \frac{1}{2}\sum_{i \neq j} u_{ij} n_i n_j$ (9)

όπου $u_{ij} = \frac{u'_{ij}}{\sqrt{m_i m_j}}$ (10)

παρατηρούμε ότι λόγο της (5) $u_{ij}=u_{ji}$ δηλαδή ο πίνακας (u) είναι ερμιτιανός . Προφανώς μπορεί να διαγωνοποιηθεί με έναν μετασχηματισμό ομοιότητας, δηλαδή :

$$S^{-1}(u)S=(\delta) \quad (11)$$

όπου (δ) είναι ένας διαγώνιος πίνακας με στοιχεία τις ιδιοτιμές του πίνακα (u) δηλαδή $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\ldots\lambda_{3N}$. Τα ιδιοδιανυσματα του (u) είναι :

$$|Q\langle = S|n\langle \quad \text{ή} \quad Q_i = \sum_j S_{ij} n_j \quad (12)$$

με αντίστροφο μετασχηματισμό :

$$n_i = \sum_j (S^{-1})_{ij} Q_j \quad (13)$$

προφανώς ενώ τα u_{ij} είναι πραγματικά οι ποσότητες S_{ij} και Q_i είναι επίσης πραγματικές . Συνεπώς στη νέα βάση η δυναμική ενέργεια παίρνει τη μορφή :

$$V = \frac{1}{2}\rangle Q|\delta|Q\langle = \frac{1}{2}\sum_i^{3N} \lambda_i Q_i^2 \quad (14)$$

Εφόσον ο μετασχηματισμός (13) είναι μοναδικός η κινητική ενέργεια εξακολουθεί να είναι διαγώνια και στη νέα βάση δηλαδή :

$$T = \frac{1}{2}\sum_i^{3N} Q'^2_i \quad (15)$$

Εφόσον το σύστημα είναι σταθερό , δηλαδή η δυναμική ενέργεια έχει ελάχιστο στη θέση ισορροπίας οι ιδιοτιμές δεν μπορεί να είναι αρνητικές δηλαδή :

$$\lambda_i=\omega_i^2 \quad , \quad \omega_i = \text{πραγματικός}$$

και η συνάρτηση Lagrange είναι

$$L = T + V = \frac{1}{2}\sum_i (Q_i'^2 - \omega_i^2 Q_i^2) \qquad (16)$$

Συνεπώς :

$$L = \frac{1}{2}\sum_i (P_i^2 + \omega_i^2 Q_i^2) \qquad (17)$$

όπου :

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial Q_i'} \qquad (18)$$

δηλαδή το πρόβλημα είναι επαλληλία αρμονικών ταλαντωτών . Οι εξισώσεις κινήσεως είναι :

$$\frac{d^2 Q_i}{dt^2} + \omega_i^2 Q_i = 0 \qquad (19)$$

Οι ποσότητες ω_i είναι οι κανονικές συχνότητες ταλάντωσης και οι Q_i οι κανονικές συντεταγμένες . Η κβαντομηχανική περιγραφή του συστήματος μας τώρα είναι πολύ απλή θέτοντας :

$$P_i = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial Q_i} \qquad (20)$$

Η εξίσωση του Schrödiger γράφεται

$$H\Psi(Q_1, Q_2, \ldots Q_{3N}) = E\Psi(q_1, q_2, \ldots, q_3) \qquad (21)$$

όπου

$$H = \sum_i H(Q_i) \qquad (22)$$

$$H(Q_i) = \frac{1}{2}\left(-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial Q_i^2} + \omega_i^2 Q_i^2\right) \qquad (23)$$

Λόγω του ότι ο τελεστής Η παίρνει την απλή μορφή των εξισώσεων (22) και (23) θέτουμε

$$\Psi(Q_1, Q_2, \ldots Q_{3N}) = \Psi(Q_1)\Psi(Q_2)\ldots,\Psi(Q_{3N}) \qquad (24)$$

Όποτε $E = E_1 + E_2 + \ldots + E_{3N}$ (25)

$$\frac{1}{2}\left(-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial Q_i^2} + \omega_i^2\right)\Psi(Q_i) = E_i\Psi_i(Q_i) \qquad (26)$$

Η λύση της (24) είναι βασικό πρόβλημα της κβαντομηχανικής . Γνωρίζουμε ότι

$$E_i = \left(n_i + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_i , \qquad n_i = 0,1,2,\ldots \qquad (27)$$

Ξέρουμε ότι η διαγωνοποίηση του πίνακα (u) μπορεί να απλοποιηθεί όταν το πρόβλημα χαραχτηρίζεται από τελεστές συμμετρίας οι οποίοι αποτελούν ομάδα .

Σημειώνουμε ότι στα πιο πάνω χρησιμοποιήσαμε εξωτερικές συντεταγμένες, δηλαδή δώσαμε τις συντεταγμένες όλων των σημείων ως προς ένα σύστημα αναφοράς.

Παράδειγμα 13.

Θα θεωρήσουμε την ομάδα που αποτελείται από τους δύο τελεστές Ε και Ι. Ο τελεστής Ι αναστρέφει το διάνυσμα $\vec{r}$ ως προς την αρχή του δηλαδή

$$E\vec{r}=\vec{r} \qquad I\vec{r}=-\vec{r} \qquad I^2=E$$

Οι δύο αυτοί τελεστές αποτελούν ομάδα.

Υποθέτουμε τώρα ότι ο τελεστής του Hamilton παραμένει αναλλοίωτος κάτω από την επίδραση των μετασχηματισμών αυτών.

Τότε :

$$T_I H T_I^{-1}=H \quad \text{ή} \quad T_I H=H T_I$$

έστω ότι ζητείται η λύση του προβλήματος ιδιοτιμής

$$H\psi=\lambda\psi$$

Αυτή γράφεται $\qquad H(T_I\psi)=T_I(H\psi)=\lambda T_I\psi$

δηλαδή εάν ψ_i είναι μία ιδιοσυνάρτηση με ιδιοτιμή λ_i ή $T_i\psi_i$ είναι επίσης μια ιδιοσυναρτηση με την ίδια ιδιοτιμή.

Ο τελεστής Ι με τον ταυτοτικό Ε αποτελούν μία ομάδα που είναι Αβελιανή.

Οι μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις είναι μονοδιάστατες. Έχουμε

$$\Gamma(X)=\chi(X), \quad X=I \text{ ή } E \quad \text{δηλ.}$$

	{E}	{I}
$\Gamma^{(1)}$	1	1
$\Gamma^{(2)}$	1	-1

Υπάρχουν συνεπώς δύο συναρτήσεις ψ^+και ψ^- τέτοιες ώστε η ψ^+ γεννάει την αναπαράστα $\Gamma^{(1)}$ και η ψ^- την αναπαράσταση $\Gamma^{(2)}$. Δηλαδή

$$\Gamma^{(1)}(E)\psi^+=\Gamma^{(1)}(I)\psi^+=\psi^+.$$

$$\Gamma^{(1)}(E)\psi^-=\psi^-, \qquad \Gamma^{(2)}(I)\psi^-=\psi^-$$

δηλαδή η ψ^+ είναι άρτια και η ψ^- είναι περιττή κάτω από την επίδραση του μετασχηματισμού T_1. Στη βάση ψ^+και ψ^- σύμφωνα με το θεώρημα του Wigner έχουμε

$$\rangle\psi^-|H|\psi^+\langle=0$$

δηλαδή το αρχικό πρόβλημα μετατρέπεται σε δύο προβλήματα

$$\begin{matrix} H\psi^+=\lambda\psi^+ \\ H\psi^-=\lambda\psi^- \end{matrix} \quad \leftrightarrow \quad (H)=\begin{bmatrix} H^{(1)} & 0 \\ 0 & H^{(2)} \end{bmatrix}$$

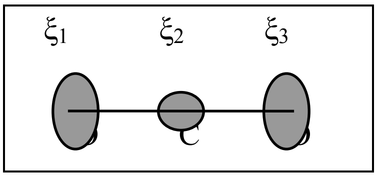
δηλαδή η διάσταση του αρχικού πίνακα μειώνεται κατά το ήμισυ. Επειδή

$$\Gamma(\chi)=\alpha_1\Gamma^{(1)}(\chi)\oplus \alpha_2\Gamma^{(2)}(\chi)$$

αν $\alpha_i >$ i=1,2 οι πίνακες $H^{(1)}$ και $H^{(2)}$ έχουν διαστάσεις $d_1=\alpha_1$ και $d_2=\alpha_2$ δηλαδή η συμμετρία δεν αρκεί για την διαγωνοποίηση του (Η).

Παράδειγμα 14.

Σαν ειδική περίπτωση του προηγούμενου παραδείγματος θα μελετήσουμε την ταλάντωσης του μορίου του διοξειδίου του άνθρακα. Αυτό αποτελείται από δυο άτομα Ο και ένα άτομο C τα οποία αποτελούν γραμμική αλυσίδα.



Το μόριο αυτό μπορεί να εκτελέσει πολύπλοκη κίνηση. Μεταφορική κίνηση εάν είναι αέριο, περιστροφική κίνηση γύρω από αξονα κάθετο στην αλυσίδα του μορίου και ταλάντωσης γύρω από τα σημεία ηρεμίας των τριών ατόμων. Ας υποθέσουμε ότι αγνοούμαι τη μεταφορική και περιστροφική κίνηση. Τότε κατά μήκος της αλυσίδας οι θέσεις των τριών ατόμων προσδιορίζονται από τρεις συντεταγμένες ξ_1,ξ_2,και ξ_3. Το μόριο έχει προφανώς συμμετρία ως προς το κέντρο του δηλαδή μένει αναλλοίωτο κάτω από τον μετασχηματισμό

I: $\xi_1 \rightarrow -\xi_3$ $\qquad$ $\xi_3 \rightarrow -\xi_1$, $\qquad$ $\xi_2 \rightarrow -\xi_2$

ο οποίος αναπαριστάται από τον πίνακα

$$\Gamma_I=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Το στοιχείο Ι μαζί με το ταυτοτικό Ε αποτελούν μια Αβελιανή ομάδα που έχει δύο μη αναγωγίσημες αναπαραστάσεις. Είδαμε πιο πάνω ότι:

	{E}	{I}
$\Gamma^{(1)}$	1	1
$\Gamma^{(2)}$	1	-1

$$\Gamma(x)=\alpha_1\Gamma^{(1)}(X)+\alpha_2\Gamma^{(2)}(X) \qquad X=E,\ I$$

$$x(X)=\alpha_1 X^{(1)}(X)+\alpha_2 X^{(2)}(X)$$

Για X=E έχουμε $3=\alpha_1+\alpha_2$

Για X=I έχουμε $-1=\alpha_1-\alpha_2$

$\boxed{\Rightarrow \alpha_1=1,\quad \alpha_2=2}$

Άρα $\quad\quad \Gamma(x)=\Gamma^{(1)}(X)+2\Gamma^{(2)}(X)$

Αν τώρα θεωρήσουμε

$$|\xi_1\langle \begin{bmatrix} \xi_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad |\xi_2\langle \begin{bmatrix} 0 \\ \xi_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad |\xi_3\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \xi_3 \end{bmatrix}$$

Έχουμε : $\quad \Gamma(E)|\xi_2\langle = |\xi_2\langle, \qquad \Gamma(I)\,|\xi_2\langle = -|\xi_2\langle$

δηλαδή το $|\xi_2\langle$ είναι ιδιοδιάνυσμα της αναπαράστασης Γ. Επίσης

$$\Gamma(I)\,|\,\xi_1\langle = -|\,\xi_3\langle, \quad \Gamma|\,\xi_2\langle = -|\,\xi_1\langle$$

οπότε :

$$\psi_+ = |\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|\xi_1\rangle + \Gamma(I)|\xi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|\xi_1\rangle - |\xi_3\rangle\}$$

$$\psi_- = |\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|\xi_1\rangle + \Gamma(I)|\xi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|\xi_1\rangle - |\xi_3\rangle\}$$

$$\Gamma(I)|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{-|\xi_3\rangle + |\xi_1\rangle\} = +|\psi_1\rangle$$

$$\Gamma(I)|\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{-|\xi_3\rangle + |\xi_1\rangle\} = -|\psi_1\rangle$$

αν λοιπόν διαλέξουμε τις συντεταγμένες

$$\psi_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_1-\xi_2), \qquad \psi_2=\xi_2, \qquad \psi_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_1+\xi_3),$$

αυτές είναι οι ιδιοσυναρτήσεις της αναπαράστασης Γ και αποτελούν μια βάση των μη αναγωγίσιμων αναπαραστάσεων. (Οι συναρτήσεις ψ_2 και ψ_3 της αναπαράστασης $\Gamma^{(2)}$ και η ψ_1 της αναπαράστασης $\Gamma^{(1)}$).

Συμπέρασμα, εάν ο τελεστής Hamilton είναι συνάρτηση των ξ_1, ξ_2 και ξ_3 και έχει την ιδιότητα να παραμένει αναλλοίωτος κάτω από την επίδραση της ομάδας {E,I}δηλαδή αν ισχύει :

$$H(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=H(-\xi_3,-\xi_2,-\xi_1)$$

τότε η βάση ψ_1,ψ_2 και ψ_3 εκφράζεται σαν το άμεσο άθροισμα δυο πινάκων : ένας μονοδιάστατος (α_1=1) $\rangle\psi_1|H|\psi_1\langle$ και ένας διδιάστατος (α_2=2) $\rangle\psi_i|H|\psi_j\langle$,i,j=2,3. Έτσι ο πίνακας Hamilton γράφεται

$$(H)=\begin{bmatrix} H^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & H^{(2)}_{11} & H^{(2)}_{12} \\ 0 & H^{(3)}_{21} & H^{(3)}_{22} \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 15.

Θα μελετήσουμε το μόριο του CO_2. Εδώ $q_i=\xi_i$, i = 1,2,3 όπου τα ξ_i έχουν ορισθεί στο προηγούμενο παράδειγμα..

Έχουμε :

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2} m\dot{\xi}_i + \frac{1}{2} M\dot{\xi}_2^2 + \frac{1}{2} m\dot{\xi}_3^2$$

Η δυναμική ενέργεια είναι συνάρτηση των σχετικών αποστάσεων μεταξύ των ατόμων και είναι αρμονική, δηλαδή :

$$\mathrm{V}(\xi_i,\xi_j) = \frac{1}{2}\mathrm{k}(\xi_i-\xi_j)^2$$

όπου k η σταθερά του ελατήριου η οποία υποτίθεται ανεξάρτητη από τα i και j. Συνεπώς :

$$\mathrm{V}=\frac{1}{2}\mathrm{k}(\xi_1-\xi_2)^2+\frac{1}{2}\mathrm{k}(\xi_2-\xi_3)^2$$

Παρατηρούμε τώρα ότι τόσο η κινητική όσο και η δυναμική ενέργεια χαρακτηρίζονται από τη συμμετρία {E,I}του παραδείγματος 3. Επειδή καθώς είδαμε :

$$\Gamma(\mathrm{X}) = \Gamma^{(1)}(\mathrm{X}) \oplus 2\Gamma^{(2)}(\mathrm{X})$$

δηλαδή ο μεγαλύτερος πίνακας που χρειάζεται για να διαγωνοποιηθεί είναι 2×2 (αντί του αρχικού 3×3).

Έχουμε :

$$\mathrm{V}=\frac{1}{2}\mathrm{k}\xi_1{}^2+\frac{1}{2}\mathrm{k}\xi_2{}^2+\frac{1}{2}\mathrm{k}\xi_3{}^2-\frac{1}{2}(\xi_1\xi_2+\xi_2\xi 1_2+\xi_2\xi_3+\xi_3\xi_2)$$

δηλαδή $$(v') = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}k & -\frac{1}{2}k & 0 \\ -\frac{1}{2}k & k & -\frac{1}{2}k \\ 0 & -\frac{1}{2}k & \frac{1}{2}k \end{bmatrix}$$

Στη βάση $\psi_1\ \psi_2\ \psi_3$ του παραδείγματος 3 βρίσκουμε ότι

$$\xi_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1+\psi_2), \qquad \xi_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_3-\psi_1), \qquad \xi_2=\psi_2$$

$$\mathrm{V}=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{k}[\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1+\psi_2)-\psi_2]^2+\frac{1}{2}[(\psi_2-\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_3-\psi_2)]^2$$

$$=\mathrm{k}(\psi^2{}_1+\psi_2{}^2+\psi_3{}^2-2\sqrt{2}\,\psi_2\psi_3)$$

$$\mathrm{T}=\frac{1}{2}m\dot{\psi}_1^2+\frac{1}{2}M\dot{\psi}_2^2+\frac{1}{2}m\dot{\psi}_3^2$$

δηλαδή η κινητική ενέργεια παραμένει διαγώνια. Με αλλά λόγια

$$\mathrm{T}\rightarrow(\tau)=\begin{bmatrix} \frac{m}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{2} \end{bmatrix} \qquad (v')=\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 2k & -\sqrt{2}k \\ 0 & -\sqrt{2}k & k \end{bmatrix}$$

δηλαδή η συντεταγμένη ψ_1 είναι κανονική. Στο πιο πάνω συμβολισμό

$n_i = \sqrt{m}\psi_i$ γράφουμε :

$$(\tau)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad v=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} k/m & 0 & 0 \\ 0 & 2k/m & -\sqrt{2}k/\sqrt{mM} \\ 0 & -\sqrt{2}k/\sqrt{mM} & k/m \end{bmatrix}$$

δηλαδή $\qquad Q_i=\sqrt{m}\,\psi_i, \quad \omega_i=\sqrt{\lambda_1}=\sqrt{k/m}$

οι άλλες κανονικές συχνότητες βρίσκονται από τις ιδιοτιμές του πίνακα

$$\begin{bmatrix} 2k/m & -\sqrt{2}k/\sqrt{mM} \\ -\sqrt{2}k/\sqrt{mM} & k/m \end{bmatrix}$$

βρίσκουμε ότι $\qquad \lambda_2=0,\ \omega_2=0$

$$\lambda_3=\frac{2k}{m}+\frac{k}{m}\ \eta'\ \omega_3\sqrt{\frac{2k}{m}+\frac{k}{m}}$$

$$Q_1 = \sqrt{m}\psi_1 = \frac{m}{2}(\xi_1-\xi_3)$$

$$Q_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}n_2+\sqrt{\frac{2}{3}n_3} = \frac{M}{\sqrt{3}}\psi_3+\frac{\sqrt{2}}{3}m\psi_3 = \frac{m}{\sqrt{3}}\xi_1+\frac{M}{\sqrt{3}}\xi_2+\frac{m}{\sqrt{3}}\xi_3$$

$$Q_3 = -\frac{1}{\sqrt{3}}n_3-\sqrt{\frac{2}{3}n_2} = \frac{\sqrt{2}M}{\sqrt{3}}\psi_2-\frac{1}{3}m\psi_3 = \frac{m}{\sqrt{6}}\xi_1+\frac{\sqrt{2}M}{\sqrt{3}}\xi_2-\frac{m}{\sqrt{6}}\xi_3$$

Έχουμε τις εξής εξισώσεις κινήσεως

$$\ddot{Q}_1+\omega_1^2 Q_1=0$$
$$\ddot{Q}_2=0$$
$$\ddot{Q}_3+\omega_3^2 Q_3=0$$

Δηλαδή το πρόβλημα του CO_2 είναι ισοδύναμο προς ένα ελεύθερο σωμάτιο με συντεταγμένη Q_2 (κέντρο μάζας του συστήματος) και δυο ζευκτούς αρμονικούς ταλαντωτές.

Η κβαντομηχανική λύση βρίσκεται από τις εξισώσεις (24,25,26). Η εξίσωση ως προς Q_2 παριστάνει επίπεδο κύμα και δεν έχει ιδιαίτερο νόημα καθ΄ όσον παριστάνει την κίνηση του κέντρου μάζας του συστήματος. Οι δύο άλλες λύσεις είναι

$$-\frac{\hbar^2}{2}\ \frac{d^2\psi_1(Q_1)}{d\psi_1^2}+\omega_1^2\psi_1(Q_1) = E_1\psi_1(Q_1)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2}\ \frac{d^2\psi_3(Q_3)}{d\psi_3^2}+\omega_3^2\psi_3(Q_3) = E_3\psi_3(Q_3)$$

Οι λύσεις ειναί οι εξής

$$E_1 = \left(n_1 + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_1, \qquad E_3 = \left(n_3 + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_3$$

$$E_{n_1 n_3} = \left(n_1 + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_1 + \left(n_3 + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_3$$

$$n_1 = 0,1,2,..., \qquad \mathrm{n}_3 = 0,1,2,...$$

Οι ιδιοσυναρτήσεις είναι

$$\psi_{n_i}(Q_i) = \left(\frac{\omega_i / \hbar}{\sqrt{\pi}\, 2^{n_i} (n_i)!}\right)^{1/2} e^{-(1/2)(\omega_i Q_i / \hbar)^2} H_{n_i}\left(\frac{\omega_i Q_i}{\hbar}\right)$$

i=1,3 όπου $H_n(x)$ τα πολυώνυμα Hermite

Όταν ο λόγος μαζών είναι τυχαίος δεν υπάρχει εκφυλισμός δηλαδή δεν υπάρχει κρυμμένη συμμετρία. Όταν όμως $\omega_3=l\omega_1$, l=1,2,...ή $m=(l^2-½)M$ είναι δυνατόν να υπάρχει εκφυλισμός π.χ. για l=2 .Έχουμε

$$E_{n1n2}=[n_1+½+2(n_3+½]\hbar\,\omega_1$$

όποτε π.χ. $n_1=0$, $n_3=2$, και $n_3=1$ δίνουν την ίδια ενέργεια

$$E_{0,2}=E_{2,1}=\frac{11}{2}\hbar\omega_1$$

Στις περιπτώσεις αυτές υπάρχει ″κρυμμένη ″ συμμετρία. Τελειώνοντας σημειώνουμε ότι άγνωστη παράμετρος του προβλήματος είναι η σταθερά k. Αυτή μπορεί να προσδιοριστεί από το φάσμα του CO_2.

16 Μετατόπιση στερεού με ένα σταθερό σημείο

Ως στέρεο σώμα ορίζεται σύστημα υλικών σημείων, τουλάχιστον τριών μη συνευθιακων, των οποίων οι αμοιβαίες αποστάσεις είναι σταθερές, δηλαδή $|r_i-r_j|=c_{ij}$. Για τον προσδιορισμό της θέσεως του στερεού απαιτείται η γνώση της θέσεως τριών μη συνευθιακών σημείων του . Από το γεγονός ότι οι μεταξύ τους αποστάσεις είναι σταθερές, έχουμε τρεις ??ολονόμους δεσμούς. Συνεπώς, οι βαθμοί ελευθέριας του στερεού κατά τη γενική του κίνηση είναι 9-6=3 Το στερεό με ένα σταθερό σημείο έχει τρεις βαθμούς ελευθερίας . Στη μελέτη της κινήσεως του στερεού ,το οποίο έχει ένα σταθερό σημείο O, θεωρούμε δυο συστήματα τρισορθογωνίων αξόνων, το ακίνητο $O\xi_1\xi_2\xi_3$ με μοναδιαία διανύσματα τα $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,$ το οποίο ονομάζεται και σύστημα του χώρου και το $Ox_1\ x_2\ x_3$ με μοναδιαία διανύσματα $e_1,e_2,e_3,$ το οποίο είναι στέρεα συνδεδεμένο με το στερεό, συμμετέχει με αυτό στην κίνηση του και ονομάζεται σύστημα του σώματος. Επομένως, ο προσδιορισμός της θέσεως του στερεού σε κάποια χρονική στιγμή ανάγεται στην εύρεση της αμοιβαίας θέσεως των δυο συστημάτων χώρου και σώματος τη στιγμή αυτή .

α) Ορθογώνιοι Μετασχηματισμοί

Εάν (x_1,x_2, x_3) και (ξ_1,ξ_2,ξ_3) είναι οι συντεταγμένες ενός τυχόντος σημείου Σ του στερεού, στο σύστημα του σώματος και στο σύστημα του χώρου αντίστοιχα , τότε το διάνυσμα θέσεως r του Σ έχει τις εκφράσεις :

$$\mathbf{r} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 ,$$

$$\mathbf{r} = \xi_1 \varepsilon_1 + \xi_2 \varepsilon_2 + \xi_3 \varepsilon_3 ,$$

Από τις εκφράσεις αυτές παίρνουμε τη σχέση :

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 = \xi_1 \varepsilon_1 + \xi_2 \varepsilon_2 + \xi_3 \varepsilon_3 \qquad (1)$$

Εφαρμόζοντας το εσωτερικό γινόμενο στη σχέση (1) διαδοχικά με τα e_i i=1,2,3, προκύπτουν οι σχέσεις :

$$x_i = (\mathbf{e}_i \boldsymbol{\varepsilon}_1)\xi_1 + (\mathbf{e}_i \boldsymbol{\varepsilon}_2)\xi_2 + (\mathbf{e}_i \boldsymbol{\varepsilon}_3)\xi_3 , \qquad i = 1,2,3.$$

Εάν με 1_{ij} συμβολίσουμε τα διευθύνοντα συνημίτονα των αξόνων , δηλαδή

$$1_{ij} = \mathbf{e}_i \boldsymbol{\varepsilon}_j = \cos(Ox_i , Ox_j),$$

οι σχέσεις αυτές γράφονται

$$x_i = 1_{i1}\xi_1 + 1_{i2}\xi_2 + 1_{i3}\xi_3 \qquad i=1,2,3.$$

Το σύστημα αυτό των εξισώσεων, που εκφράζει τον μετασχηματισμό των συντεταγμένων από το σύστημα του χώρου στο σύστημα του σώματος, υπό μορφή εξισώσεων πινάκων γράφεται :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}$$

ή $\underline{x} = L\underline{\xi}$

όπου $\underline{x}$, $\underline{\xi}$ (x,ξ υπογραμμισμένα), είναι το διάνυσμα στήλη, (πίνακας στήλη), που έχει ως στοιχεία τις συντεταγμένες του **r** στα συστήματα $Ox_1\, x_2\, x_3$,και $O\xi_1\xi_2\xi_3$ αντίστοιχα . Ο πίνακας $L=(1_{ij})$ ονομάζεται πίνακας μετασχηματισμού από το $O\xi_1\xi_2\xi_3$ στο $Ox_1\, x_2\, x_3$.

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός, δηλαδή ο μετασχηματισμός από το $Ox_1\, x_2\, x_3$ στο $O\xi_1\xi_2\xi_3$, προκύπτει εάν πολλαπλασιάσουμε την (1) διαδοχικά επί τα ε_1,ε_2,ε_3, όπότε παίρνουμε τις σχέσεις :

$$x_i = (\mathbf{e}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_i)x_1 + (\mathbf{e}_2 \boldsymbol{\varepsilon}_i)x_2 + (\mathbf{e}_3 \boldsymbol{\varepsilon}_i)x_3 ,$$

$$\xi_i = 1_{1i}x_1 + 1_{2i}x_2 + 1_{3i}x_3 \qquad i = 1,2,3.$$

Και υπό μορφή εξισώσεως πινάκων την

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ l_{12} & l_{22} & l_{32} \\ l_{13} & l_{23} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$ ή

$\underline{\xi}=L^T\chi$

όπου L^T ο ανάστροφος του πίνακα L δηλαδή $L^T= (1_{ij})= 1_{ji}$.

Από τις σχέσεις $\underline{x}=L\underline{\xi}$ και $\underline{\xi}=L^T\underline{x}$ προκύπτει ότι :

$$L^{-1} =L^T . \tag{2}$$

Ένας πίνακας ο οποίος ικανοποιεί τη σχέση (2), δηλαδή ο πίνακας του οποίου ο αντίστροφος είναι ίσος με τον ανάστροφο του, λόγω των ανώτερω, ονομάζεται ορθογώνιος πίνακας και ο γραμμικός μετασχηματισμός, τον οποίο ορίζει, ονομάζεται ορθογώνιος μετασχηματισμός .Από τη σχέση (2) παίρνουμε την

$$L\,L^T=E ,$$

όπου $E=(\delta_{ij})$ ο μοναδιαίος πίνακας 3×3 . Από τα τελευταία προκύπτουν οι σχέσεις :

$$\sum_{k=1}^{3} 1_{ik}1'_{kj} = \sum_{k=1}^{3} 1_{ik}1_{jk} =\delta_{ij} ,\quad i,j=1,2,3. \tag{3}$$

Συνεπώς τα εννέα διευθύνοντα συνημίτονα 1_{ij} , μέσω των οποίων προσδιορίζεται η θέση του ενός συστήματος ως προς το άλλο, δεν είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, αλλά πληρούν τις σχέσεις (3) οι οποίες εκφράζουν το γεγονός ότι οι άξονες Ox_i και οι άξονες $O\xi_i$ αποτελούν σύστημα ορθογωνίων αξόνων και ότι το μέτρο του διανύσματος ΟΣ είναι το αυτό, ανεξάρτητα από το σύστημα στο οποίο εκφράζεται. Από τις σχέσεις (3) έξι είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, διότι εκείνες που αντιστοιχούν σε $i\neq j$ ανά δυο συμπίπτουν, αφού το πρώτο μέλος της (3) δεν μεταβάλλεται με την αντιμετάθεση των i και j . Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι τρεις παράμετροι αρκούν για τον προσδιορισμό της αμοιβαίας θέσεως των δυο συστημάτων. Αυτό αναμενόταν, διότι οι βαθμοί ελευθέριας του στερεού είναι τρεις. Στα επόμενα θα εξετάσουμε ένα σύστημα τέτοιων παραμέτρων, τις γωνίες Euler, τις οποίες συνήθως χρησιμοποιούμαι στη μελέτη της κινήσεως του στερεού σώματος.

Πριν όμως από τη μελέτη των γωνιών Euler θα δώσουμε μερικές ιδιότητες των ορθογωνίων πινάκων και των ορθογωνίων μετασχηματισμών, που είναι απαραίτητες στη μελέτη της κινήσεως του στερεού σώματος.

1. Το γινόμενο δυο ορθογωνίων πινάκων είναι ορθογώνιος πίνακας .

Πράγματι

$$(AB)(AB)^T= (AB)\,(A^TB^T)= A[B(A^TB^T)] =A[B(B^TA^T)]=A[(BB^T)A^T] =AA^T =E .$$

Αν $\underline{y}=A\underline{x}$ και $\underline{z}=C\underline{x}$ όπου C=AB

Συνεπώς η διαδοχική εφαρμογή δυο ορθογωνίων μετασχηματισμών είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός, διότι ο πίνακας C που τον ορίζει είναι ορθογώνιος ως γινόμενο ορθογωνίων πινάκων .

2. Αναφερόμενοι στο αυτό ή σε διάφορα συστήματα συντεταγμένων, ο ορθογώνιος πίνακας A μετασχηματίζει τα διανύσματα **α** και **b** στα $\mathbf{a}_1$ και $\mathbf{b}_1$ αντίστοιχα , δηλαδή

$$\underline{\alpha}_1 = A\underline{\alpha}, \qquad \underline{b}_1 = A\underline{b},$$

για το εσωτερικό γινόμενο ισχύει $\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1=\mathbf{ab}$. Πράγματι :

$$\alpha_1^T b_1=(A\underline{\alpha})^T(A\underline{b}) = \underline{\alpha}^T A^T A\underline{b} = \underline{\alpha}^T\underline{b}\ .$$

Δηλαδή το εσωτερικό γινόμενο είναι αναλλοίωτο ως προς τους ορθογώνιους μετασχηματισμούς. Για $\mathbf{a}=\mathbf{b}$ παρατηρούμε ότι ο ορθογώνιος μετασχηματισμός αφήνει αναλλοίωτη την τετραγωνική μορφή ($\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$), δηλαδή διατηρεί τα μήκη.

3. Από την $L\,L^T=E$, προκύπτει ότι :

$$|L\,L^T| = |L|\,|L^T| = |L^T| = 1 \quad \text{ή} \quad |L| = \pm 1$$

Οι εκφράσεις των διανυσματικών μονάδων e_i, i=1,2,3 στο σύστημα $O\xi_1\xi_2\xi_3$ είναι

$$e_i= (\mathbf{e}_i\boldsymbol{\varepsilon}_1)\boldsymbol{\varepsilon}_1 + (\mathbf{e}_i\boldsymbol{\varepsilon}_2)\boldsymbol{\varepsilon}_2 + (\mathbf{e}_i\boldsymbol{\varepsilon}_3)\boldsymbol{\varepsilon}_3\ ,$$

$$\mathbf{e}_i=1_{i1}\boldsymbol{\varepsilon}_1 + 1_{i2}\boldsymbol{\varepsilon}_2 + 1_{i3}\boldsymbol{\varepsilon}_3 \qquad i=1,2,3.$$

Το μικτό γινόμενο είναι

$$\mathbf{e}_1\cdot(\mathbf{e}_2\times \mathbf{e}_3) = |L|\ \boldsymbol{\varepsilon}_1\cdot(\boldsymbol{\varepsilon}_2\times \boldsymbol{\varepsilon}_3)\ .$$

Συνεπώς η τιμή $|L|=1$ αντιστοιχεί στην περίπτωση , που τα δυο ορθογώνια συστήματα είναι δεξιόστροφα ή αριστερόστροφα και η τιμή $|L|=-1$ στην , περίπτωση που το ένα από αυτά είναι δεξιόστροφο και το άλλο αριστερόστροφο .

4. Η χαρακτηριστική εξίσωση του πίνακα L με $|L|=1$ έχει μια χαρακτηριστική ρίζα ίση με τη μονάδα. Πράγματι για το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\varphi(\lambda)=|L-\lambda E|$ έχουμε :

$$|L-\lambda E| = |L-\lambda LL^T| = |L|\,|E-\lambda L^T| = |(E-\lambda L)^T| = |E-\lambda L| = -|\lambda L-E| = -\lambda^3\,|L-(1/\lambda)E|\ ,$$

δηλαδή

$$\varphi(\lambda)= -\lambda^3\varphi(1/\lambda) \tag{4}$$

Για λ=1 προκύπτει $\varphi(1)= -\varphi(1)$, όποτε

$$\varphi(1)=|L-E|=0$$

Από την (4) συνεπάγεται επίσης ότι εάν $\varphi(\lambda)=0$ τότε και $\varphi(1/\lambda)=0$. Δηλαδή .εάν η λ είναι χαρακτηριστική ρίζα του πίνακα L, το ίδιο ισχύει και για την αντίστροφο της 1/λ. Εάν A ορθογώνιος πίνακας με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς και εάν **x** είναι το χαρακτηριστικό διάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμη λ , έχουμε

$$A\underline{x}=\lambda\underline{x}$$

Η ανάστροφος και η συζυγής σχέση αυτής είναι αντίστοιχα

$$\underline{x}^T A^T=\lambda\underline{x}^T, \qquad A^*\underline{x} = \lambda^*\underline{x}^*\ .$$

Ο πολλαπλασιασμος της δεύτερης με την πρώτη δίνει :

$$\underline{x}^T A^T A^*\underline{x} = \lambda\lambda^*\,\underline{x}^T\underline{x}^*\ .$$

Επειδή $A^TA = A^TA = E$, αυτή γράφεται :

$$\underline{x}^T\underline{x}^* = \lambda\lambda^*\,\underline{x}^T\underline{x}^*\ .$$

Από το γεγονός ότι $x_1x_1^* + x_2x_2^* + x_3x_3^* = |x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 \neq 0$, συνάγουμε ότι $\lambda\lambda^*=1$ η $|\lambda|=1$, δηλαδή ότι οι ιδιοτιμές ορθογωνίου πίνακα είναι μοναδιαίου μέτρου. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι οι ιδιοτιμές του ορθογωνίου πίνακα L είναι οι $1, e^{i\varphi}$, $e^{-i\varphi}$.

5. Όμοιοι πίνακες έχουν τις ίδιες χαρακτηριστικές ρίζες. Εάν A και A' όμοιοι, υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας L τέτοιος ώστε $A'=LAL^{-1}$, όποτε για τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα των A και A' έχουμε :

$$\varphi(\lambda)=|A'-\lambda E|=)=|LAL^{-1}-\lambda LL^{-1}|=|L||A-\lambda E||L^{-1}|=|A-\lambda E|=\varphi(\lambda)$$

Έτσι εάν $\varphi(\lambda)=0$, τότε $\varphi^*(\lambda)=0$ και αντιστρόφως.

β). Θεώρημα του Euler

Θεωρούμε στερεό με ένα σταθερό σημείο Ο. Του στερεού αυτού θεωρούμε μια μετατόπιση από τη θέση Α στη θέση Β. Στην αρχική θέση Α θεωρούμε ότι τα συστήματα χώρου ($O\xi_1\xi_2\xi_3$) και σώματος ($Ox_1\ x_2\ x_3$) συμπίπτουν. Το διάνυσμα θέσεως $\mathbf{r}_0$ του τυχόντος σημείου Σ του στερεού στα δυο αυτά συστήματα συντεταγμένων έχει εκφράσεις ξ_0 και x_0, με $\underline{\xi}_0=\underline{x}_0$. Στη θέση Β το διάνυσμα θέσεως $\mathbf{r}$ του ίδιου σημείου Σ του στερεού στα συστήματα σώματος και χώρου θα έχει εκφράσεις $\mathbf{x}$ και $\boldsymbol{\xi}$ με

$$\underline{x}=L\underline{\xi}$$

όπου L ο πίνακας μετασχηματισμού από το ($O\xi_1\xi_2\xi_3$) στο ($Ox_1\ x_2\ x_3$). Επειδή το σημείο Σ δεν μεταβάλλεται, ως προς το σύστημα του σώματος ,θα έχουμε $\underline{x}=\underline{x}_0=\underline{\xi}_0$, όποτε η ανώτερο σχέση γράφεται

$$\underline{\xi}_0=L\underline{\xi}$$

Η σχέση αυτή αναφέρεται στο σύστημα του χώρου και συνδέει την αρχική με την τελική θέση ενός οποιουδήποτε σημείου του στερεού. Αν τώρα αναζητήσουμε σημείο Ρ του στερεού, το οποίο κατά τη μετατόπιση παρέμεινε σταθερό στο χώρο, θα πρέπει το διάνυσμα θέσεως του ξ_p να ικανοποιεί τη σχέση

$$\underline{\xi}_p=L\underline{\xi}_p$$

$$(L-E)\underline{\xi}_p=0 \qquad (5)$$

και επειδή ενδιαφερόμαστε για το σημείο Ρ που είναι διαφορετικό του σταθερού σημείου Ο, δηλαδή $|\underline{\xi}_p|\neq 0$, θα πρέπει να ισχύει :

$$|L-E|=0$$

Η τελευταία ισχύει πάντοτε, διότι ο πίνακας L ως ορθογώνιος $|L|=1$ έχει πάντοτε μια ιδιοτιμη ίση με τη μονάδα. Άρα, το διάνυσμα ΟΡ= ξ_p του ζητούμενου σημείου Ρ είναι ιδιοδιάνυσμα του πίνακα μετασχηματισμού και αντιστοιχεί στη μοναδιαία ιδιοτιμή του. Η σχέση (5) ικανοποιείται επίσης και για τα $\lambda\xi_p$ όπου λ πραγματικός αριθμός . Δηλαδή , στην τυχούσα μετατόπιση του στερεού τα σημεία του, που έχουν διάνυσμα θέσεως συγγραμικό προς το χαρακτηριστικό διάνυσμα του πίνακα L, παραμένουν σταθερά. Συνεπώς, η τυχούσα μετατόπιση στερεού σε ένα σταθερό σημείο είναι περιστροφή με αξονα περιστροφής τον αξονα, που διέρχεται από το σταθερό σημείο και έχει διεύθυνση του πίνακα μετασχηματισμού L, που αντιστοιχεί στην μοναδιαία ιδιοτημη του (θεώρημα του Euler)

Λόγω των ανώτερω, ο πίνακας μετασχηματισμού L ονομάζεται και **πίνακας στροφής**

Εάν υποθέσουμε ότι στην αρχική θέση Α οι άξονες $O\xi_3$ και Ox_3 ταυτίζονταν με τον αξονα της περιστροφής, τότε ο πίνακας μετασχηματισμού από τη θέση Α στη θέση Β θα ήταν της μορφής :

$$L' = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

όπου φ η γωνία στροφής. Η ταύτιση όμως των $O\xi_3$ και Ox_3 με τον αξονα περιστροφής επιτυγχάνεται με ένα ορθογώνιο μετασχηματισμό με πίνακα έστω R. Τότε ο πίνακας μετασχηματισμού L από τη θέση Α στη θέση Β θα μετασχηματιστεί στον όμοιο του RLR^T, δηλαδή θα έχουμε :

$$L' = RLR^T$$

Επειδή για τους πίνακες L και L' γνωρίζουμε ότι έχουν τις ίδιες χαρακτηριστικές ρίζες , το άθροισμα των οποίων ισούται με το ίχνος του πίνακα, θα έχουμε :

$$\mathrm{Tr}L = \mathrm{Tr}L' = 1 + 2\cos\varphi$$

και η γωνία στροφής υπολογίζεται από τον τύπο :

$$\cos\varphi = \frac{\mathrm{Tr}L - 1}{2}$$

Εάν $\underline{x} = A\underline{\xi}$ και $\underline{x'} = B\underline{x}$ είναι δυο διαδοχικές περιστροφές με πίνακες στροφής Α και Β. Τότε η σύνθεση αυτών

$$\underline{x'} = B\underline{x} = B\alpha\underline{\xi} \quad \text{η} \quad \underline{x'} = C\underline{\xi}$$

παρίσταται από τον πίνακα C=AB .

Οι πεπερασμένες περιστροφές στερεού περί σταθερό σημείο του αποτελούν ομάδα . Αυτό προκύπτει από τις ιδιότητες των ορθογωνίων πινάκων, οι οποίοι παριστάνουν τις περιστροφές. Πράγματι, το γινόμενο ορθογωνίων πινάκων είναι ορθογώνιος πίνακας και ικανοποιεί την προσεταιριστηκη ιδιότητα. Υπάρχει το ουδέτερο στοιχείο, αφού ο μοναδιαίος πίνακας είναι ορθογώνιος. Τέλος κάθε ορθογώνιος πίνακας L έχει τον αντίστροφο του, αφού $|L| \neq 0$ και ο οποίος μάλιστα ισούται με τον ανάστροφο του L^T . Η ομάδα αυτή δεν είναι αβελιανη.

γ) Περιστροφές περί σταθερό αξονα

Το υποσύνολο των περιστροφών περί σταθερό αξονα, η των επιπέδων περιστροφών περί σημείο Ο, αποτελεί αντιμεταθετικη ομάδα. Πράγματι, εάν θεωρήσουμε περιστροφές περί τον $O\xi_3$ αξονα, οι πίνακες στροφής θα είναι της μορφής :

$$R_3(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

όπου φ η γωνία στροφής .

Το γινόμενο δυο πινάκων στροφής με γωνίες φ και ψ είναι

$$R_3(\varphi)R_3(\psi)=\begin{bmatrix}\cos(\varphi+\psi) & \sin(\varphi+\psi) & 0\\ -\sin(\varphi+\psi) & \cos(\varphi+\psi) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}= R_3(\psi)R_3(\varphi),$$

δηλαδή ο πίνακας στροφής με γωνία στροφής φ+ψ , και επομένως ισχύει η αντιμεταθετικη ιδιότητα.

Ο μοναδιαίος πίνακας παριστά τη μηδενική περιστροφή. Τέλος ο αντίστροφος πίνακας είναι :

$$R^{-1}(\varphi)= R^{T}(\varphi)=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(-\varphi) & \sin(-\varphi) & 0\\ -\sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=R(-\varphi)$$

δηλαδή παριστά περιστροφή με αντίθετη γωνία στροφής .

ΜΕΡΟΣ Β

ΘΕΩΡΙΑ ΤΕΛΕΣΤΩΝ

1. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΟ ΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΤΗΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Εισαγωγή

Η φυσική ένα-προς-ένα αντιστοιχία μεταξύ των τριάδων (x,y,z) των πραγματικών αριθμών και των χωρικών διανυσμάτων του τρισδιάστατου ευκλειδείου χώρου R^3 μας δίνει ένα γεωμετρικό μοντέλο για πολλά προβλήματα της Φυσικής, Βιολογίας και άλλων επιστημών.

Εάν τα φυσικά μεγέθη περιγράφονται από αριθμούς, περισσότερους από τρεις, τότε το γεωμετρικό μοντέλο των χωρικών διανυσμάτων του R^3 δεν εφαρμόζεται, και η εποπτεία του προβλήματος με τη βοήθεια ενός μοντέλου με "γεωμετρικά χαρακτηριστικά" οδηγεί στην έννοια του γραμμικού χώρου n-διαστάσεων.

Η έννοια του χώρου Hilbert, (και της αντίστοιχης θεωρίας), μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα ακόμα βήμα προς αυτή την κατεύθυνση. Εάν στη γενίκευση αυτή της έννοιας του διανυσματικού χώρου συμπεριλάβουμε και τους διανυσματικούς χώρους απείρων διαστάσεων, τότε μπορούν να συνδεθούν η κλασική ανάλυση και η γεωμετρία έτσι ώστε ο συνδυασμός αυτός να είναι πιο αποτελεσματικός από ότι η κλασική ανάλυση για την λύση των μαθηματικών και φυσικών προβλημάτων.

Οι μαθηματικές δομές της Κβαντομηχανικής κτίζονται πάνω στους γραμμικούς χώρους πεπερασμένης ή άπειρης διάστασης, των οποίων τα διανύσματα έχουν, γενικά, μιγαδικές συνιστώσες.

1.1 Γραμμικοί ή Διανυσματικοί Χώροι

Ορισμός 1.1.1 Ένα σύνολο $V \neq \varnothing$ ονομάζεται **γραμμικός** ή **διανυσματικός χώρος επί του σώματος** F[25] εάν έχουμε ορίσει τις εξής δυο πράξεις σύνθεσης:

α) Εσωτερική πράξη, (ή νόμος), σύνθεσης:

$+: V\times V \to V \quad +: (x,y) \to x+y$

β) Εξωτερική πράξη, (ή νόμος), σύνθεσης:

$\cdot: F\times V \to V \quad \cdot: (\lambda,x) \to \lambda.x$

οι οποίες ικανοποιούν τις εξής ιδιότητες:

1) $(\forall x,y,z\in V)[\ (x+y)+z=x+(y+z)\ ]$

2) $(\exists 0\in V)(\forall x\in V)[\ x+0=0+x=x\ ]$

3) $(\forall x\in V)(\exists x\in V)[\ x+x'=x'+x=0\ ]$

4) $(\forall x,y\in V)[\ x+y=y+x\ ]$

5) $(\forall x,y\in V)(\forall \lambda\in F)[\ \lambda\cdot(x+y)=\lambda\cdot x+\lambda\cdot y\ ]$

6) $(\forall x\in V)(\forall \lambda,\mu\in F)[\ (\lambda+\mu)\cdot x=\lambda\cdot x+\mu\cdot x\ ]$

---

[25] Το σώμα F που συνήθως χρησιμοποιείται στη Φυσική είναι το σώμα R των πραγματικών αριθμών ή το σώμα C των μιγαδικών αριθμών

7) $(\forall x\in V)(\forall \lambda,\mu\in F)[\ (\lambda\mu)\cdot x=\lambda\cdot(\mu\cdot x)\ ]$

8) $(\exists 1\in F)(\forall x\in V)[\ 1\cdot x=x\ ]$

Ο πρώτος νόμος σύνθεσης λέγεται **πρόσθεση** των στοιχείων x και y, τα οποία θα ονομάζονται και **διανύσματα** του χώρου V, το δε αποτέλεσμα x+y **άθροισμα** των x και y.

Ο δεύτερος νόμος σύνθεσης λέγεται **βαθμωτός πολλαπλασιασμός** του αριθμού λ με το διάνυσμα x, το δε αποτέλεσμα λ·x, (που στο εξής θα το γράφουμε πιο απλά λx), **βαθμωτό γινόμενο** του αριθμού λ με το διάνυσμα x[26].

Ορισμός 1.1.2 Ένα άθροισμα της μορφής: λx+μy ονομάζεται **γραμμικός συνδυασμός** των x και y. Με παρόμοιο τρόπο ορίζεται ο γραμμικός συνδυασμός πεπερασμένου πλήθους διανυσμάτων: $\lambda_1 x_1+\ldots+\lambda_m x_m$

Ορισμός 1.1.3 Ένα υποσύνολο $U\subset V$ ονομάζεται **γραμμικός υπόχωρος** ή πιο απλά **υπόχωρος** του γραμμικού χώρου V εάν από μόνο του το U με τις ίδιες πράξεις είναι διανυσματικός χώρος.

Παρατήρηση 1.1.1 Αποδεικνύεται ότι το U είναι διανυσματικός υπόχωρος αν είναι κλειστό ως προς τις δυο πράξεις:

α) $(\forall x,y\in U)[x+y\in U\}$

β) $(\forall \lambda\in F)(\forall x\in U)[\lambda x\in U]$

ή ισοδύναμα εάν οποιοσδήποτε συνδυασμός από διανύσματα του U είναι διάνυσμα του U.

Παράδειγμα 1.1.1: Αν V είναι ο διανυσματικός χώρος των τετραγωνικών n×n πινάκων επί του σώματος R, τότε το σύνολο U των πινάκων $A=(\alpha_{ij})$ με $\alpha_{ij}=\alpha_{ji}$, (συμμετρικοί πίνακες), είναι ένας υπόχωρος του V.

Παράδειγμα 1.1.2: Έστω V ο διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων βαθμού n. Τότε το σύνολο U των πολυωνύμων βαθμού k<n είναι υπόχωρος του V.

Ορισμός 1.1.4 Ένα σύνολο $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_m\}$ μη μηδενικών διανυσμάτων του V ονομάζεται **γραμμικά ανεξάρτητο** και τα διανύσματα του $x_1,\ldots,x_m$ **γραμμικά ανεξάρτητα** εάν η σχέση:

$$\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\ldots+\lambda_m x_m=0 \qquad (1.1)$$

ισχύει μόνο όταν: $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_m=0 \qquad (1.2)$

Στην περίπτωση που η σχέση (1.1) δεν συνεπάγεται την (1.2), (δηλ. υπάρχουν δυο τουλάχιστον αριθμοί $\lambda_i,\lambda_j\neq 0$), τότε το σύνολο X ονομάζεται **γραμμικά εξαρτημένο** και τα διανύσματα του **γραμμικά εξαρτημένα**.

Ορισμός 1.1.5 Τα διανύσματα $x_1,x_2,\ldots,x_n$ λέγονται **γεννήτορες** του **γραμμικού χώρου** V εάν ισχύει:

$$(\forall x\in V)(\exists \lambda_1,\ldots,\lambda_n\in F)[\ x=\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\ldots+\lambda_n x_n\ ]$$

δηλ. κάθε διάνυσμα x του V μπορεί να γραφεί σαν γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων x_i i=1,…,n .

Ορισμός 1.1.6 Εάν τα διανύσματα $x_1,\ldots,x_n$ είναι:

(26 Με τα τελευταία γράμματα του Λατινικού αλφαβήτου θα συμβολίζουμε τα διανύσματα του χώρου V και με ελληνικά γράμματα τους αριθμούς του σώματος F.

α) γεννήτορες του V και

β) γραμμικά ανεξάρτητα

τότε λέμε ότι ο γραμμικός χώρος V είναι **n διαστάσεων** και ότι τα διανύσματα $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ αποτελούν μια **πεπερασμένη βάση** ή πιο απλά **βάση**.

Παρατήρηση 1.1.2 Μπορεί να δειχθεί ότι κάθε βάση του V έχει n σε πλήθος διανύσματα.

Ορισμός 1.1.7 Ο φυσικός αριθμός n ονομάζεται **διάσταση** του διαν. χώρου V.

Ορισμός 1.1.8 Εάν ο γραμμικός χώρος V δεν περιέχει μια πεπερασμένη βάση, τότε λέγεται **απείρων διαστάσεων**.

Το κύριο αντικείμενο της συναρτησιακής ανάλυσης είναι οι γραμμικοί χώροι απείρων διαστάσεων. Η απουσία μιας πεπερασμένης βάσης δημιουργεί τεράστιες δυσκολίες στην έρευνα της συναρτησιακής ανάλυσης. Οι δυσκολίες αυτές οδήγησαν στις έννοιες της **διαχωρισιμότητας** και της **άπειρης βάσης**, που θα διατυπώσουμε αργότερα.

Ορισμός 1.1.9 Σ' ένα διανυσματικό χώρο $(V,F,+,\cdot)$ θεωρούμε μια δεύτερη πράξη εσωτερικής σύνθεσης, που την συμβολίζουμε με • δηλ.:

$$\bullet: V\times V\rightarrow V$$

Αν η εσωτερική αυτή πράξη έχει τις εξής ιδιότητες:

1) $(\forall x,y,z\in V)[\ x\bullet(y+z)=x\bullet y+x\bullet z)\ ]$

2) $(\forall x,y,z\in V)[\ (x+y)\bullet z=x\bullet z+y\bullet z)\ ]$

3) $(\forall x,y\in V)(\forall\lambda\in F)[\ \lambda\cdot(x\bullet y)=(\lambda\cdot x)\bullet y=x\bullet(\lambda\cdot y)\ ]$

Τότε ο διανυσματικός χώρος V ονομάζεται **άλγεβρα επί του σώματος F**. Από τις επί πλέον ιδιότητες που μπορεί να έχει η δεύτερη πράξη, χαρακτηρίζεται και η άλγεβρα, π.χ.

α) $(x\bullet y)\bullet z=x\bullet(y\bullet z)$ Προσεταιριστική Ιδιότητα → **Προσεταιριστική Άλγεβρα**

β) $x\bullet y=y\bullet x$ Αντιμεταθετική ιδιότητα → **Αντιμεταθετική Άλγεβρα**

γ) $(\exists 1\in V)(\forall x\in V)[\ 1\bullet x=x\bullet 1=x\ ]$ Ύπαρξη ουδετέρου στοιχείου → **Άλγεβρα με ουδέτερο στοιχείο**

Παράδειγμα 1.1.3: Το σύνολο των τετραγωνικών πινάκων n×n με πραγματικά στοιχεία, σχηματίζει έναν διανυσματικό χώρο με πράξεις την πρόσθεση των πινάκων και τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό. Ο διανυσματικός αυτός χώρος μαζί με τον πολλαπλασιασμό των πινάκων, εύκολα μπορούμε να δούμε ότι αποτελεί άλγεβρα, η οποία είναι προσεταιριστική και έχει ουδέτερο στοιχείο, που είναι ο ταυτοτικός πίνακας.

1.2 Γραμμικοί Σταθμητοί (normed) χώροι - Μετρικοί χώροι

Οι πιο βασικές έννοιες στη μαθηματική ανάλυση είναι οι έννοιες του ορίου και της σύγκλισης με τα διάφορα είδη της. Η παράγωγος, το ολοκλήρωμα, οι σειρές κ.λ.π. είναι έννοιες που βασίζονται στις προηγούμενες. Είναι επομένως αναπόφευκτο να ορίσουμε την έννοια της σύγκλισης σε μια μαθηματική δομή που πρόκειται να εφαρμοσθεί σε προβλήματα μαθηματικής ανάλυσης. Επειδή στην κλασική ανάλυση η σύγκλιση ορίζεται με τη βοήθεια της απόλυτης τιμής είναι λογικό και φυσικό, προκείμενου να μιλάμε για σύγκλιση σ' ένα γραμμικό χώρο, να μεταφέρουμε την έννοια της απολύτου τιμής στους γραμμικούς χώρους γενικεύοντας την. Η πιο κατάλληλη γενίκευση είναι η έννοια της **norm**, (**στάθμης**).

Ορισμός 1.2.1 Έστω V ένας γραμμικός χώρος πάνω στο σώμα F. Μια απεικόνιση, που θα την συμβολίζουμε με $\|\cdot\|$, της μορφής:

$$\|\cdot\| \; V \to R^{+} \cup \{0\}$$

$$\|\cdot\| \; x \to \|x\| \geq 0.$$

ονομάζεται **norm**, (**στάθμη**), εάν ικανοποιεί τις ιδιότητες:

α) $(\forall x \in V)[\ \|x\| \geq 0$ και $\|x\|=0$ εάν και μόνο εάν $x=0\ ]$

β) $(\forall x,y \in V)[\ \|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|\ ]$

γ) $(\forall x \in V)(\forall \lambda \in F)[\ \|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|\ ]$

Ο γραμμικός χώρος V εφοδιασμένος με norm ονομάζεται **γραμμικός χώρος με norm** ή **σταθμητός γραμμικός χώρος**.

Παρατήρηση 1.2.1 Με τη βοήθεια της έννοιας της norm μπορούμε να μιλάμε για την σύγκλιση μιας ακολουθίας $\{x_n\}$ διανυσμάτων του V ορίζοντας:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \iff \lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$$

έτσι φθάνουμε στον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 1.2.2 Μια ακολουθία $\{x_n\}$ διανυσμάτων του V ονομάζεται συγκλίνουσα εάν υπάρχει διάνυσμα $x \in V$ έτσι ώστε η ακολουθία των μη αρνητικών αριθμών $\|x_n - x\|$ να τείνει στο μηδέν. Σ' αυτή την περίπτωση το x ονομάζεται **όριο** της συγκλίνουσας ακολουθίας $\{x_n\}$.

Παράδειγμα 1.2.1 Μια άμεση γενίκευση του μέτρου των γεωμετρικών διανυσμάτων για τους γραμμικούς χώρους n διαστάσεων είναι η εξής

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2} \qquad \text{με } x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n$$

Παράδειγμα 1.2.2 Άλλες χρήσιμες norm που μπορούμε να ορίσουμε σε n-διάστατους χώρους είναι:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|, \qquad \|x\|_\infty = \max|\lambda_i| \quad i=1,2,\cdots,n$$

Παράδειγμα 1.2.3 Το σύνολο των φραγμένων ακολουθιών των μιγαδικών αριθμών $\{x_n\}$ με την ιδιότητα:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \langle \infty \qquad \text{(τετραγωνικά αθροίσιμες)}$$

αποτελεί ένα norm χώρο, που ονομάζεται l^2-χώρος, με norm :

$$\|x_n\|_2 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \langle \infty$$

Παράδειγμα 1.2.4 Επίσης το παραπάνω σύνολο με norm:

$$\text{α) } \|x_n\|_\infty = \sup|x_i| \quad \text{και} \quad \text{β) } \|x_n\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$$

αποτελεί norm χώρο που συμβολίζεται με l^∞ και l^1 αντίστοιχα.

Παράδειγμα 1.2.5 Ο γραμμικός χώρος των συναρτήσεων, που είναι *συνεχείς* στο κλειστό διάστημα [α,β], αποτελεί norm χώρο με norm ;

$$||f||_\infty = \sup\{ |f(t)| \,/\, t\in[\alpha,\beta] \}$$

και ονομάζεται *C* [α,β]-χώρος ή πιο σύντομα *C* -χώρος όταν το πεδίο ορισμού είναι γνωστό.

Αποδεικνύεται ότι εάν μια ακολουθία $\{f_n\}$ συνεχών συναρτήσεων τείνει στο $f\in C$ σ' αυτό τον norm χώρο τότε η ακολουθία $\{f_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο κλειστό διάστημα [α,β] με όριο $f=\lim f_n$ συνεχή συνάρτηση. Αυτό σημαίνει ότι ο χώρος *C* [α,β] είναι ο πιο σημαντικός norm χώρος για τις συνεχείς συναρτήσεις.

Παρατήρηση 1.2.2 Από τα παραπάνω βλέπουμε ξεκάθαρα γιατί έπρεπε να εισάγουμε καινούργια ονομασία: norm, (ή στάθμη ή μέτρο), και καινούργιο συμβολισμό: $||\cdot||$ για την γενίκευση του μέτρου των γεωμετρικών διανυσμάτων. Έτσι μπορούμε να μιλάμε για απόλυτη τιμή $|f(t)|$ μιας συνεχούς συνάρτησης όπως και για τη norm της f, δηλ. την μεγίστη τιμή της $|f(t)|$ στο διάστημα [α,β].

Παράδειγμα 1.2.6 Άλλες χρήσιμες norm που ορίζονται στον ίδιο χώρο *C* [α,β] των συνεχών συναρτήσεων είναι:

α) $||f||_2=\sqrt{\int_\alpha^\beta |f(t)|^2\,dt}$ $\quad$ (L_0^2-χώρος)

β) $||f||_1=\int_\alpha^\beta |f(t)|\,dt$ $\quad$ (L_0^1-χώρος)

Παρατήρηση 1.2.3 Πολλά από τα γνωστά θεωρήματα που, αφορούν την σύγκλιση ακολουθιών μιγαδικών αριθμών, ισχύουν σε κάθε norm χώρο. Υπάρχουν όμως θεωρήματα, που δεν ισχύουν σε οποιονδήποτε norm χώρο.

Ορισμός 1.2.3 Μια ακολουθία $\{x_n\}$ σ' ένα norm χώρο V ονομάζεται **ακολουθία του Cauchy** ή **συγκλίνουσα στον εαυτό της** εάν:

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists N(\varepsilon)\in N)(\forall n,m>N(\varepsilon))\ \big[\ ||x_n-x_m||<\varepsilon\ \big]$$

Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι όσο μεγαλώνουν οι δείκτες τόσο πιο πολύ πλησιάζουν οι αντίστοιχοι όροι.

Θεώρημα 1.2.1 Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι ακολουθία του Cauchy.

Απόδειξη: Έστω x το όριο της ακολουθίας. Επειδή

$$||x_n-x_m||=||(x_n-x)+(x-x_m)||\leq ||x_n-x||+||x-x_m||$$

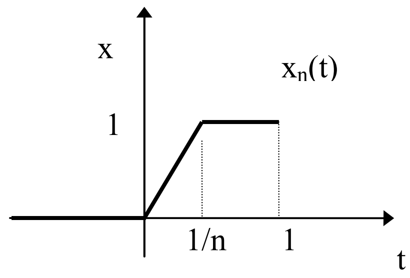
έπεται ότι $\quad \lim_{n\to\infty,\ m\to\infty} ||x_n-x_m||\leq\lim_{n\to\infty}||x_n-x||+ \lim_{m\to\infty}||x-x_m||=0$

δηλ. η ακολουθία $\{x_n\}$ είναι ακολουθία του Cauchy.

Παρατήρηση 1.2.4 Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος ισχύει στις πραγματικές και μιγαδικές ακολουθίες, όπως επίσης και στις ακολουθίες των γεωμετρικών διανυσμάτων. Το επόμενο παράδειγμα όμως δείχνει ότι το αντίστροφο του θεωρήματος του Cauchy δεν ισχύει σε κάθε norm χώρο.

Παράδειγμα 1.2.7 Ας θεωρήσουμε στο χώρο L_0^1[-1,+1] τις συναρτήσεις

$$x_n(t)=\begin{cases} 0 & \text{εαν } t<0 \\ nt & \text{εαν } 0\le t\le \dfrac{1}{n} \\ 1 & \text{εαν } t>\dfrac{1}{n} \end{cases}$$



οι οποίες προφανώς είναι συνεχείς. Η ακολουθία x_n είναι ακολουθία του Cauchy διότι για $n<m$ έχουμε:

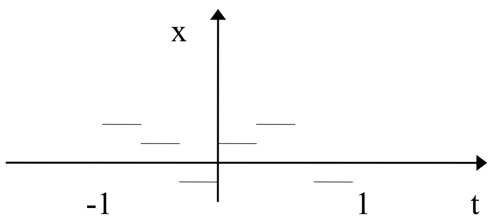
$$||x_n-x_m||_1=\int_{-1}^{1}\left|x_n(t)-x_m(t)\right|dt=\int_0^{1/m}(mt-nt)dt+\int_{1/m}^{1/n}(1-nt)dt=$$

$$\left[m\frac{t^2}{2}-n\frac{t^2}{2}\right]_0^{1/m}+\left[t-n\frac{t^2}{2}\right]_{1/m}^{1/n}=\left[\frac{1}{2m}-\frac{n}{2m^2}\right]+\left[\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}\right)-\left(\frac{1}{m}-\frac{n}{2m^2}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow}0$$

Θα δείξουμε ότι η ακολουθία $\{x_n\}$ δεν συγκλίνει, δηλ. δεν υπάρχει *συνεχής* συνάρτηση $x=x(t)$ έτσι ώστε $||x_n-x||_1\to 0$

Για τον σκοπό αυτό ας θεωρήσουμε ένα ευρύτερο norm χώρο, που περιλαμβάνει και τις συνεχείς συναρτήσεις και τις κλιμακωτές συναρτήσεις. Για μια κλιμακωτή συνάρτηση $y=y(t)$, το διάστημα $[-1,+1]$ μπορεί να διαιρεθεί σε ένα πεπερασμένο πλήθος υποδιαστημάτων $[t_i, t_{i+1}]$ έτσι ώστε η τιμή της $y=y(t)$ να είναι σταθερή σε κάθε ανοικτό διάστημα (t_i,t_{i+1}) και η ένωση των διαστημάτων$[t_i, t_{i+1}]$ να είναι το $[-1,+1]$.



Θεωρούμε τώρα τον γραμμικό χώρο που παράγεται από τις συνεχείς και κλιμακωτές συναρτήσεις στο διάστημα $[-1,+1]$ με norm:

$$||x||_1=\int_{-1}^{1}|x(t)|dt$$

Τότε για την κλιμακωτή συνάρτηση:

$$l_+(t)=\begin{cases} 0 & \text{εαν } t<0 \\ 1 & \text{εαν } t\ge 0 \end{cases}$$

έχουμε: $$\int_{-1}^{1}\left|l_+(t)-x_n(t)\right|dt=\int_0^{1/n}(1-nt)dt=\frac{1}{2n}$$

και επομένως

$$\lim_{n\to\infty}||l_+-x_n||=0$$

δηλ η κλιμακωτή συνάρτηση l_+, (που δεν είναι συνεχής), είναι το όριο της ακολουθίας των συνεχών συναρτήσεων x_n. Επειδή όμως το όριο μιας συγκλίνουσας ακολουθίας είναι μοναδικό σ' ένα norm χώρο και επειδή $l_+ \notin L_0^1(-1,+1)$ έπεται ότι δεν υπάρχει όριο, (δηλ. συνεχής συνάρτηση), για την ακολουθία x_n μέσα στο χώρο L_0 .

Ορισμός 1.2.4 Ένας norm χώρος V λέγεται **πλήρης** εάν κάθε ακολουθία Cauchy από διανύσματα του V συγκλίνει στον V. Ένας πλήρης norm χώρος λέγεται **χώρος Banach**.

Το προηγούμενο παράδειγμα δείχνει ότι ο χώρος $L_0^1[-1,+1]$ δεν είναι πλήρης. Με όμοιο τρόπο μπορεί να δειχθεί ότι και ο χώρος $L_0^2[\alpha, \beta]$ δεν είναι πλήρης.

Ο χώρος $C\,[\alpha, \beta]$ είναι πλήρης και επομένως είναι χώρος Banach. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι εάν μια ακολουθία $\{f_n\}$ συνεχών συναρτήσεων συγκλίνει ομοιόμορφα στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ σε μια συνάρτηση f, τότε η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. Πράγματι, έστω $f_n(t)$ μια ακολουθία του Cauchy. Τότε:

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists N(\varepsilon)\in N)(\forall n,m>N(\varepsilon))\ \left[\sup_t\{\ |f_n(t)-f_m(t)| <\varepsilon\ \right]$$

Στην παραπάνω σχέση, εάν θεωρήσουμε το t σταθερό, τότε έχουμε μια ακολουθία $f_n(t)$ πραγματικών, (ή μιγαδικών) αριθμών που είναι ακολουθία Cauchy στον διανυσματικό χώρο V=R ή C. Επειδή οι διανυσματικοί αυτοί χώροι είναι πλήρεις, η παραπάνω Cauchy ακολουθία θα συγκλίνει. Έστω f(t) το όριο της. Με αυτόν τον τρόπο έχουμε κατασκευάσει μια συνάρτηση $f(t)$: $[\alpha, \beta] \to$ R ή C. Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι αυτή η συνάρτηση είναι α) συνεχής και επομένως ανήκει στον συναρτησιακό χώρο $C\,[\alpha,\beta]$ και β) είναι το όριο της ακολουθίας $f_n(t)$.

α) Θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση f(t) είναι συνεχής σ' ένα τυχαίο σημείο $t_0\in[\alpha, \beta]$. Δηλ. πρέπει να αποδείξουμε την σχέση:

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall t\in[\alpha, \beta])\ \left[\ |t-t_0|<\delta\ \to\ |f(t)-f(t_0)| <\varepsilon\ \right]$$

Έχουμε $\quad |f(t)-f(t_0)|\leq |f(t)-f_n(t)|+ |f_n(t)-f(t_0)|\leq |f(t)-f_n(t)|+ |f_n(t)-f_n(t_0)|+ |f_n(t_0)-f(t_0)|$

Για n αρκετά μεγάλο, ο πρώτος και ο τρίτος όρος γίνονται όσο μικροί θέλουμε, διότι εκ κατασκευής η συνάρτηση f(t) είναι το όριο της ακολουθίας $f_n(t)$. Επίσης, λόγω της συνέχειας της συνάρτησης $f_n(t)$, ο μεσαίος όρος μπορεί και αυτός να γίνει οσοδήποτε μικρός για $|t-t_0|$ κατάλληλα μικρό, κάτι που μας το παρέχει η σχέση $|t-t_0|<\delta$. Άρα η f(t) είναι συνεχής συνάρτηση.

β) Θα δείξουμε τώρα ότι η ακολουθία Cauchy $f_n(t)$ συγκλίνει στην f(t). Από τα προηγούμενα αποδείξαμε ότι:

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists N>0)(\forall t\in[\alpha, \beta])\ \left[\ n>N\ \to\ |f_n(t)-f(t)| <\varepsilon\ \right]\ \Rightarrow$$

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists N>0)\ \left[\ n>N\ \to\ \sup_{t\in[\alpha,\beta]} |f_n(t)-f(t)| <\varepsilon\ \right]$$

η τελευταία σχέση σημαίνει ότι η ακολουθία $f_n(t)$ συγκλίνει ως προς την norm $\|\cdot\|_\infty$ και μάλιστα το όριο της είναι η f(t).

Ορισμός 1.2.5 Ο norm χώρος V ονομάζεται **συμπαγής** εάν κάθε ακολουθία $\{x_n\}$ από διανύσματα του V περιέχει μια υποακολουθία, η οποία συγκλίνει σ' ένα διάνυσμα x του V.

Το **θεώρημα των Bolzano-Weierstrass** λεει ότι κάθε φραγμένο και κλειστό υποσύνολο των πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών είναι συμπαγές. Το ίδιο ισχύει και για τα φραγμένα και κλειστά υποσύνολα του ευκλειδείου χώρου R^3. Το επόμενο παράδειγμα όμως δείχνει ότι το θεώρημα Bolzano-Weierstrass δεν ισχύει για κάθε norm χώρο.

Παράδειγμα 1.2.8 Στον norm χώρο l^2 η ακολουθία $\{e_k\}$ k=1,2,… όπου

$$e_k=\{0,0,\ldots,0,1,0,\ldots\}\ \text{(η μονάδα βρίσκεται στην k θέση)}$$

ανήκει στην κλειστή μοναδιαία σφαίρα $S(0,1)=\{x: ||x||\leq 1\}$ με κέντρο το μηδενικό διάνυσμα 0 και ακτίνα 1. Όμως δεν υπάρχει καμία συγκλίνουσα υποακολουθία της $\{e_k\}$ που να συγκλίνει, επειδή για κάθε ζεύγος e_n, e_m έχουμε: $||e_n-e_m||=\sqrt{2}$, δηλαδή καμμία υποακολουθία δεν είναι ακολουθία Cauchy και επομένως δεν μπορεί να συγκλίνει.

Παρατήρηση 1.2.5 Σ' ένα γραμμικό χώρο, όπως είδαμε, μπορούν να ορισθούν πολλές διαφορετικές norm και επομένως να έχουμε διαφορετικούς norm χώρους. Π.χ. από τον γραμμικό χώρο των συνεχών συναρτήσεων στο κλειστό πεπερασμένο διάστημα [α, β] ο χώρος Banach *C* [α, β] προκύπτει εάν εφοδιαστεί με τη norm $||\cdot\cdot||_\infty$. Όμως ο ίδιος γραμμικός χώρος των συνεχών συναρτήσεων με norm την $||\cdot\cdot||_1$ είναι ο, (μη πλήρης), norm χώρος L_0^1[α, β] και με τη norm $||\cdot\cdot||_2$ είναι ο, (μη πλήρης), norm χώρος L_0^2[α, β]. Είναι επομένως χρήσιμο και αναγκαίο να βρούμε κάποιο τρόπο για να συγκρίνουμε τις διάφορες norm.

Ορισμός 1.2.6 Εάν ο γραμμικός χώρος V είναι εφοδιασμένος με δυο διαφορετικές norm, έστω τις $||\cdot\cdot||$ και $||\cdot\cdot||^*$, τότε η norm $||\cdot\cdot||$ λέγεται ότι είναι **ισχυρότερη** από την $||\cdot\cdot||^*$, (και επομένως η $||\cdot\cdot||^*$ λέγεται **ασθενέστερη** από την $||\cdot\cdot||$), εάν:

$$(\exists K>0)(\forall x\in V)\big[\ ||x||^*\leq K||x||\ \big]$$

Παρατήρηση 1.2.6 Εάν η norm $||\cdot\cdot||$ είναι ισχυρότερη από την $||\cdot\cdot||^*$ τότε κάθε ακολουθία που συγκλίνει ως προς την πρώτη norm $||\cdot\cdot||$ συγκλίνει και ως προς την δεύτερη norm $||\cdot\cdot||^*$. Το αντίστροφο δεν ισχύει

Ορισμός 1.2.7 Οι norm $||\cdot\cdot||$ και $||\cdot\cdot||^*$ είναι **ισοδύναμες** εάν:

$$(\exists K_1,K_2)(\forall x\in V)\big[\ K_1||x||^*\leq||x||\leq K_2||x||^*\ \big]$$

Παράδειγμα 1.2.9 Στον γραμμικό χώρο των συνεχών συναρτήσεων, που ορίζονται στο φραγμένο και κλειστό διάστημα [α, β], η norm $||\cdot\cdot||_\infty$ είναι ισχυρότερη από την norm $||\cdot\cdot||_1$ διότι για κάθε συνεχή συνάρτηση f ισχύει:

$$\int_\alpha^\beta |f(t)|\,dt \leq(\beta-\alpha)\sup\{|f(t)|/t\in[\alpha,\beta]\}\ \text{δηλ.}\ ||f||_1\leq K||f||_\infty\ \text{ με } K=\beta-\alpha$$

Παράδειγμα 1.2.10 Στον γραμμικό χώρο των n-άδων των μιγαδικών αριθμών, οι norm $||\cdot\cdot||_1$, $||\cdot\cdot||_2$ και $||\cdot\cdot||_\infty$ είναι ισοδύναμοι. Πράγματι για $x=(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ έχουμε:

$$\max_k |\xi_k| \leq \sum_{k=1}^n |\xi_k| \leq n \max_k |\xi_k|$$

και άρα $||x||_\infty\leq||x||_1\leq n||x||_\infty$, δηλ οι norm $||\cdot\cdot||_\infty$ και $||\cdot\cdot||_1$ είναι ισοδύναμες.

Η ισοδυναμία των $||\cdot\cdot||_\infty$ και $||\cdot\cdot||_2$ προκύπτει κατά παρόμοιο τρόπο. Έχουμε:

$$\max_k |\xi_k|^2\leq \sum_{k=1}^n |\xi_k|^2\leq n \max_k |\xi_k|^2 \Rightarrow ||x||_\infty\leq||x||_2\leq \sqrt{n}||x||_\infty$$ δηλ οι norm $||\cdot\cdot||_\infty$ και $||\cdot\cdot||_2$ είναι ισοδύναμες.

Θεώρημα 1.2.1 Εάν οι δυο norm $||\cdot\cdot||$ και $||\cdot\cdot||^*$ του V είναι ισοδύναμες, τότε μια ακολουθία, που συγκλίνει ως προς τη μια norm, θα συγκλίνει και ως προς την άλλη. Επίσης εάν ο χώρος (V, $||\cdot\cdot||$) είναι πλήρης, πλήρης θα είναι και ο χώρος (V, $||\cdot\cdot||^*$) και αντίστροφα.

Ορισμός 1.2.8: Θεωρούμε ένα σύνολο $E\neq\emptyset$ και μια απεικόνιση $d: ExE\rightarrow R^+$ με τις ιδιότητες

1. $d(x, y)=0 \Leftrightarrow x=y$
2. $d(x, y)=d(y, x)$

3. $d(x, y) \le d(x, z) + d(z, y)$ (τριγωνική ιδιότητα)

Τότε το σύνολο E ονομάζεται **μετρικός χώρος** και συνήθως συμβολίζεται με (E, d), τα δε στοιχεία του **σημεία** και η απεικόνιση d **απόσταση**.

Παράδειγμα 1.2.11: Στο σύνολο $L(f(x), [\alpha, \beta])$ μπορούμε να ορίσουμε τις εξής μετρικές:

1) $d_1(f,g) = \max_{x\in[\alpha,\beta]}|f(x)-g(x)|$

2) $d_2(f,g) = \int_\alpha^\beta |f(x)-g(x)|dx$

3) $$d_3(f,g) = \int_\alpha^\beta \frac{|f(x)-g(x)|}{1+|f(x)-g(x)|}dx$$

Παράδειγμα 1.2.12: Στην μοναδιαία περιφέρεια $x^2+y^2=1$ μπορούμε να ορίσουμε τις εξής 2 μετρικές:

1) $$d_1(P_1,P_2) = d_1((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

2) $d_2(P_1,P_2)$=το μικρότερο τόξο της μοναδιαίας περιφέρειας που συνδέει τα σημεία P_1, P_2 .

Από τους προηγούμενους ορισμούς του σταθμητού και μετρικού διανυσματικού χώρου, βλέπουμε ότι:

Παρατήρηση 1.2.7: Ένας χώρος για να είναι σταθμητός, πρέπει οπωσδήποτε να είναι και διανυσματικός. Στους μετρικούς χώρους αυτό δεν απαιτείται.

Παρατήρηση 1.2.8: Κάθε σταθμητός διανυσματικός χώρος γίνεται πάντα μετρικός με απόσταση $d(x, y)=||x-y||$

<u>Απόδειξη</u>:

1. $d(x, y)=0 \Leftrightarrow ||x-y||=0 \Leftrightarrow x-y=0 \Leftrightarrow x=y$
2. $d(x, y)= ||x-y||=||(-1)(x-y)||=||y-x||=d(y, x)$
3. $d(x, y)= ||x-y||=||x-z+z-y||=||(x-z)+(z-x)|| \le ||x-z||+||z-y||=d(x, z)+d(z, y)$

Παρατήρηση 1.2.9: Όταν ξέρουμε ότι μια απόσταση προέρχεται από μια norm, τότε η norm δίνεται από τη σχέση:

$$||x||=d(x, 0)$$

1.3 Χώροι απείρων διαστάσεων - Γεωμετρία των norm χώρων - Διαχωρισιμότητα.

Σ' ένα n-διάστατο χώρο, οι υπολογισμοί μπορούν να γίνουν με τη βοήθεια μιας πεπερασμένης βάσης. Η έλλειψη όμως μιας τέτοιας βάσης σ' έναν απείρων διαστάσεων χώρο δημιουργεί προβλήματα στις εφαρμογές. Το ευτύχημα είναι ότι πολλοί norm χώροι V απείρων διαστάσεων περιέχουν μια άπειρη ακολουθία $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots\}$ διανυσμάτων, που ονομάζεται **θεμελιώδης ακολουθία**, με την ιδιότητα ότι *κάθε διάνυσμα* $x \in V$ *μπορεί να προσεγγιστεί από πεπερασμένο γραμμικό συνδυασμό διανυσμάτων, που ανήκουν στη θεμελιώδη ακολουθία*. Αυτοί οι χώροι θα ονομάζονται **διαχωρίσιμοι χώροι**. Σ' ένα διαχωρίσιμο norm χώρο, μια θεμελιώδης ακολουθία παίζει στις περισσότερες περιπτώσεις τον ρόλο μιας **θεμελιώδους βάσης**.

Ας ξεκινήσουμε όμως από τη γενική περίπτωση ενός διανυσματικού χώρου απείρων διαστάσεων, στον οποίο θα προσπαθήσουμε να μεταφέρουμε τις έννοιες: του γραμμικά ανεξάρτητου συνόλου, του συνόλου γεννητόρων και της βάσης. Σε μια τέτοια όμως περίπτωση ένας γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων, των οποίων το πλήθος δεν θα είναι γενικά πεπερασμένο αλλά άπειρο, θα αποτελεί μια σειρά, την οποία πρέπει να εξετάσουμε ως προς την σύγκλιση. Η έννοια όμως της σύγκλισης είναι καθαρά τοπολογική έννοια. Ένας όμως διανυσματικός χώρος είναι μια αλγεβρική δομή, που δεν μπορεί να εξετάσει προβλήματα σύγκλισης. Έτσι λοιπόν υπάρχουν δυο λύσεις στο πρόβλημα αυτό:

A) Οι έννοιες του γραμμικά ανεξάρτητου συνόλου, του συνόλου γεννητόρων και της βάσης, που θα ορισθούν σε χώρους απείρων διαστάσεων, να αναχθούν στις γνωστές έννοιες των χώρων πεπερασμένης διάστασης.

B) Να δώσουμε στον διανυσματικό χώρο **τοπολογική δομή**. Αυτό μπορεί να γίνει με το να εισάγουμε μια norm στον διανυσματικό χώρο.

A) <u>Με τον πρώτο τρόπο</u> οι επίμαχοι ορισμοί τροποποιούνται ως εξής:

Ορισμός 1.3.1 Ένα υποσύνολο S, (πεπερασμένο ή απείρως αριθμήσιμο[27] ή άπειρο με την ισχύ του συνεχούς[28]), του διαν. χώρου V, λέγεται ότι αποτελεί **σύστημα γεννητόρων** εάν:

$$(\forall x\in V)(\exists s_i\in S,\ i=1,\cdots,m)\big[\ x=\lambda_1 s_1+\cdots+\lambda_m s_m\ \big]$$

δηλ. κάθε διάνυσμα $x\in V$ μπορεί να γραφεί σαν γραμμικός συνδυασμός <u>πεπερασμένου πλήθους</u> διανυσμάτων του S.

Ορισμός 1.3.2 Ένα υποσύνολο S, (πεπερασμένο ή απείρως αριθμήσιμο ή άπειρο με την ισχύ του συνεχούς), του διαν. χώρου V, λέγεται **γραμμικά ανεξάρτητο** όταν κάθε <u>πεπερασμένο</u> υποσύνολο του S είναι γραμμικά ανεξάρτητο[29].

Ορισμός 1.3.3 Ονομάζουμε **βάση**, (ή **βάση του Hamell**) ενός διαν. χώρου κάθε υποσύνολο B του διαν. χώρου V, που είναι:

α) γραμμικά ανεξάρτητο και

β) σύστημα γεννητόρων

(27 Ένα σύνολο A λέμε ότι είναι απείρως αριθμήσιμο εάν υπάρχει αντιστοιχία f μεταξύ των φυσικών αριθμών και των στοιχείων του συνόλου A, δηλ.

$$f: N\to A\quad f: n\mapsto f(n)=\alpha_n$$

Με άλλα λόγια το σύνολο A αποτελείται από τους όρους μιας ακολουθίας.

(28 Ένα απειροσύνολο A, που δεν είναι αριθμήσιμο, θα λέμε ότι έχει την ισχύ του συνεχούς.

(29 Στην περίπτωση που το σύνολο S είναι αριθμήσιμο, δηλ. $S=\{s_1,s_2,\cdots,s_n,\cdots\}$, ο ορισμός 1.3.2 μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής: Το σύνολο S είναι γραμμικά ανεξάρτητο εάν ισχύει:

$$\{s_1,s_2,\cdots,s_n\}=\text{γραμμικά ανεξάρτητο}\ \Rightarrow\ \{s_1,s_2,\cdots,s_n,s_{n+1}\}=\text{γραμμικά ανεξάρτητο για κάθε } n.$$

Β) Με τον δεύτερο τρόπο, που συγκεντρώνει περισσότερο ενδιαφέρον, τα πράγματα έχουν ως εξής:

Θεωρούμε ένα norm διαν. χώρο $(V, \|\cdot\cdot\|)$. Ο χώρος αυτός με την βοήθεια της norm $\|\cdot\cdot\|$ δέχεται μια τοπολογική δομή, με την οποία μπορούμε να ελέγχουμε την σύγκλιση ακολουθιών ή σειρών διανυσμάτων. Στο σημείο αυτό πρέπει να θυμηθούμε ορισμένες βασικές τοπολογικές έννοιες.

Ορισμός 1.3.4 Το σύνολο των διανυσμάτων ενός norm χώρου $(V, \|\cdot\cdot\|)$, που ορίζεται από τη σχέση:

$$\{ x: \|x-x_0\|<r \}$$

ονομάζεται **ανοικτή σφαίρα με κέντρο το** x_0 **και ακτίνα** r. Θα συμβολίζεται δε με $S(x_0,r)$.

Ορισμός 1.3.5 Ένα υποσύνολο $U\subset V$ ονομάζεται **ανοικτό** εάν

$$(\forall x\in U)(\exists r>0)\left[\ S(x, r)\subset U\ \right]$$

και **κλειστό** εάν το συμπλήρωμα του ως προς τον V είναι ανοικτό.

Ορισμός 1.3.6 Έστω U ένα υποσύνολο του V. Το **κλείσιμο** $\overline{U}$ του υποσυνόλου U ορίζεται από τη σχέση:

$$\overline{U}=\left\{\ x\in V\ /\ S(x, r)\cap U\neq\varnothing,\ \ \forall r>0\ \right\}$$

Ορισμός 1.3.7 Ένα υποσύνολο S, (πεπερασμένο ή αριθμήσιμα άπειρο ή άπειρο με την ισχύ του συνεχούς), του διαν. χώρου V, λέγεται ότι αποτελεί **σύστημα γεννητόρων** εάν ο διαν. χώρος V είναι το κλείσιμο του υποχώρου $U\subset V$, που αποτελείται από όλους τους πεπερασμένους γραμμικούς συνδυασμούς διανυσμάτων από το υποσύνολο S. Δηλ. $\overline{U}=V$ όπου:

$$U=\left\{\sum_{i=1}^{m}\lambda_i x_i\ \ /\ m\in N,\ x_i\in S\right\}$$

Προφανώς το υποσύνολο U αποτελεί υπόχωρο του διανυσματικού χώρου V.

Παρατήρηση 1.3.1 i) Εάν το υποσύνολο S είναι πεπερασμένο τότε οι ορισμοί 1.3.1 και 1.3.7 συμπίπτουν, (το σύνολο $\sum_{i=1}^{N}\lambda_i x_i$ είναι ήδη κλειστό).

ii) Εάν το υποσύνολο S είναι αριθμήσιμα άπειρο, τότε ο ορισμός 1.3.7 απλοποιείται και μπορεί να εκφρασθεί ως εξής:

Ορισμός 1.3.7α Ένα αριθμήσιμα άπειρο υποσύνολο $S=\{x_1,\cdots,x_i,\cdots\}$ του διαν. χώρου V αποτελεί **σύστημα γεννητόρων** εάν κάθε διάνυσμα $x\in V$ μπορεί να γραφεί ή σαν ένας πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i x_i$ ή σαν το όριο

$$x=\lim_{n\to\infty} y_n \ \text{ όπου }\ y_n=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i$$

Παρατήρηση 1.3.2 Ο ορισμός της γραμμικής ανεξαρτησίας ενός συνόλου διανυσμάτων είναι και εδώ ο ίδιος όπως και στην πρώτη περίπτωση του ορισμού 1.3.2

Ορισμός 1.3.8 Ένα υποσύνολο B, (πεπερασμένο ή αριθμήσιμα άπειρο ή άπειρο με την ισχύ του συνεχούς) του διαν. χώρου V λέγεται **βάση** εάν αποτελεί σύστημα γεννητόρων και είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Από τον ορισμό 1.3.7α η πιο ευνοϊκή περίπτωση είναι κάθε διάνυσμα $x \in V$ να γράφεται σαν πεπερασμένος συνδυασμός διανυσμάτων του S. Η περίπτωση αυτή προσεγγίζεται όταν ο διαν. χώρος V είναι διαχωρίσιμος. Όταν ένας χώρος είναι διαχωρίσιμος, τότε συμπεριφέρεται σαν διανυσματικός χώρος πεπερασμένων διαστάσεων.

Πριν όμως διατυπώσουμε τον ορισμό του διαχωρίσιμου διανυσματικού χώρου, είναι απαραίτητο να αναφέρουμε ορισμένα τοπολογικά θεωρήματα και έννοιες.

Θεώρημα 1.3.1 Ένα διάνυσμα x_0 ανήκει στο κλείσιμο $\overline{U}$ του U εάν και μόνο εάν είναι το όριο κάποιας ακολουθίας, δηλ. εάν υπάρχει μια ακολουθία $\{x_n \,;\, x_n \in U\}$ διανυσμάτων του U τέτοια ώστε $x_n \to x_0$ όταν το $n \to \infty$.

<u>Απόδειξη</u>: Εάν το x_0 ανήκει στο κλείσιμο του U, τότε κάθε ανοικτή σφαίρα $S(x_0, 1/n)$ $n=1,2,\cdots$ περιέχει κάποιο διάνυσμα $x_n \in U$ και άρα $\|x_n - x_0\| < 1/n$ $n=1,2,\cdots$ δηλ. $x_n \to x_0$

Αντιστρόφως, εάν η ακολουθία x_n από διανύσματα του U συγκλίνει στο x_0, τότε, από τον ορισμό της σύγκλισης, όλοι οι όροι της ακολουθίας, εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος της, περιέχονται σε μια ανοικτή σφαίρα με κέντρο το όριο x_0. Άρα το $x_0 \in \overline{U}$.

Παρατήρηση 1.3.3 Ένα υποσύνολο U του V είναι κλειστό εάν ισχύει $\overline{U} = U$.

Ορισμός 1.3.9 Ένα υποσύνολο U του V ονομάζεται **πυκνό** ως προς τον V εάν $\overline{U} = V$.

Παρατήρηση 1.3.4 Από το προηγούμενο θεώρημα διαπιστώνουμε ότι ένα υποσύνολο U του V είναι πυκνό ως προς τον V εάν:

$$(\forall x \in V)(\exists x_n \in U)\big[\; x_n \to x \;\big]$$

δηλ. εάν κάθε $x \in V$ είναι το όριο κάποιας ακολουθίας x_n, της οποίας οι όροι ανήκουν στο U. <u>Αυτό σημαίνει ότι με στοιχεία x_n του U μπορούμε να προσεγγίσουμε οποιοδήποτε στοιχείο x του V με οποιαδήποτε ακρίβεια θέλουμε</u>.

Ορισμός 1.3.10 Ο norm χώρος V λέγεται **διαχωρίσιμος** εάν υπάρχει ένα <u>αριθμήσιμο</u> υποσύνολο $U \subseteq V$, το οποίο είναι πυκνό ως προς τον V.

Η έννοια της διαχωρισιμότητας πρακτικά λεει ότι κάθε διάνυσμα $x \in V$ μπορεί να προσεγγιστεί με οποιαδήποτε ακρίβεια από ένα άθροισμα της μορφής

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i$$

όπου η ακολουθία $\{e_i\}$ αποτελεί μια θεμελιώδη βάση.

Παράδειγμα 1.3.1 Ας θεωρήσουμε το αριθμήσιμο σύνολο $\{t^n \,;\, n=1, 2, \cdots\}$ στον χώρο $C[\alpha,\beta]$. Από το θεώρημα του Weierstrass, κάθε συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ μπορεί να προσεγγιστεί από πολυώνυμα σε σχέση με την ομοιόμορφη σύγκλιση. Επειδή όμως η ομοιόμορφη σύγκλιση στο $[\alpha, \beta]$ είναι η ίδια με την σύγκλιση στον Banach χώρο $C\,[\alpha, \beta]$, έπεται ότι ο χώρος $C\,[\alpha, \beta]$ είναι διαχωρίσιμος. Δηλ. το σύνολο των πολυωνύμων είναι παντού πυκνό ως προς το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων του χώρου $C\,[\alpha, \beta]$.

Παράδειγμα 1.3.2 Ας θεωρήσουμε το αριθμήσιμο σύνολο $\{e_n\ ;\ n=1,\ 2,\ \cdots\}$ του χώρου l^2, όπου το e_n είναι η ακολουθία, της οποίας το n-στο στοιχείο είναι 1 και όλα τα αλλά 0. Είναι προφανές ότι κάθε πεπερασμένη ακολουθία, (δηλ. ακολουθία με όλα τα στοιχεία της να είναι 0 εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος), είναι ένας γραμμικός συνδυασμός στοιχείων από το σύνολο $\{e_n\ ;\ n=1,\ 2,\ \cdots\}$. Επί πλέον, οι πεπερασμένες ακολουθίες σχηματίζουν ένα πυκνό υποσύνολο ως προς τον l^2. Πράγματι, εάν:

$$x=\{\xi_k\ ;\ k=1,\ 2,\ \cdots\}\in l^2$$

και

$$x_n=\{\xi_{nk}\ ;\ k=1,\ 2,\ \cdots\}$$

όπου

$$\xi_{nk}=\begin{cases}\xi_k & \text{εαν}\quad k\le n\\ 0 & \text{εαν}\quad k>n\end{cases}$$

τότε προφανώς $\|x-x_n\|_2\to 0$ και επομένως ο χώρος l^2 είναι διαχωρίσιμος

Παράδειγμα 1.3.3 Οι πεπερασμένες ακολουθίες δεν αποτελούν πυκνό υποσύνολο στον χώρο l^∞. Πράγματι εάν $x=\{\xi_k\ ;\ k=1,\ 2,\ \cdots\}\in l^\infty$ τότε για οποιαδήποτε πεπερασμένη ακολουθία $x_n=\{\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_n,\ 0,\ \cdots\}$ έχουμε $\|x-x_n\|_\infty>1$. Επί πλέον μπορεί να δειχθεί ότι δεν υπάρχει αριθμήσιμο υποσύνολο πυκνό ως προς τον χώρο l^∞, δηλαδή ο χώρος l^∞ δεν είναι διαχωρίσιμος χώρος.

Παράδειγμα 1.3.4 Κάθε πραγματική συνεχής συνάρτηση στο κλειστό διάστημα $[0,\ 2\pi]$ αναπτύσσεται σε σειρά Fourier, που συγκλίνει στον χώρο $L_0^2[0,\ 2\pi]$, όπως ξέρουμε από το θεώρημα Riesz-Fischer. Επομένως ο γραμμικός χώρος, που παράγεται από το σύνολο των συναρτήσεων $\{1,\ \sin nt,\ \cos nt\ ;\ n=1,2,\cdots\}$ είναι πυκνό ως προς τον $L_0^2[0,\ 2\pi]$ και κατά συνέπεια ο χώρος L_0^2 είναι διαχωρίσιμος.

Παρατήρηση 1.3.5 Η προσέγγιση από πολυώνυμα των στοιχείων του $C\ [\alpha,\ \beta]$ και η προσέγγιση από τριγωνομετρικές συναρτήσεις των στοιχείων του $L_0^2(0,\ 2\pi)$ μέσα από την ανάπτυξη Fourier είναι τελείως διαφορετικής φύσης. Για κάθε $f\in L_0^2$ μπορούμε να κατασκευάσουμε μια άπειρη σειρά, την σειρά Fourier, και η f να προσεγγιστεί από τα μερικά αθροίσματα της σειράς. Όμως, στη μορφή μιας δυναμοσειράς, (ανάπτυγμα Taylor), μόνο ορισμένες απείρως παραγωγίσιμες συναρτήσεις μπορούν να προσεγγιστούν στο χώρο $C\ [\alpha,\ \beta]$.

Έτσι πρέπει να κάνουμε διάκριση μεταξύ δυο διαφορετικών περιπτώσεων. Εάν υπάρχει ένα αριθμήσιμο υποσύνολο $\{e_n\ ;\ n=1,\ 2,\ \cdots\}$ τέτοιο ώστε ο γραμμικός χώρος, που παράγεται από το υποσύνολο αυτό, είναι πυκνός ως προς τον V, δηλ. κάθε $x\in V$ μπορεί να προσεγγιστεί με οποιαδήποτε ακρίβεια από, (πεπερασμένα), αθροίσματα:

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i e_{n_i}$$

τότε το υποσύνολο $\{e_n\ ;\ n=1,\ 2,\ \cdots\}$ ονομάζεται **θεμελιώδης ακολουθία**. Αυτή είναι η περίπτωση του υποσύνολου $\{t^n\ ;\ n=1,\ 2,\ \cdots\}$ στο χώρο $C\ [\alpha,\ \beta]$.

Εάν κάθε $x\in V$ μπορεί να δοθεί υπό τη μορφή μιας άπειρης σειράς:

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k e_k$$

τότε το υποσύνολο $\{e_n\ ; n=1, 2, \cdots\}$ ονομάζεται **άπειρη βάση**. Αυτή είναι η περίπτωση του υποσύνολου $\{e^{int}\ ; n=0, \pm1, \pm2, \cdots\}$ του χώρου $L_0^2[0, 2\pi]$.

Και στις δυο περιπτώσεις ο χώρος V είναι διαχωρίσιμος.

ΑΣΚΗΣΗ

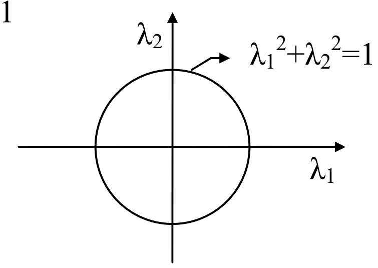
1) Στον διανυσματικό χώρο $V=R^2$ να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των άκρων των διανυσμάτων $x=\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2$ ως προς τις norm:

α) $||x||_2=\sqrt{|\lambda_1|^2+|\lambda_2|^2}$ με την συνθήκη $||x||_2=1$

β) $||x||_1=|\lambda_1|+|\lambda_2|$ με την συνθήκη $||x||_1=1$

γ) $||x||_\infty=\max|\lambda_i|\ \ i=1,2$ με την συνθήκη $||x||_\infty=1$

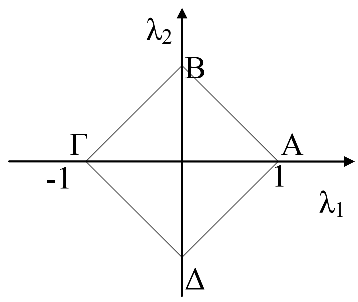
<ins>Λύση</ins>: α) $||x||_2=\sqrt{|\lambda_1|^2+|\lambda_2|^2}=1 \Rightarrow \lambda_1^2+\lambda_2^2=1$



Επομένως στο επίπεδο $O\lambda_1\lambda_2$ τα άκρα των διανυσμάτων $x=\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2$, που πληρούν την παραπάνω σχέση, βρίσκονται πάνω σε περιφέρεια με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1.

β) $||x||_1=|\lambda_1|+|\lambda_2|=1$

Διακρίνουμε τις εξής τέσσερις περιπτώσεις:



β_1) $\lambda_1,\ \lambda_2 \geq 0$, τότε $\lambda_1+\lambda_2=1$ με αντίστοιχη γραφική παράσταση το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.

β_2) $\lambda_1\leq 0,\ \lambda_2 \geq 0$, τότε $-\lambda_1+\lambda_2=1$ με αντίστοιχη γραφική παράσταση το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ.

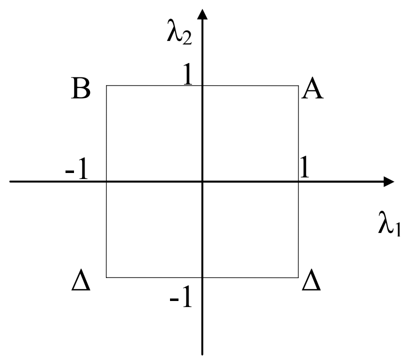
β_3) $\lambda_1\leq 0,\ \lambda_2\leq 0$, τότε $\lambda_1+\lambda_2=-1$ με αντίστοιχη γραφική παράσταση το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ.

β_4) $\lambda_1\geq 0,\ \lambda_2\leq 0$, τότε $\lambda_1-\lambda_2=1$ με αντίστοιχη γραφική παράσταση το ευθύγραμμο τμήμα ΔΑ.

Επομένως τα άκρα των διανυσμάτων, που πληρούν την σχέση $||x||_1=|\lambda_1|+|\lambda_2|=1$ βρίσκονται στην περίμετρο του τετραγώνου ΑΒΓΔ.

γ) $||x||_\infty=\max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\}=1$

Εργαζόμενοι όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις, βρίσκουμε ότι τα άκρα των διανυσμάτων βρίσκονται πάνω στην περίμετρο του τετραγώνου ΑΒΓΔ.



2 Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ HILBERT ΧΩΡΟΥ

Στον ευκλείδειο διανυσματικό χώρο R^3 η norm, δηλ. το μέτρο ενός διανύσματος, προκύπτει από το εσωτερικό γινόμενο, $|\vec{\mathbf{r}}|=\sqrt{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}}$ Γενικά όμως η norm σ' ένα γραμμικό χώρο ορίζεται, όπως είδαμε, απ' ευθείας. Επίσης στον χώρο R^3 γεωμετρικές έννοιες διαφορετικού χαρακτήρα, όπως η ορθογωνιότητα, η προβολή, μπορούν να εκφρασθούν με ένα εσωτερικό γινόμενο.

Στα επόμενα θα ασχοληθούμε με την "γεωμετρία" των γραμμικών χώρων, τους οποίους θα εφοδιάσουμε μ' ένα εσωτερικό γινόμενο ορισμένο κατά αξιωματικό τρόπο. Επίσης θα δούμε ότι από το εσωτερικό αυτό γινόμενο θα ορισθεί μια norm, η οποία δίνει στον γραμμικό χώρο μια πλουσιότερη δομή και μια μεγαλύτερη "ομοιότητα" με τον ευκλείδειο χώρο R^3 απ' ότι οι χώροι που έχουν norm, η οποία όμως δεν προέρχεται από εσωτερικό γινόμενο.

2.1 Εσωτερικό γινόμενο

Ορισμός 2.1.1 Έστω V ένας γραμμικός χώρος πάνω στο σώμα F. Μια απεικόνιση, που θα την συμβολίζουμε με $\langle|\rangle$ της μορφής:

$$\langle|\rangle: V\text{x}V \to F$$

με τις ιδιότητες:

α) $(\forall x,y\in V)\left[\ \langle x|y\rangle=\langle y|x\rangle^*\ \right]$

(το $\langle y|x\rangle^*$ σημαίνει τον συζυγή αριθμό του $\langle y|x\rangle$ όταν το σώμα F=C)

β) $(\forall x,y,z\in V)\left[\ \langle x+y|z\rangle=\langle x|z\rangle+\langle y|z\rangle\ \right]$

γ) $(\forall x,y\in V)(\forall\lambda\in V)\left[\langle\lambda x|y\rangle=\lambda^*\langle x|y\rangle\ \right]$

δ) $(\forall x\in V)\left[\ \langle x|x\rangle\geq 0 \text{ και } \langle x|x\rangle=0 \Leftrightarrow x=0\ \right]$

ονομάζεται **εσωτερικό γινόμενο**, (αυστηρά θετικά ορισμένο)

Ορισμός 2.1.2 Ένας γραμμικός χώρος V εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο ονομάζεται **χώρος εσωτερικού γινομένου** ή **προ-Hilbert χώρος** και θα τον συμβολίζουμε με $(V,\langle|\rangle)$.

Εάν το σώμα F=R τότε ο V ονομάζεται **πραγματικός χώρος εσωτερικού γινομένου**, εάν δε F=C, τότε ο V ονομάζεται **μιγαδικός χώρος εσωτερικού γινομένου** ή **unitary χώρος**.

Παρατήρηση 2.1.1: Σ' ένα διανυσματικό χώρο εσωτερικού γινομένου, ορίζεται πάντα μια norm και μια απόσταση:

$$||x||=\sqrt{(x,x)} \qquad d(x,y)=||x-y||=\sqrt{(x-y,x-y)}$$

Επομένως ένας διανυσματικός χώρος εσωτερικού γινομένου είναι και σταθμητός και μετρικός.. Το αντίστροφο δεν ισχύει, διότι ένας μετρικός χώρος δεν είναι απαραίτητο να έχει τη δομή διανυσματικού χώρου για να είναι σταθμητός χώρος και χώρος εσωτερικού γινομένου.

Ορισμός 2.1.3 Ένας γραμμικός χώρος $(V,<|>)$ εσωτερικού γινομένου, (δηλ. ένας προ-Hilbert χώρος), που είναι πλήρης ως προς την norm που ορίζεται από το εσωτερικό γινόμενο, λέγεται **χώρος Hilbert**.

Παρατήρηση 2.1.2 Αρκετά συχνά, και ιδίως στην Κβαντομηχανική, σαν χώρο Hilbert θεωρούμε έναν πλήρη γραμμικό χώρο εσωτερικού γινομένου ο οποίος επιπλέον είναι:

α) απείρων διαστάσεων και

β) διαχωρίσιμος

Όταν θα αναφερόμαστε στα επόμενα σε χώρο Hilbert θα εννοούμε ένα χώρο Hilbert με τις δυο παραπάνω ιδιότητες.

Παράδειγμα 2.1.1: Στον διανυσματικό χώρο R^3 το γνωστό από την κλασική φυσική εσωτερικό γινόμενο, ορίζεται από την σχέση:

$$<\mathbf{v}|\mathbf{u}>=\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}=|\mathbf{v}||\mathbf{u}|\cos\theta=v_1u_1+v_2u_2+v_3u_3 \qquad (1)$$

όπου θ η γωνία που σχηματίζουν τα δυο διανύσματα. Εύκολο είναι να δούμε ότι η σχέση (1) ικανοποιεί τις τρεις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου.

Η norm, το μέτρο ενός διανύσματος **v** του R^3 δίνεται από την σχέση:

$$\|v\| = \sqrt{(v,v)} = \sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}$$

Παράδειγμα 2.1.2: Στον διανυσματικό χώρο R^n μπορούμε να ορίσουμε ένα εσωτερικό γινόμενο κατ' αναλογία με το παράδειγμα (1), από την σχέση:

$$<\mathbf{v}|\mathbf{u}>=v_1u_1+v_2u_2+\cdots+v_nu_n=\sum_{k=1}^{n}v_ku_k \qquad (2)$$

Παράδειγμα 2.1.3: Η σχέση (2) δεν είναι η μοναδική που ορίζει εσωτερικό γινόμενο στο R^n. Διότι αν θεωρήσουμε τον R^2 και την σχέση:

$$<\mathbf{v}|\mathbf{u}>=v_1u_1-v_1u_2-v_2u_1+3v_2u_2$$

όπου $\mathbf{v}=(v_1, v_2)$, $\mathbf{u}=(u_1, u_2)$ (3)

τότε η (3) ορίζει εσωτερικό γινόμενο. Πράγματι:

1. $<\mathbf{v}|\mathbf{u}>=v_1u_1-v_1u_2-v_2u_1+3v_2u_2= u_1v_1-u_1v_2-u_2v_1+3u_2v_2=(\mathbf{u},\mathbf{v})$

2. Αν $\mathbf{w}=(w_1,w_2)$, τότε:

$$<\alpha\mathbf{v}+\beta\mathbf{u}|\mathbf{w}>=\left\langle\{\alpha v_1,\alpha v_2\}+\{\beta u_1,\beta u_2\}\middle|\{w_1,w_2\}\right\rangle=\left\langle\{\alpha v_1+\beta u_1,\alpha v_2+\beta u_2\}\middle|\{w_1,w_2\}\right\rangle=$$

$$=[\alpha\mathbf{v}_1+\beta u_1]w_1-[\alpha v_1+\beta u_1]w_2-[\alpha v_2+\beta u_2]w_1+3[\alpha v_2+\beta u_2]w_2=$$

$$=\alpha[v_1w_1-v_1w_2-v_2w_1+3v_2w_2]+\beta[u_1w_1=u_1w_2-u_2w_1+3u_2w_2]=\alpha\langle\mathbf{v}|\mathbf{w}\rangle+\beta\langle\mathbf{u}|\mathbf{w}\rangle$$

3. $<\mathbf{v}|\mathbf{v}>=v_1^2-v_1v_2-v_2v_1+3v_2^2=v_1^2-2v_1v_2+v_2^2+2v_2^2=[v_1-v_2]^2+2v_2^2 \geq 0$

και $<\mathbf{v}|\mathbf{v}>=0$ αν και μόνο αν $[v_1-v_2]^2+2v_2^2=0$ δηλαδή: $v_1=v_2=0$ ή $\mathbf{v}=\mathbf{0}$

Παράδειγμα 2.1.4: Στον διανυσματικό χώρο R^n η σχέση: $<\mathbf{v}|\mathbf{u}>=v_1u_1+2v_2u_2+\cdots+nv_nu_n$ ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο. Γενικά εάν P είναι ένας διαγώνιος πίνακας n×n με θετικά στοιχεία, τότε η σχέση:

$$<v|u>\equiv v^tPu=(v_1, v_2, \cdots, v_n)\begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = p_1v_1u_1+ p_2v_2u_2+ \cdots + p_nv_nu_n$$

ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο ή ακόμα ένας πίνακας με θετικές ιδιοτιμές ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο.

Παράδειγμα 2.1.5: Στον διανυσματικό χώρο C^n ορίζεται εσωτερικό γινόμενο από την σχέση:

$$<\mathbf{v}|\mathbf{u}>=v_1^*u_1+v_2^*u_2+ \cdots +v_n^*u_n$$

όπου v_i^* ο συζυγής αριθμός του μιγαδικού αριθμού v_i .

Παράδειγμα 2.1.6: Έστω **V** ο διανυσματικός χώρος των τετραγωνικών πινάκων n×n στο σώμα R. Η σχέση $<A|B>=tr(B^tA)$ όπου B^t ο ανάστροφος του πίνακα B και tr το ίχνος, (το άθροισμα των διαγωνίων στοιχείων), του πίνακα B^tA, ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο.

Με ανάλογο τρόπο, αν **V** είναι ο διανυσματικός χώρος των τετραγωνικών πινάκων n×n στο σώμα C, τότε η σχέση $<A|B>=tr(B^+A)$ με B^+ ο συζυγοανάστροφος του B, ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο.

Παράδειγμα 2.1.7: Έστω **V** ο διανυσματικός χώρος των μιγαδικών συνεχών συναρτήσεων ορισμένες στο πραγματικό διάστημα $\alpha\leq x\leq\beta$ με την συνθήκη ότι το ολοκλήρωμα:

$$\langle f|g\rangle = \int_\alpha^\beta f(x)^* g(x)dx < \infty \qquad \forall f,g\in V$$

με $f(x)^*$ συζυγή της f(x). Το παραπάνω ολοκλήρωμα ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στο V. Οι δε συναρτήσεις f λέγονται **τετραγωνικά ολοκληρώσιμες** διότι το ολοκλήρωμα:

$<f|f>=\int_\alpha^\beta |f(x)|^2\, dx$ υπάρχει.

Παράδειγμα 2.1.8: Αν $V=R^4$ του οποίου τα διανύσματα τα συμβολίζουμε με στήλες:

$$v=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} \qquad u=\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \qquad \text{και M ο πίνακας:} \quad M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

τότε η σχέση: $<\mathbf{v}|\mathbf{u}>=\mathbf{v}^tM\mathbf{u}=v_1u_1+v_2u_2+v_3u_3-v_4u_4$, ($\mathbf{v}^t$ είναι η αντίστοιχη γραμμή της στήλης **v**), ικανοποιεί τις ιδιότητες (α), (β) και (γ) του εσωτερικού γινομένου, αλλά όχι την (δ), δηλαδή δεν είναι θετικά ορισμένη. Έτσι η σχέση $\mathbf{v}^tM\mathbf{u}$ δεν είναι εσωτερικό γινόμενο, αλλά παίζει σπουδαίο ρόλο στην ειδική θεωρία της σχετικότητας. Ο πίνακας M ονομάζεται **μετρική Lorenz**

Παράδειγμα 2.1.9: Ο διανυσματικός χώρος R^3 με το εσωτερικό γινόμενο

$$(x,y)=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$$

γίνεται σταθμητός χώρος με norm:

$$||x||=\sqrt{(x,x)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

και μετρικός με απόσταση:

$$d(x,y)=||x-y||=\sqrt{(x_2-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_2-y_3)^2}$$

Παρατήρηση 2.1.3: Όταν ξέρουμε ότι μια απόσταση προέρχεται από μια norm, τότε η norm δίνεται από τη σχέση:

$$||x||=d(x,0)$$

και όταν μια norm προέρχεται από το εσωτερικό γινόμενο, τότε το εσωτερικό γινόμενο δίνεται από τη σχέση:

$$<x|y>=\frac{1}{4}\left\{||x+y||^2-||x-y||^2-i||x+iy||^2+i||x-iy||^2\right\}$$

Απόδειξη: Έστω $<x|y>=\alpha+i\beta$. Έχουμε:

$$||x+y||^2=<x+y|x+y>=||x||^2+||y||^2+<x|y>+<y|x>=$$

$$||x||^2+||y||^2+(\alpha+i\beta)+(\alpha-i\beta)=||x||^2+||y||^2+2\alpha \qquad (1)$$

$$||x-y||^2=<x-y|x-y>=||x||^2+||y||^2-<x|y>-<y|x>=$$

$$||x||^2+||y||^2-(\alpha+i\beta)-(\alpha-i\beta)=||x||^2+||y||^2-2\alpha \qquad (2)$$

Αφαιρώντας τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$$4\alpha=||x+y||^2-||x-y||^2 \qquad (A)$$

Επίσης έχουμε:

$$||x+iy||^2=<x+iy|x+iy>=<x|x>^2-i^2<y|y>+i<x|y>-i<y|x>=$$

$$||x||^2+||y||^2+i(\alpha+i\beta)-i(\alpha-i\beta)=||x||^2+||y||^2-2\beta \qquad (3)$$

$$||x-iy||^2=<x-iy|x-iy>=<x|x>^2-i^2<y|y>-i<x|y>+i<y|x>=$$

$$||x||^2+||y||^2-i(\alpha+i\beta)+i(\alpha-i\beta)=||x||^2+||y||^2+2\beta \qquad (4)$$

Αφαιρώντας τις σχέσεις (3) και (4) προκύπτει:

$$4\beta=||x-iy||^2-||x+iy||^2 \qquad (B)$$

και από τις σχέσεις (A) και (B) τελικά προκύπτει:

$$4<x|y>=4\alpha+i4\beta=\left[\,||x+y||^2-||x-y||^2\,\right]-i\left[\,||x+iy||^2-||x-iy||^2\,\right]$$

Εάν ο χώρος είναι πραγματικός, τότε το εσωτερικό γινόμενο δίνεται από τις σχέσεις:

$$<x|y>=\frac{1}{2}\left\{||x+y||^2-||x||^2-||y||^2\right\}=\frac{1}{4}\left\{||x+y||^2-||x-y||^2\right\}$$

Παρατήρηση 2.1.4: Μια norm προέρχεται από εσωτερικό γινόμενο όταν ισχύει ο νόμος του παραλληλογράμμου:

$$||x+y||^2+||x-y||^2=2||x||^2+2||y||^2$$

και το εσωτερικό γινόμενο δίνεται από την σχέση της προηγούμενης παρατήρησης.

Απόδειξη: $||x+y||^2+||x-y||^2=<x+y|x+y>+<x-y|x-y>=$

$$<x|x>+<y|y>+<x|y>+<y|x>+<x|x>+<y|y>-<x|y>-<y|x>=2||x||^2+2||y||^2$$

Θεώρημα 2.1.1 Σ' ένα χώρο εσωτερικού γινομένου ισχύει η ανισότητα των Cauchy-Schwarz: $|\langle x|y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$

Απόδειξη:

α) Εάν y=0 ισχύει το ίσον

β) Έστω $y\neq 0$. Θεωρούμε το διάνυσμα $z = x - \frac{\langle y|x\rangle}{\langle y|y\rangle} y$, το οποίο είναι η συνιστώσα του x η κάθετος προς το διάνυσμα y. Έχουμε:

$$0 \leq \langle z|z\rangle = \left\langle x - \frac{\langle y|x\rangle}{\langle y|y\rangle} y \,\middle|\, x - \frac{\langle y|x\rangle}{\langle y|y\rangle} y \right\rangle =$$

$$= \langle x|x\rangle - \frac{\langle y|x\rangle}{\langle y|y\rangle}\langle x|y\rangle - \frac{\langle y|x\rangle^*}{\langle y|y\rangle}\langle y|x\rangle + \frac{\langle y|x\rangle^*\langle y|x\rangle}{\langle y|y\rangle^2}\langle y|y\rangle =$$

$$= \langle x|x\rangle - \frac{|\langle x|y\rangle|^2}{\langle y|y\rangle} \Rightarrow |\langle x|y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$$

Ορισμός 2.1.4 Δυο διανύσματα x και y ενός χώρου $(V,\langle|\rangle)$ εσωτερικού γινομένου λέγονται **ορθογώνια** εάν: $\langle x|y\rangle=0$

Ορισμός 2.1.5 Ένα σύνολο διανυσμάτων $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$ ενός χώρου εσωτερικού γινομένου $(V,\langle|\rangle)$ λέγεται **ορθογώνιο σύνολο** ή πιο απλά **ορθογώνιο** εάν:

$$\langle x_i|x_j\rangle=0 \quad i\neq j$$

δηλ. κάθε διανυσμα x_i είναι ορθογώνιο ως προς όλα τα άλλα. Θα λέγεται δε **ορθοκανονικό σύνολο** ή πιο απλά **ορθοκανονικό** εάν ισχύει:

$$\langle x_i|x_j\rangle=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & \text{οταν } i=j\\ 0 & \text{οταν } i\neq j\end{cases}$$

δηλ. κάθε διάνυσμα x_i είναι ορθογώνιο με όλα τα άλλα και είναι κανονικοποιημένο, δηλ. έχει μοναδιαίο μήκος.

Ορισμός 2.1.6 Σ' ένα χώρο V πεπερασμένων διαστάσεων ένα ορθοκανονικό σύνολο X λέγεται **πλήρες** εάν δεν υπάρχει ορθοκανονικό υπερσύνολο του X.

Θεώρημα 2.1.2 Κάθε ορθοκανονικό σύνολο είναι γραμμικά ανεξάρτητο

Απόδειξη: Αν $\{x_1,x_2,...x_n\}$ είναι ένα πεπερασμένο ορθοκανονικό σύνολο, τότε για κάθε j έχουμε:

$$\sum_i^n \alpha_i x_i = 0 \Rightarrow \left\langle x_j \,\middle|\, \sum_i^n \alpha_i x_i \right\rangle = \sum_i^n \alpha_i \langle x_j|x_i\rangle = \sum_i^n \alpha_i \delta_{ij} = \alpha_j \quad \text{δηλαδή } \alpha_j=0,\ \forall j=1,...,n$$

Πόρισμα 2.1.1 Κάθε ορθοκανονικό σύνολο n διανυσμάτων αποτελεί μια βάση για ένα γραμμικό χώρο n διαστάσεων.

Θεώρημα 2.1.3: Εάν X={x_1, x_2, ⋯, x_m} είναι ένα ορθοκανονικό σύνολο σ' ένα χώρο εσωτερικού γινομένου V, τότε οι επόμενες 6 προτάσεις είναι ισοδύναμες:

1) Το X είναι πλήρες
2) Εάν $<x_i|x>=0$ $\forall i=1, \cdots, m$ τότε x=0
3) Το X αποτελεί σύστημα γεννητόρων του διαν. χώρου V
4) Εάν $x \in V$ τότε $x=\sum_{i=1}^{m} \langle x_i|x\rangle x_i$
5) Εάν $x,y \in V$, τότε $<y|x>=\sum_{i=1}^{m} \langle y|x_i\rangle \langle x_1|x\rangle$ (εξίσωση του Parseval)
6) Εάν $x \in V$, τότε $||x||^2=\sum_{i=1}^{m} |\langle x_i \mid x\rangle|^2 = \sum_{i=1}^{m} | \alpha_i |^2$ όπου $\alpha_i=<x_i|x>$

Απόδειξη: 1) (1)⇒(2). Θα αποδείξουμε αυτή την συνεπαγωγή παίρνοντας την άρνηση της πρότασης, δηλ. όχι(2) ⇒ όχι(1).

Εάν $<x_i|x>=0$ $\forall i$ και $x \neq 0$, τότε θεωρούμε το μοναδιαίο διάνυσμα $x_0=x/||x||$ και έτσι προκύπτει ένα ορθοκανονικό σύνολο, υπερσύνολο του X, το $X \cup \{x_0\}$. Άρα το X δεν είναι πλήρες.

2) (2) ⇒ (3). Και εδώ θα δείξουμε όχι(3) ⇒ όχι (2).

Εάν το X δεν είναι σύστημα γεννητόρων του διαν. χώρου V, τότε υπάρχει κάποιο $x \in V$ το οποίο δεν μπορεί να γράφει σαν γραμμικός συνδυασμός των x_i και επομένως δεν υπάρχουν σταθερές α_i τέτοιες ώστε

$$x=\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i$$

Συγκεκριμένα το σύνολο των σταθερών $\alpha_i=<x_i|x>$ θα είναι τέτοιο ώστε

$$x \neq \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i$$

Επομένως
$$x'=x-\sum_{i=1}^{m} \langle x_i|x\rangle x_i \neq 0$$

και το x' θα είναι κάθετο σε κάθε x_j . Πράγματι:

$$<x'|x_j>=<x|x_j>-\sum_{i=1}^{m} \langle x_i|x\rangle \langle x_i|x_j\rangle = \alpha_j - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \delta_{ij} = \alpha_j - \alpha_j = 0$$

Άρα ισχύει το όχι (2)

3) (3) ⇒ (4). Εάν κάθε x μπορεί να γράφει σαν $x=\sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_j$ τότε

$<x_i|x>=\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \langle x_i \mid x_j\rangle = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \delta_{ij} = \alpha_i$ έτσι ώστε $x=\sum_{i=1}^{m} \langle x_i|x\rangle x_i$

4) (4) ⇒ (5). Εάν $x=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x_i$ και $y=\sum_{j=1}^{m}\beta_j x_j$ με α_i=<x_i|x> και β_j=<x_j|y>, τότε

$$<y|x>=\left\langle \sum_{j=1}^{m}\beta_j x_j \middle| \sum_{j=1}^{m}\alpha_j x_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^{m}\beta_j\alpha_i^*\langle x_j\,|\,x_i\rangle = \sum_{i=1}^{m}\beta_i\alpha_i^* = \sum_{i=1}^{m}\langle y\,|\,x_i\rangle\langle x_i\,|\,x\rangle$$

5) (5) ⇒ (6). Θέτουμε x=y στην (5).

6) (6) ⇒ (1). Αρκεί ν' αποδείξουμε όχι(1) ⇒ όχι(6). Ας υποθέσουμε ότι το X δεν είναι πλήρες. Τότε θα υπάρχει ορθοκανονικό υπερσύνολο αυτού, δηλ. θα υπάρχει τουλάχιστον ένα μη μηδενικό διάνυσμα x_0 ορθογώνιο σε όλα τα x_i, δηλ. <x_i|x_0>=0. Σ' αυτή την περίπτωση όμως θα έχουμε:

$$0\neq\|x_0\|^2\neq\sum_{i=1}^{m}\left|\langle x_i|x_0\rangle\right|^2=0$$

Η τελευταία σχέση είναι ακριβώς η άρνηση της (6).

2.2 Μέθοδος Ορθοκανονικοποίησης Gram-Schmidt

Στις εφαρμογές και στους υπολογισμούς είναι αρκετά βολικό να έχουμε μια βάση, της οποίας τα διανύσματα να αποτελούν ένα ορθοκανονικό πλήρες σύστημα, δηλ. μια οθοκανονική βάση.

Στην παράγραφο αυτή θα δούμε πως από μια μη ορθοκανονική βάση, χρησιμοποιώντας μια επαγωγική τεχνική, γνωστή σαν "**μέθοδος ορθοκανονικοποίησης Gram-Schmidt**", μπορούμε να κατασκευάσουμε μια ορθοκανονική βάση.

Πριν όμως αναφερθούμε στη γενική περίπτωση γραμμικού χώρου n διαστάσεων, ας δούμε πως εφαρμόζεται η μέθοδος Gram-Schmidt στις δυο διαστάσεις, δηλ. στον γραμμικό χώρο R^2 .

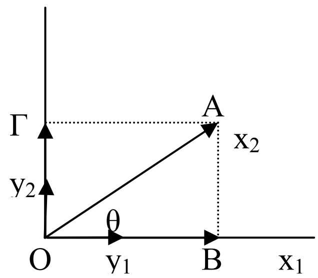
Θεωρούμε μια βάση X={x_1,x_2}, της οποίας τα διανύσματα δεν είναι ορθογώνια μεταξύ τους και ούτε μοναδιαία. Από τη βάση αυτή θα κατασκευάσουμε μια άλλη βάση Y={y_1,y_2} τέτοια ώστε:

$$<y_i|y_j>=\delta_{ij} \quad i,j=1,2$$

που είναι και η ζητούμενη.

Ξεκινάμε από το διάνυσμα x_1, (ή από το x_2), το διαιρούμε με το μέτρο του και έχουμε το πρώτο διάνυσμα της νέας βάσης, το:

$$y_1=\frac{x_1}{\|x_1\|}$$



Το δεύτερο διάνυσμα x_2 μπορούμε να το αναλύσουμε σε δυο συνιστώσες, την ΟΒ, (βλέπε σχήμα), παράλληλη προς το x_1 και την ΟΓ κάθετη προς το x_1. Η παράλληλη συνιστώσα δεν μας ενδιαφέρει, η δε κάθετη υπολογίζεται ως εξής:

$$ΟΓ=ΒΑ=x_2-ΟΒ=x_2-\|ΟΒ\|y_1 . \qquad (1)$$

Αλλά $\|ΟΒ\|=\|x_2\|\cos\theta$, $<x_1|x_2>=\|x_1\|\|x_2\|\cos\theta$ ⇒

$$\|OB\|=\frac{\langle x_1|x_2\rangle}{\|x_1\|}=\left\langle \frac{x_1}{\|x_1\|}\middle| x_2\right\rangle=<y_1|x_2> \quad (2)$$

Η (1) με τη βοήθεια της (2) γίνεται: ΟΓ=x_2-<$y_1|x_2$>y_1 . Το διάνυσμα <$y_1|x_2$>y_1 είναι η συνιστώσα του x_2 η παράλληλη προς το x_1. Διαιρώντας το διάνυσμα ΟΓ με το μέτρο του, έχουμε το δεύτερο διάνυσμα y_2 της νέας βάσης:

$$y_2=\frac{x_2-\langle y_1|x_2\rangle y_1}{\|x_2-\langle y_1|x_2\rangle y_1\|}$$

Εύκολα μπορούμε να ελέγξουμε ότι ισχύει <$y_i|y_j$>=δ_{ij} i, j=1, 2

Στη γενική περίπτωση γραμμικού χώρου n διαστάσεων, στην οποία από μια βάση X={x_1, x_2, ···, x_n} θέλουμε να κατασκευάσουμε μια ορθοκανονική βάση Y={y_1, y_2, ···, y_n}, η μέθοδος Gram-Schmidt περιγράφεται ως εξής:

Ξεκινάμε από το διάνυσμα x_1, το διαιρούμε με το μέτρο του και έχουμε το πρώτο διάνυσμα της νέας βάσης: $y_1=\frac{x_1}{\|x_1\|}$

Το δεύτερο διάνυσμα x_2 έχει δυο συνιστώσες, μια παράλληλη προς το x_1 και μια κάθετη. Αν από το x_2 αφαιρέσουμε την προβολή <$y_1|x_2$>y_1 του x_2 πάνω στο y_1 αυτό που μένει είναι η συνιστώσα του x_2 η κάθετη στο y_1, την οποία διαιρούμε με το μέτρο της ||x_2-<$y_1|x_2$>y_1|| και έχουμε:

$$y_2=\frac{x_2-\langle y_1|x_2\rangle y_1}{\|x_2-\langle y_1|x_2\rangle y_1\|}=\frac{x_2-\alpha_1^2 x_1}{\|x_2-\alpha_1^2 x_1\|} \qquad \text{με } \alpha_1{}^2=<y_1|x_2>$$

Ακολούθως από το διάνυσμα x_3 αφαιρούμε τις προβολές του πάνω στις διευθύνσεις των y_1, y_2 και παίρνουμε την συνιστώσα του x_3, η οποία είναι κάθετη προς τα y_1, y_2 και την οποία διαιρούμε με το μέτρο της:

$$y_3=\frac{x_3-\langle y_1\,|\,x_3\rangle y_1-\langle y_2\,|\,x_3\rangle y_2}{\|x_3-\langle y_1\,|\,x_3\rangle y_1-\langle y_2\,|\,x_3\rangle y_2\|}=\frac{x_3-\alpha_1^3 y_1-\alpha_2^3 y_2}{\|x_3-\alpha_1^3 y_1-\alpha_2^3 y_2\|}$$

Για να κατασκευάσουμε το y_{m+1} διάνυσμα, όταν έχουμε κατασκευάσει τα διανύσματα y_1, y_2, ···, y_m αφαιρούμε από το διάνυσμα x_{m+1} όλες τις προβολές του:

<$y_1|x_{m+1}$>, <$y_2|x_{m+1}$>, ···, <$y_m|x_{m+1}$>

τις παράλληλες προς τα διανύσματα y_1, y_2, ···, y_m αντίστοιχα και το διάνυσμα που σχηματίζεται το διαιρούμε με το μέτρο του και έχουμε:

$$y_{m+1}=\frac{x_{m+1}-\langle y_1|x_{m+1}\rangle y_1-\langle y_2|x_{m+1}\rangle y_2-\cdots-\langle y_m|x_{m+1}\rangle y_m}{\|x_{m+1}-\langle y_1|x_{m+1}\rangle y_1-\langle y_2|x_{m+1}\rangle y_2-\cdots-\langle y_m|x_{m+1}\rangle y_m\|}=$$

$$=\frac{x_{m+1}-\alpha_1^{m+1}y_1-\alpha_2^{m+1}y_2-\cdots-\alpha_m^{m+1}y_m}{\|x_{m+1}-\alpha_1^{m+1}y_1-\alpha_2^{m+1}y_2-\cdots-\alpha_m^{m+1}y_m\|}$$

Όταν αυτή η διαδικασία έχει γίνει n φορές, τότε έχουμε κατασκευάσει την ορθοκανονική βάση $Y=\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$

Παράδειγμα 2.2.1 Θεωρούμε τον διαν. χώρο R^3 με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο και μια βάση $B_x=\{x_1=(1,\ 1,\ 1),\ x_2=(0,\ 1,\ 1),\ x_3=(0,\ 0,\ 1)\}$. Η βάση αυτή προφανώς δεν είναι ορθοκανονική. Χρησιμοποιώντας την μέθοδο Gram-Schmidt μπορούμε να κατασκευάσουμε μια άλλη ορθοκανονική βάση B_y:

$$y_1=\frac{x_1}{\|x_1\|}=\frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Θέτουμε $\quad w_2=x_2-\langle x_2|y_1\rangle y_1=(0,1,1)-\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$

και έχουμε $\quad y_2=\frac{w_2}{\|w_2\|}=\frac{\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)}{\frac{\sqrt{6}}{3}}=\left(-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

$$w_3=x_3-\langle x_3|y_1\rangle y_1-\langle x_3|y_2\rangle y_2=$$

$$=(0,0,1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-\frac{1}{\sqrt{6}}\left(-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)=\left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$y_3=\frac{w_3}{\|w_3\|}=\left(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Επομένως η αντίστοιχη ορθοκανονική βάση B_y είναι:

$$B_y=\left\{y_1=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\ ,\ y_2=\left(-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\ ,\ y_3=\left(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$$

Παράδειγμα 2.2.2 Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο C^3 και τον υπόχωρο αυτού $U\subset C^3$ που παράγεται από τα διανύσματα $\{x_1=(1,\ i,\ 0),\ x_2=(1,\ 2,\ 1-i)\}$. Ζητούμε να βρούμε μια ορθοκανονική βάση του υπόχωρου αυτού.

Έχουμε $\quad \|x_1\|^2=\langle x_1|x_1\rangle=1\cdot1+i\cdot(-i)+0\cdot0=2\ \Rightarrow\ \|x_1\|=\sqrt{2}$

Επομένως $\quad y_1=\frac{x_1}{\|x_1\|}=\frac{(1,i,0)}{\sqrt{2}}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{i}{\sqrt{2}},0\right)$

Θέτουμε $\quad w_2=x_2-\langle x_2|y_1\rangle y_1$

με $\quad \langle x_2|y_1\rangle=\left\langle (1,\ 2,\ 1-i)\middle|\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{i}{\sqrt{2}},\ 0\right)\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{2i}{\sqrt{2}}=(1+2i)\frac{1}{\sqrt{2}}$

άρα $\quad w_2=(1,\ 2,\ 1-i)-\frac{1+2i}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{i}{\sqrt{2}},0\right)=\left(\frac{1-2i}{2},\frac{6-i}{2},1-i\right)\ \Rightarrow$

$$\|w_2\|^2=\left\langle\left(\frac{1-2i}{2},\ \frac{6-i}{2},\ 1-i\right)\middle|\left(\frac{1-2i}{2},\ \frac{6-i}{2},\ 1-i\right)\right\rangle=$$

$$=\left(\frac{1+2i}{2}\right)\left(\frac{1-2i}{2}\right)+\left(\frac{6+i}{2}\right)\left(\frac{6-i}{2}\right)+(1+i)(1-i)=\frac{1+4}{4}+\frac{36+1}{4}+1+1=\frac{5}{4}+\frac{37}{4}+\frac{8}{4}=\frac{50}{4}\Rightarrow$$

$||w_2||=\frac{\sqrt{50}}{2}$ και άρα $y_2=\frac{w_2}{\|w_2\|}=\left(\frac{1-2i}{\sqrt{50}},\frac{6-i}{\sqrt{50}},\frac{2-2i}{\sqrt{50}}\right)$

Επομένως μια ορθοκανονική βάση του υπόχωρου U είναι:

$$B_y=\left\{y_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{i}{\sqrt{2}},0\right),\quad y_2=\left(\frac{1-2i}{\sqrt{50}},\frac{6-i}{\sqrt{50}},\frac{2-2i}{\sqrt{50}}\right)\right\}$$

Παράδειγμα 2.2.3 Στον διανυσματικό χώρο V των συναρτήσεων, θεωρούμε την βάση $B_v=\{v_0=1,\ v_1=x,\ v_2=x^2,\ \cdots,\ v_n=x^n\}$. Εάν θεωρήσουμε σαν εσωτερικό γινόμενο δυο συναρτήσεων f(x) και g(x) το ολοκλήρωμα: $\int f(x)g(x)dx$ και ότι το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων είναι το κλειστό διάστημα [-1, 1], ζητούμε να βρούμε την αντίστοιχη ορθοκανονική βάση με την μέθοδο των Gram-Schmidt.

Έχουμε:

$u_0=\frac{v_0}{||v_0||}$ αλλά $||v_0||^2=\langle v_0|v_0\rangle=\int_{-1}^{1}dx=x|_{-1}^{1}=1-(-1)=2\ \Rightarrow\ u_0=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$u_1=\frac{w_1}{||w_1||}$ με $w_1=v_1-\langle v_1|u_0\rangle u_0$ αλλά $\langle v_1|u_0\rangle=\int_{-1}^{1}x\frac{1}{\sqrt{2}}dx=\frac{1}{2\sqrt{2}}x^2\Big|_{-1}^{1}=0$

άρα $w_1=v_1=x\ \Rightarrow\ ||w_1||^2=||v_1||^2=\int_{-1}^{1}x^2dx=\frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{1}=\frac{2}{3}\qquad\Rightarrow\ ||w_1||=\sqrt{\frac{2}{3}}$

και επομένως $u_1=\frac{x}{\sqrt{2/3}}\ \Rightarrow\ u_1=\sqrt{\frac{3}{2}}x$

$u_2=\frac{w_2}{||w_2||}$ με $w_2=v_2-\langle v_2|u_0\rangle u_0-\langle v_2|u_1\rangle u_1$

έχουμε $\langle v_2|u_0\rangle=\int_{-1}^{1}x^2\frac{1}{\sqrt{2}}dx=\frac{1}{3\sqrt{2}}x^3\Big|_{-1}^{1}=\frac{2}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$

$\langle v_2|u_1\rangle=\int_{-1}^{1}x^2\sqrt{\frac{3}{2}}xdx=\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{1}=0$

$$w_2=x^2-\frac{\sqrt{2}}{3}\frac{1}{\sqrt{2}}=x^2-\frac{1}{3}\ \Rightarrow\ ||w_2||^2=\int_{-1}^{1}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)^2dx=\int_{-1}^{1}\left(x^4-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{9}\right)dx=$$

$$=\frac{x^5}{5}-\frac{2}{9}x^3+\frac{x}{9}\Big|_{-1}^{1}=\frac{2}{5}-\frac{4}{9}+\frac{2}{9}=\frac{8}{45}\ \Rightarrow\ ||w_2||=\sqrt{\frac{8}{45}}=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}\ \Rightarrow$$

$$u_2=\frac{w_2}{||w_2||}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)\ \Rightarrow\ u_2=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\left(3x^2-1\right)$$

Τελικά $B_u = \left\{ u_0 = \frac{1}{\sqrt{2}},\ u_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}x,\ u_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\left(3x^2 - 1\right), \cdots \right\}$

Τα πολυώνυμα της βάσεως B_u ονομάζονται **πολυώνυμα του Legendre**.

3 ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙι ΚΑΙ ΤΕΛΕΣΤΕΣ

3.1 Εισαγωγή

Ο ρόλος που παίζουν οι γραμμικοί μετασχηματισμοί και ιδίως οι τελεστές στην θεωρητική Φυσική, είναι μεγάλος. Ενδεικτικά αναφέρουμε τα εξής: Στην Κβαντομηχανική αντιστοιχούμε σε κάθε φυσικό μέγεθος έναν αυτοσυναφή (Hermitian) τελεστή, του οποίου οι ιδιοτιμές είναι οι δυνατές τιμές του φυσικού μεγέθους. Βρίσκοντας λοιπόν τις ιδιοτιμές του αντίστοιχου Hermitian τελεστή από την εξίσωση ιδιοτιμών, ξέρουμε και τις τιμές του φυσικού μεγέθους. Ένα άλλο είδος τελεστών, οι ισομετρικοί (Unitary), μας εξασφαλίζουν τη μετάβαση από μιά βάση ενός φυσικού συστήματος σε μιά άλλη ή χρησιμοποιώντας την ορολογία της Κβαντομηχανικής, με Unitary τελεστές μεταβαίνουμε από την εικόνα Heisenberg στην εικόνα Schrondinger, ή και αντίστροφα.

Ορισμός 3.1.1 Έστω V, W δυο γραμμικοί χώροι. Μια απεικόνιση:

$$T: V \to W$$

$$T: x \mapsto T(x)=Tx$$

από τον γραμμικό χώρο V στον γραμμικό χώρο W ονομάζεται **γραμμική απεικόνιση** ή **γραμμικός μετασχηματισμός**, εάν ισχύει:

$$(\forall x_1,x_2\in V)(\forall \alpha_1,\alpha_2,\in F)\left[\ T(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)=\alpha_1Tx_1+\alpha_2Tx_2\ \right]$$

ή πιο αναλυτικά:

$$(\forall x_1,x_2\in V)\left[T(x_1+x_2)=T(x_1)+T(x_2)\right] \qquad (1)$$

και

$$(\forall x\in V)(\forall \alpha\in F)\left[T(\alpha x)=\alpha T(x)\right] \qquad (2)$$

Με άλλα λόγια ο μετασχηματισμός T είναι γραμμικός, αν "διατηρεί" τις δύο βασικές πράξεις ενός διανυσματικού χώρου, δηλαδή τη διανυσματική πρόσθεση και το βαθμωτό πολλαπλασιασμό.

Θέτοντας στην ιδιότητα (2) α=0 έχουμε T(0)=0, δηλαδή κάθε γραμμικός μετασχηματισμός, απεικονίζει το μηδενικό διάνυσμα του V στο μηδενικό διάνυσμα του U.

Το σύνολο των $x\in V$ για τα οποία το Tx έχει έννοια ονομάζεται **πεδίο ορισμού** D(T) της T και το σύνολο $\{Tx/x\in D(T)\}$ του W ονομάζεται **πεδίο τιμών** R(T) του T.

Εάν οι γραμμικοί μετασχηματισμοί T_1 και T_2 έχουν το ίδιο πεδίον ορισμού, τότε ο **γραμμικός συνδυασμός** $\lambda_1T_1+\lambda_2T_2$ ορίζεται από τη σχέση:

$$(\forall x\in V)(\forall \lambda_1,\lambda_2,\in F)\left[\ [\lambda_1T_1+\lambda_2T_2]x=\lambda_1T_1x+\lambda_2T_2x\ \right]$$

Εάν V, W, U είναι γραμμικοί χώροι και

$$T_1 : V \to W, \quad T_2 : W \to U$$

και το πεδίο τιμών του T_1 περιέχεται στο πεδίο ορισμού του T_2, δηλ. $R(T_1)\subseteq D(T_2)$ τότε η σύνθεση $T_2\circ T_1$ των δυο μετασχηματισμών T_1 και T_2, που θα ονομάζεται **γινόμενο** και θα γράφεται T_2T_1, ορίζεται από τη σχέση:

$$(\forall x\in V)\left[\ T_2T_1x=T_2[T_1x]\ \right]$$

Παράδειγμα 3.1.1: Έστω οι διανυσματικοί χώροι $V=R^n$ και $U=R^m$ των οποίων τα διανύσματα τα θεωρούμε σαν στήλες, και ένας πίνακας A τύπου $m\times n$.

Τότε η απεικόνιση:

$$T: R^n \to R^m$$

που ορίζεται από τη σχέση: $T: x \to Tx=Ax$ είναι γραμμικός μετασχηματισμός.

Πράγματι από τις ιδιότητες των πινάκων έχουμε:

$$T(x+y)=A(x+y)=Ax+Ay=T(x)+T(y)$$

και $$T(\alpha x)=A(\alpha x)=\alpha A(x)=\alpha T(x)$$

Αποδεικνύεται, (βλέπε παρ. 3.2), ότι κάθε γραμμικός μετασχηματισμός μεταξύ δύο διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης, μπορεί να παρασταθεί σαν γραμμικός μετασχηματισμός της πιό πάνω μορφής.

Παράδειγμα 3.1.2: Έστω $T: R^3\to R^3$ η προβολή στο επίπεδο xOy . Θα δείξουμε ότι το T είναι γραμμική απεικόνιση.

Έστω $v=(x,y,z)$ και $u=(x',y',z')$. Τότε:

$$T(v+u)=T(x+x',y+y',z+z')=(x+x',y+y',0)=T(v)+T(u) \qquad \forall v,u\in R^3$$

και $$T(\alpha v)=T(\alpha x,\alpha y,\alpha z)=(\alpha x,\alpha y,0)=\alpha(x,y,0)=\alpha T(v) \qquad \forall \alpha\in R \text{ και } \forall v\in R^3$$

Παράδειγμα 3.1.3: Έστω η μετατόπιση $T: R^2 \to R^2$ που ορίζεται από τη σχέση
$$T(x,y)=(x+1,y+2).$$

Παρατηρούμε ότι $T(0)=T(0,0)=(1,2)\neq(0,0)$. Δηλαδή το μηδενικό διάνυσμα δεν απεικονίζεται στο μηδενικό διάνυσμα. Άρα η μετατόπιση T δεν είναι γραμμικός μετασχηματισμός.

Παράδειγμα 3.1.4: Έστω $T: V \to U$ η απεικόνιση που απεικονίζει κάθε διάνυσμα $x\in V$ στο μηδενικό διάνυσμα του U. Τότε για κάθε $x,y\in V$ και για κάθε $\alpha\in F$, (F=το σώμα στο οποίο ορίζονται οι διανυσματικοί χώροι V και U), έχουμε:

$$T(x+y)=0=0+0=T(x)+T(y)$$

και $$T(\alpha x)=0=\alpha\cdot 0=\alpha\cdot T(x)$$

Άρα η T είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός και ονομάζεται **μηδενικός μετασχηματισμός**.

Παράδειγμα 3.1.5: Θεωρούμε την ταυτοτική απεικόνιση $I: V \to V$ η οποία απεικονίζει κάθε διάνυσμα $x\in V$ στον εαυτό του. Τότε:

$$I(\alpha x+\beta y)=\alpha x+\beta y=\alpha T(x)+\beta I(y)$$

Επομένως η απεικόνιση I είναι γραμμική και ονομάζεται **ταυτοτικός μετασχηματισμός**.

Παράδειγμα 3.1.6: Έστω $V=\{f(x)\}$ ο διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων (ή των διαφορίσιμων και ολοκληρώσιμων συναρτήσεων) μεταβλητής x στο σώμα R. Τότε οι απεικονίσεις:

$$D: V \to V \quad \text{και} \quad G: V \to V$$

που ορίζονται από τις σχέσεις:

$$D: f(x) \to Df(x)=\frac{df(x)}{dx} \quad \text{και} \quad G: f(x) \to G(f(x))=\int_0^x f(t)dt$$

είναι γραμμικές διότι:

1. $$D(f(x)+g(x))=\frac{d\big(f(x)+g(x)\big)}{dx}=\frac{df(x)}{dx}+\frac{dg(x)}{dx}=Df(x)+Dg(x)$$

και $$D(\alpha f(x))=\frac{d\big(\alpha f(x)\big)}{dx}=\alpha\frac{df(x)}{dx}=\alpha D(f(x))$$

2. $$G(f(x)+g(x))=\int_0^x \big(f(t)+g(t)\big)dt=\int_0^x f(t)dt+\int_0^x g(t)dt=G(f(x))+G(g(x)) \text{ και}$$

$$G(\alpha f(x))=\int_0^x \alpha f(t)dt=\alpha\int_0^x f(t)dt=\alpha G(f(x))$$

Η απεικόνιση D ονομάζεται **διαφορικός μετασχηματισμός** και η G **ολοκληρωτικός μετασχηματισμός**.

Ορισμός 3.1.2 Εάν ο χώρος W=F[30] δηλ. $T: V \to F$ τότε η απεικόνιση T λέγεται **γραμμικό συναρτησοειδές**.

Ορισμός 3.1.3 Εάν V=W η γραμμική απεικόνιση $T: V \to V$ λέγεται **γραμμικός τελεστής**.

Ορισμός 3.1.4 Εάν ένας γραμμικός τελεστής T είναι αμφιμονοσήμαντος και επί, τότε υπάρχει ο **αντίστροφος τελεστής** T^{-1}, ο οποίος ορίζεται ως εξής: Εάν Tx=y, τότε $T^{-1}y \equiv x$.

Αποδεικνύεται ότι ο αντίστροφος T^{-1} ενός τελεστή T είναι γραμμικός και μοναδικός.

Ορισμός 3.1.5 Εάν για τον τελεστή T υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα x τέτοιο ώστε να ισχύει η σχέση:

$$Tx=\lambda x \quad \text{με } \lambda \in F \qquad (1)$$

τότε το διάνυσμα x λέγεται **ιδιοδιάνυσμα** του τελεστή T, ο δε αριθμός λ **ιδιοτιμή**, που αντιστοιχεί στο ιδιοδιάνυσμα x.

Η λύση της εξίσωσης (1), δηλ. η εύρεση των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων του τελεστή T, είναι γνωστή σαν **εξίσωση** ή **πρόβλημα ιδιοτιμών**.

Όταν ο τελεστής δίνεται υπό μορφή πίνακα, τότε η εξίσωση (1) ανάγεται σ' ένα αλγεβρικό σύστημα, ενώ με την γενικότερη έννοια του τελεστή, (π.χ. όταν είναι διαφορικός, ολοκληρωτικός κ.τ.λ.), μπορούμε να έχουμε μια διαφορική ή ολοκληρωτική εξίσωση.

Οι πιο ενδιαφέρουσες περιπτώσεις προβλήματος ιδιοτιμών, που συναντώνται στη Φυσική, είναι εκείνες των τελεστών, οι οποίοι είναι δεύτερης τάξης διαφορικοί τελεστές.

Στην Κβαντομηχανική δεχόμαστε ότι κάθε παρατηρήσιμο μέγεθος μπορεί να παρασταθεί από έναν, (ερμιτιανό), τελεστή T και ότι το αποτέλεσμα οποιασδήποτε φυσικής μέτρησης του μεγέθους, πρέπει να είναι μια από τις ιδιοτιμές του T.

Ορισμός 3.1.6 Εάν σε μια ιδιοτιμή λ αντιστοιχούν περισσότερα από ένα, (γραμμικά ανεξάρτητα), ιδιοδιάνυσμα, τότε λέμε ότι η ιδιοτιμή λ είναι **εκφυλισμένη**, όπως και ότι τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι **εκφυλισμένα**.

[30] Κάθε σώμα F μπορεί να θεωρηθεί γραμμικός χώρος πάνω στον εαυτό του με διάσταση 1.

Ορισμός 3.1.7 Το πλήθος m_g των γραμμικά ανεξαρτήτων ιδιοδιανυσμάτων, που αντιστοιχούν στην εκφυλισμένη ιδιοτιμή λ, λέγεται **γεωμετρική πολλαπλότητα**. Η πολλαπλότητα m_α, με την οποία εμφανίζεται η εκφυλισμένη ιδιοτιμή λ στην εξίσωση ιδιοτιμών λέγεται **αλγεβρική πολλαπλότητα**. Ισχύει δε $m_\alpha \geq m_g$.

3.2 Αναπαράσταση ενός τελεστή υπό μορφή πίνακα ως προς μια βάση

Έστω T ένας τελεστής του διανυσματικού χώρου V στο σώμα F και $B=\{e_1,\cdots,e_n\}$ μιά βάση του V. Θεωρούμε τώρα τις εικόνες $T(e_1),T(e_2),\cdots,T(e_n)$ των βασικών διανυσμά-των της βάσης που θα τις σημειώνουμε απλά $Te_1,Te_2,\cdots,Te_n$ ως προς τον τελεστή T. Οι εικόνες αυτές είναι διανύσματα του V και κάθε μια είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των βασικών διανυσμάτων:

$$\begin{aligned}
Te_1&=\alpha_{11}e_1+\alpha_{12}e_2+\cdots+\alpha_{1i}e_i+\cdots+\alpha_{1n}e_n\\
Te_2&=\alpha_{21}e_1+\alpha_{22}e_2+\cdots+\alpha_{2i}e_i+\cdots+\alpha_{2n}e_n\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
Te_j&=\alpha_{j1}e_1+\alpha_{j2}e_2+\cdots+\alpha_{ji}e_i+\cdots+\alpha_{jn}e_n\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
Te_n&=\alpha_{n1}e_1+\alpha_{n2}e_2+\cdots+\alpha_{ni}e_i+\cdots+\alpha_{nn}e_n
\end{aligned} \qquad (1)$$

Ορισμός 3.2.1: Ο ανάστροφος του πίνακα των συντελεστών της σχέσης (1), (που θα τον συμβολίζουμε με $[T]_e$), ονομάζεται **αναπαράσταση**, (**representation**), του T ως προς τη βάση $[e_i]$

$$[T]_e=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

Αν υποθέσουμε ότι η βάση $\{e_i\}$ είναι ορθοκανονική $<e_i|e_j>=\delta_{ij}$ τότε τα στοιχεία του πίνακα $[T]_e$ υπολογίζονται εύκολα ως εξής:

Για το στοιχείο α_{ji} πολλαπλασιάζουμε από τ' αριστερά την j γραμμή της σχέσης (1) εσωτερικά με το διάνυσμα e_i

$$<e_i|Te_j>=\alpha_{j1}<e_i|e_1>+\alpha_{j2}<e_i|e_2>+\cdots+\alpha_{ji}<e_i|e_i>+\cdots+\alpha_{jn}<e_i|e_n>=\alpha_{ji} \Rightarrow$$

$$\alpha_{ji}=<e_i|Te_j>$$

Αλλά το α_{ji} στοιχείο, είναι το στοιχείο της j γραμμής και i στήλης του πίνακα των συντελεστών της σχέσης (1). Ο δε πίνακας που ορίζεται σαν αναπαράσταση του τελεστή T είναι ο ανάστροφος του πίνακα με στοιχεία τα α_{ij} . Συνεπώς το στοιχείο του πίνακα που είναι αναπαράσταση του τελεστή T και που βρίσκεται στην i γραμμή και j στήλη θα συμβολίζεται με $[T]_{ij}$ και είναι:

$$\alpha_{ij}=<e_i|Te_j> \qquad (2)$$

Παράδειγμα 3.2.1: Έστω V ο διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων πραγματικής μεταβλητής x, βαθμού≤3 και έστω $D: V \to V$ ο διαφορικός τελεστής της παραγώγου:

$$D(P(x))=\frac{d}{dx}P(x)$$

Υπολογίζουμε τον πίνακα D του ως προς τη βάση $B=\{1,x,x^2,x^3\}$. Έχουμε:

$$D1=0=0+0x+0x^2+0x^3$$

$$Dx=1+0x+0x^2+0x^3$$

$$Dx^2=2x=0+2x+0x^2+0x^3$$

$$Dx^3=3x^2=0+0x+x^2+0x^3$$

Άρα
$$[D]_x=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&0\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Παράδειγμα 3.2.2: Έστω ο τελεστής $T: R^2 \to R^2$ που ορίζεται από τη σχέση:

$$T(x,y)=(4x-2y,2x+y)$$

και έστω ότι θέλουμε να βρούμε την αναπαράσταση του τελεστή T υπό μορφή πίνακα που αντιστοιχεί στη βάση: $B=\{f_1, f_2\}$ όπου $f_1=(1,1)$, $f_2=(-1,0)$

Έχουμε:

$$Tf_1=T(1,1)=(2,3)=3(1,1)+(-1,0)=3f_1+f_2$$

$$Tf_2=T(-1,0)=(-4,-2)=-2(1,1)+2(-1,0)=2f_1+2f_2$$

Άρα ο ζητούμενος πίνακας είναι:

$$[T]_f=\begin{pmatrix}3&1\\-2&2\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}3&-2\\1&2\end{pmatrix}$$

Παρατήρηση 3.2.1: Οι συντελεστές των διανυσμάτων $T(1,1)=(2,3)$ και $T(-1,0)=(-4,-2)$, ως προς τη βάση $\{f_1,f_2\}$ βρίσκονται ως εξής:

$$T(1,1)=(2,3)=\alpha(1,1)+\beta(-1,0)=(\alpha,\alpha)+(-\beta,0)=(\alpha-\beta,\alpha) \Rightarrow \left.\begin{matrix}\alpha-\beta=2\\ \alpha=3\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}\beta=1\\ \alpha=3\end{matrix}\right|$$

$$T(-1,0)=(-4,-2)=\gamma(1,1)+\delta(-1,0)=(\gamma,\gamma)+(-\delta,0)=(\gamma-\delta,\gamma) \Rightarrow \left.\begin{matrix}\gamma-\delta=-4\\ \gamma=-2\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}\delta=2\\ \gamma=-2\end{matrix}\right|$$

Θεώρημα 3.2.1: Έστω $B=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ μια βάση του διανυσματικού χώρου V και T τυχών τελεστής. Τότε για οποιοδήποτε διάνυσμα $v \in V$ έχουμε:

$$[T]_e[v]_e=[T(v)]_e$$

Δηλαδή, αν πολλαπλασιάσουμε τον πίνακα του T επί το διάνυσμα στήλη του v, τότε θα προκύψει το διάνυσμα στήλη του T(v).

<u>Απόδειξη</u>: Για $i=1,2,\cdots,n$ έχουμε:

$$Te_i=\alpha_{i1}e_1+\alpha_{i2}e_2+\cdots+\alpha_{in}e_n=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}e_j$$

Τότε ο πίνακας $[T]_e$ είναι ένας τετραγωνικός πίνακας τύπου n×n του οποίου η j σειρά είναι:

$$(\alpha_{1j},\alpha_{2j},\cdots,\alpha_{nj}) \qquad (1)$$

Τώρα αν $v=k_1e_1+k_2e_2+\cdots+k_ne_n=\sum_{i=1}^{n}k_i e_i$, το διάνυσμα στήλη που αντιστοιχεί στο v είναι η ανάστροφη σειρά:

$$[v]_e=(k_1,k_2,\cdots,k_n)^t=\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix} \qquad (2)$$

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας τη γραμμικότητα του T έχουμε:

$$Tv=T\left(\sum_{i=1}^{n}k_ie_i\right)=\sum_{i=1}^{n}k_iTe_i=\sum_{i=1}^{n}k_i\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}e_j\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}k_i\right)e_j=$$

$$\sum_{j=1}^{n}(\alpha_{1j}k_1+\alpha_{2j}k_2+\ldots+\alpha_{nj}k_n)e_j \qquad (3)$$

Έτσι το [T(v)] είναι η στήλη διάνυσμα της οποίας το j στοιχείο είναι:

$$\alpha_{1j}k_1+\alpha_{2j}k_2+\alpha_{nj}k_n$$

Επίσης το j στοιχείο του $[T]_e\,[v]_e$ προκύπτει πολλαπλασιάζοντας την j σειρά του $[T]_e$ με το $[v]_e$ δηλαδή την (1) με την (2).

Αλλά το γινόμενο (1) επί (2) είναι το (3). Άρα $[T]_e[v]_e$ και $[T(v)]_e$ έχουν τα ίδια στοιχεία, συνεπώς: $[T]_e[v]_e=[T(v)]_e$

Παράδειγμα 3.2.3: Στο παράδειγμα 3.2.1, είχαμε τον διαφορικό τελεστή D: V → V του οποίου η αναπαράσταση υπό μορφή πίνακα είναι:

$$[D]_x=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Έστω $p(x)=\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3$ τότε $D(p(t))=\beta+2\gamma x+3\delta x^2$. Επομένως ως προς τη βάση $\{1,x,x^2,x^3\}$ έχουμε

$$[p(x)]_x=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\\\delta\end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \left[D\left(p(x)\right)\right]_x=\begin{pmatrix}\beta\\2\gamma\\3\delta\\0\end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι:

$$[D]_x p(x)]_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ 2\gamma \\ 3\delta \\ 0 \end{pmatrix} = [D(p(x))]_x$$

δηλαδή επαληθεύεται το θεώρημα 1.

Μέχρι τώρα έχουμε αντιστοιχίσει έναν πίνακα $[T]_e$ σε κάθε τελεστή και το θεώρημα 3.2.1 μας εξασφαλίζει ότι η δράση του T διατηρείται απ' αυτή την αντιστοιχία ή όπως την έχουμε ονομάσει αναπαράσταση. Το επόμενο θεώρημα το οποίο θα το διατυπώσουμε χωρίς απόδειξη, μας εξασφαλίζει ότι οι τρεις βασικές πράξεις των τελεστών:

1. της πρόσθεσης, 2. του βαθμωτού πολλαπλασιασμού, 3. της σύνθεσης, επίσης διατηρούνται.

Θεώρημα 3.2.2: Έστω $B=\{e_1,\cdots,e_n\}$ μια βάση του διανυσματικού χώρου V στο σώμα F και A_n η Άλγεβρα των τετραγωνικών πινάκων $n\times n$ στο ίδιο σώμα F. Τότε η απεικόνιση $T\to [T]_e$ είναι ένας ισομορφισμός, (αμφιμονοσήμαντη και επί), από την $A(V) \to A_n$, όπου A(V) η άλγεβρα των τελεστών, που ορίζονται στο χώρο V. Επιπλέον $\forall S,T\in A(V)$ και $\forall k\in F$ έχουμε:

$$[T+S]_e=[T]_e+[S]_e,\ \ [kT]_e=k[T]_e,\ \ [ST]_e=[S]_e[T]_e$$

3.3 Είδη Τελεστών

Ορισμός 3.3.4 Έστω T ένας τελεστής ορισμένος στον γραμμικό χώρο V. Για κάθε τελεστή T, ο τελεστής T^+, που ορίζεται από τη σχέση:

$$(\forall x,y\in V)\left[\ \langle Tx|y\rangle=\langle x|T^+y\rangle\ \right]$$

ονομάζεται **συναφής** ή **συζυγοανάστροφος** ή ***προσαρτημένος***, (**adjoint** ή **transpose-conjugate**) του T.

Παρατήρηση 3.3.1 Αποδεικνύεται ότι για κάθε τελεστή T υπάρχει ο συναφής T^+ και είναι μοναδικός.

Θεώρημα 3.3.1 Ισχύουν οι σχέσεις:

α) $(T_1+T_2)^+=T_1^{\ +}+T_2^{\ +}$

β) $(T_1T_2)^+=T_2^{\ +}T_1^{\ +}$

γ) $(\lambda T)^+=\lambda^*T^+ \quad \lambda\in F$

δ) $(T^+)^+=T$

Θεώρημα 3.3.2 Έστω (t_{ij}) ο πίνακας που αντιστοιχεί στον τελεστή T ως προς μια ορθοκανονική βάση B. Τότε ο πίνακας του τελεστή T^+ ως προς την ίδια βάση είναι $[T^+]_{ij}=t_{ji}^{\ *}$.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω

$t_{ij}=[T]_{ij}=\langle e_i|Te_j\rangle$ το ij-στοιχείο του τελεστή T και

$t^+_{\ ij}=[T^+]_{ij}=\langle e_i|T^+e_j\rangle$ το ij-στοιχείο του τελεστή T^+.

Έχουμε: $t^+_{\ ij}=\langle e_i|T^+e_j\rangle=\langle Te_i|e_j\rangle=\langle e_j|Te_i\rangle^*=t^*_{\ ji}$

Ορισμός 3.3.5 Εάν $T=T^+$ τότε ο τελεστής T ονομάζεται **αυτοσυναφής τελεστής** ή **αυτοπροσαρτημένος**, (**selfadjoint**). Σ' έναν πραγματικό χώρο εσωτερικού γινομένου, ένας αυτοσυναφής τελεστής ονομάζεται **συμμετρικός**, (symmetric), και σ' ένα μιγαδικό χώρο εσωτερικού γινομένου **ερμιτιανός**, (hermitian).

Ορισμός 3.3.6 Εάν για έναν ερμιτιανό τελεστή T ισχύει:

$$(\forall x\in V)\left[\ \langle x|Tx\rangle \geq 0\ \right]$$

ο τελεστής T λέγεται **θετικά ορισμένος** ή πιο απλά **θετικός τελεστής**.

Πίνακας $A=\alpha_{ij}$	Τελεστής $T:V\to V$
1. **Ταυτοτικός, (identical)** $(A)_{ij}=\alpha_{ij}=\delta_{ij}$	**Ταυτοτικός, (identical)** $\langle e_i\|Te_j\rangle=\delta_{ij}$
2. **Διαγώνιος, (diagonal)** $(A)_{ij}=\alpha_{ij}=d_i\delta_{ij}$	**Διαγώνιος, (diagonal)** $\langle e_i\|Te_j\rangle=d_i\delta_{ij}$
3. **Ανάστροφος, (transpose)** $(A)_{ij}=\alpha_{ij}\ \ (A^t)_{ij}=\alpha_{ji}$ $\alpha_{ij}=\alpha^t_{ji}$	**Ανάστροφος, (transpose)** $\langle e_i\|Te_j\rangle=\langle e_j\|T^te_i\rangle=\langle T^te_i\|e_j\rangle^*$ $\langle e_i\|Te_j\rangle=\langle e_j\|T^te_i\rangle$
4. **Συζυγής, (conjugate)** $(A)_{ij}=\alpha_{ij}\ \ (A^*)_{ij}=\alpha_{ij}^*$ $(\alpha^*_{ij})^*=\alpha_{ij}$	**Συζυγής, conjugate)** $\langle e_i\|Te_j\rangle^*=\langle e_i\|T^*e_j\rangle$
5. **Συναφής** ή **συσυγοανάστροφος, (adjoint)** $(A)_{ij}=\alpha_{ij}\ \ (A^+)_{ij}=\alpha_{ji}^*$	**Συναφής** ή **συσυγοανάστροφος, (adjoint)** $\langle e_i\|T^+e_j\rangle=\langle e_j\|Te_i\rangle^*=\langle Te_j\|e_j\rangle$
6. **Αυτοσυναφής, (selfadjoint)** $(A)_{ij}=\alpha_{ij}\ \ (A^+)_{ij}=\alpha_{ji}^*$ $A=A^+\Rightarrow\alpha_{ij}=\alpha_{ji}^*$	**Αυτοσυναφής, (selfadjoint)** $\langle e_i\|Te_j\rangle=\langle e_j\|Te_i\rangle^*=\langle Te_i\|e_j\rangle$
6α. **Συμμετρικός, (symmetric)** Αν $\alpha_{ij}\in R\Rightarrow\alpha_{ij}=\alpha_{ji}\Rightarrow$	**Συμμετρικός, (symmetric)** $\langle e_i\|Te_j\rangle=\langle Te_i\|e_j\rangle$ Αν ο χώρος V είναι Ευκλείδιος, δηλ. πραγματικός

Α=συμμετρικός πίνακας	χώρος εσωτερικού γινομένου, τότε ο αυτοσυζυγής ονομάζεται, **συμμετρικός** .
6β. **Ερμιτιανός, (hermitean)** Αν $\alpha_{ij}\in C \Rightarrow \alpha_{ij}=\alpha_{ji}^{*}\Rightarrow$ Α=ερμιτιανός	**Ερμιτιανός, (hermitean)** $\langle e_i\|Te_j\rangle=\langle Te_i\|e_j\rangle$ Αν ο χώρος V είναι Unitary, δηλ. μιγαδικός χώρος εσωτερικού γινομένου, τότε ο αυτοσυζυγής ονομαζεται, **ερμιτιανός**.
7. **Αντισυμμετρικός, (antisymmetric)** $\alpha_{ij}=-\alpha_{ji}$	**Αντισυμμετρικός, (antisymmetric)** $\langle e_i\|Te_j\rangle=-\langle e_j\|Te_i\rangle$
8. **Μοναδιαίος, (unitary)** $A^{-1}=A^{+}\quad A^{+}A=AA^{+}=I$ $\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}^{+}\alpha_{kj}=\delta_{ij}$	**Μοναδιαίος, (unitary)** $T^{-1}=T^{+}$ $\sum_{k=1}^{n}\langle e_i\|T^{+}e_k\rangle\langle e_i\|Te_k\rangle=\delta_{ij}$
9. **Ορθογώνιος, (orthogonal)** $A^{-1}=A^{t}\ A^{t}A=AA^{t}=I$ $\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}^{t}\alpha_{kj}=\delta_{ij}$	**Ορθογώνιος, (orthogonal)** $T^{-1}=T^{t}$ $\sum_{k=1}^{n}\langle e_i\|T^{t}e_k\rangle\langle e_k\|Te_i\rangle=\delta_{ij}$

Θεώρημα 3.3.3 Εάν T_1 και T_2 είναι αυτοσυναφείς τελεστές, τότε το γινόμενο T_1T_2 είναι αυτοσυναφής εάν και μόνο εάν οι τελεστές T_1 και T_2 μετατίθενται.

Απόδειξη: $(T_1T_2)^{+}=(T_2)^{+}(T_1)^{+}=T_2T_1=T_1T_2$.

Όπως είδαμε προηγούμενα, μεταξύ των τελεστών ενός διανυσματικού χώρου V, διάστασης n και μεταξύ των τετραγωνικών πινάκων n×n υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία, όταν μας δοθεί μια συγκεκριμένη βάση του V. Επίσης, όταν η βάση $\{e_i\}$ είναι ορθοκανονική τα στοιχεία του πίνακα που αντιστοιχεί στον τελεστή T δίνονται από τη σχέση:

$$\alpha_{ij}=\langle e_i|Te_j\rangle \qquad (1)$$

(βλέπε σχέση (2), παράγραφος 3.2). (Η ορθοκανονικότητα μιάς βάσης εξασφαλίζεται πάντοτε από τη μέθοδο ορθοκανονικοποιήσεως Gram-Schmidt).

Ό,τι χαρακτηριστικά έχει ο πίνακας α_{ij}, τα ίδια χαρακτηριστικά αποδίδονται και στον τελεστή T. Π.χ. αν ο πίνακας α_{ij} είναι συμμετρικός, τότε και ο τελεστής T ονομάζεται συμμετρικός. Αυτά δε τα χαρακτηριστικά εμφανίζονται από τη σχέση (1). Οι αντιστοιχίες μεταξύ των πινάκων και των τελεστών αναγράφονται στον προηγούμενο πίνακα, όπου στην πρώτη στήλη παραθέτουμε τα είδη των πινάκων και στη δεύτερη τα αντίστοιχα είδη των τελεστών. Οι ιδιότητες των πινάκων εμφανίζονται στα στοιχεία τους, ενώ των τελεστών στο εσωτερικό γινόμενο.

Στη συνέχεια παραθέτουμε τα θεωρήματα 3.3.4, 3.3.5, και 3.3.6, τα οποία είναι απαραίτητα για την απόδειξη του θεωρήματος 3.3.7, που έχει άμεση σχέση με την αναμενόμενη τιμή ενός τελεστή.

Θεώρημα 3.3.4: Ένας τελεστής T σε χώρο V εσωτερικού γινομένου είναι ο μηδενικός τελεστής, (δηλ. $Tx=0\ \forall x$), εάν και μόνο εάν $<x|Ty>=0\ \ \forall x,y\in V$.

Απόδειξη: α) Εάν $T=0$ τότε $<x|Ty>=<x|0>=0$,

[διότι $<x|y>=<x|y+0>=<x|y>+<x|0> \Rightarrow <x|0>=0$].

β) Εάν $<x|Ty>=0\ \forall\ x,y\in V$ παίρνουμε $x=Ty$.

Τότε $<Ty|Ty>=0 \Rightarrow Ty=0\ \ \forall y\in V$ δηλ. $T=0$, (από την δ ιδιότητα του εσωτερικού γινομένου, βλ. παρ. 2.1)

Θεώρημα 3.3.5: Έστω ότι ο T είναι αυτοσυναφής τελεστής, ($T=T^{+}$), σ' έναν πραγματικό χώρο εσωτερικού γινομένου, (δηλ. ο T είναι ένας συμμετρικός τελεστής). Τότε ο $T=0$ εάν και μόνο εάν $<x|Tx>=0\ \forall x\in V$.

Απόδειξη: α) Εάν $T=0$ τότε $<x|Tx>=0$

β) $\quad <x+y|T(x+y)>=<x|Tx>+<y|Ty>+<x|Ty>+<y|Tx>$

αλλά $\quad <x+y|T(x+y)>=0,\ <x|Tx>=0,\ <y|Ty>=0$

Επομένως $\quad <x|Ty>+<y|Tx>=0 \quad (A)$

Όμως $<y|Tx>=<T^{+}y|x>=<Ty|x>=<x|Ty>^{*}=<x|Ty> \ \Rightarrow$

$$<y|Tx>=<x|Ty> \qquad (B)$$

Από τις σχέσεις (A) και (B) έχουμε:

$$2<x|Ty>=0 \ \Rightarrow\ <x|Ty>=0 \ \Rightarrow\ <x|Ty>=0\ \ \forall x,y\in V$$

Από το θεώρημα 3.3.4 έχουμε τελικά ότι $T=0$

Θεώρημα 3.3.6: Εάν T ένας αυτοσυναφής τελεστής σ' ένα unitary χώρο, (δηλ. ο T είναι ένας ερμιτιανός τελεστής), τότε $T=0$ εάν και μόνο εάν $<x|Tx>=0\ \ \ \forall x\in V$

Απόδειξη: α) Προφανές.

β) Εάν $<x|Tx>=0\ \ \ \forall x\in V$ έχουμε από το θεώρημα 3.3.5 ότι:

$$<x|Ty>+<y|Tx>=0\ \ \ \forall x,y\in V. \qquad (1)$$

Στη θέση του y θέτουμε iy και έχουμε:

$$0=<x|Tiy>+<iy|Ty=i<x|Ty>-i<y|Tx>=i[<x|Ty>-<y|Tx>] \ \Rightarrow$$

$$<x|Ty>-<y|Tx>=0 \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $<x|Ty>=0\ \forall x,y\in V$ και από το θεώρημα 3.3.4 έχουμε ότι $T=0$.

Πόρισμα 3.3.1: Από τα θεωρήματα 3.3.5 και 3.3.6 συμπεραίνουμε ότι εάν T είναι αυτοσυναφής τελεστής σ' ένα χώρο εσωτερικού γινομένου, (πραγματικού ή μιγαδικού), τότε $T=0$ εάν και μόνο εάν $<x|Tx>=0\ \ \ \forall x\in V$.

Θεώρημα 3.3.7: Ένας τελεστής T σ' ένα Unitary χώρο είναι ερμιτιανός, (δηλ $T=T^{+}$), εάν και μόνο εάν $<x|Tx>\in R\ \forall x\in V$.

Απόδειξη: α) Εάν $T=T^+$, τότε $<x|Tx>=<T^+x|x>=<x|T^+x>^*=<x|Tx>^* \Rightarrow <x|Tx>\in R$.

β) Εάν $<x|Tx>\in R$ τότε $<x|Tx>=<x|Tx>^*=<Tx|x>=<x|T^+x> \Rightarrow <x|[T-T^+]x>=0\ \forall x\in V$.

Και από το θεώρημα 3.3.6 έχουμε $T-T^+=0 \Rightarrow T=T^+$

Παρατήρηση 3.3.2: Το θεώρημα αυτό δεν ισχύει σε πραγματικούς χώρους δηλ. εάν $<x|Tx>\in R$ δεν έπεται ότι ο T είναι συμμετρικός. Βέβαια το $<x|Tx>$ είναι πάντοτε πραγματικός αριθμός σ' έναν πραγματικό χώρο εσωτερικού γινομένου, αλλά σ' ένα μιγαδικό χώρο εσωτερικού γινομένου το γεγονός ότι το $<x|Tx>$ είναι πραγματικός αριθμός έχει σαν συνέπεια ότι ο T είναι ερμιτιανός.

Η ποσότητα $<x|Tx>$ ονομάζεται στην Κβαντομηχανική **μέση** ή **αναμενόμενη τιμή** του τελεστή T. Όταν οι κυματοσυναρτήσεις x είναι κανονικοποιημένες, η ποσότητα $<x|Tx>$ είναι η μέση τιμή πολλών μετρήσεων του μεγέθους T των συστημάτων που βρίσκονται στην κατάσταση x. Φυσικά αυτός ο αριθμός πρέπει να είναι πραγματικός. Επομένως οι τελεστές της κβαντομηχανικής, που αντιστοιχούν σε φυσικά παρατηρήσιμα μεγέθη πρέπει να είναι ερμιτιανοί.

Επειδή στην κβαντική θεωρία οι μόνες δυνατές τιμές, που μπορούν να προκύψουν από μια μέτρηση, είναι οι ιδιοτιμές του αντίστοιχου ερμιτιανού τελεστή, θα πρέπει οι ιδιοτιμές αυτές να είναι πραγματικές. Αυτό το εγγυάται το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 3.3.8: Οι ιδιοτιμές ενός ερμιτιανού τελεστή είναι πραγματικές.

Απόδειξη: Έστω $Tx=\lambda x \Rightarrow <x|Tx>=<x|\lambda x>=\lambda<x|x>$ (1)

αλλά $<x|Tx>=<Tx|x>=<\lambda x|x>=\lambda^*<x|x>$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$(\lambda-\lambda^*)<x|x>=0 \Rightarrow \lambda=\lambda^*$ όταν $x\neq 0$.

Άλλος τρόπος: Από την (1) έχουμε: $\lambda=\dfrac{\langle x|Tx\rangle}{\|x\|^2}\in R$ διότι $<x,Tx>\in R$ και $\|x\|^2>0$

Παράδειγμα 3.3.1: Οι ιδιοτιμές ενός αρμονικού ταλαντωτή είναι πραγματικές και μάλιστα θετικές: Έστω

$$H=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2 \quad \text{και} \quad Hu=Eu \ \text{ με } \|u\|=1. \ \text{Τότε}$$

$E=<u|Hu>=$

$$E=\langle u|Hu\rangle=\left\langle u\middle|\frac{p^2}{2m}u\right\rangle+\left\langle u\middle|\frac{1}{2}m\omega^2x^2u\right\rangle=\frac{1}{2m}\langle p^+u|pu\rangle+\frac{1}{2}m\omega^2\langle x^+u|xu\rangle=$$

$$=\frac{1}{2m}\langle pu|pu\rangle+\frac{1}{2}m\omega^2\langle xu|xu\rangle=\frac{1}{2m}\|pu\|^2+\frac{1}{2}m\omega^2\|xu\|^2\geq 0$$

Ορισμός 3.3.7 Ένας τελεστής T, ορισμένος σ' ένα χώρο εσωτερικού γινομένου, ονομάζεται **ισομετρία** εάν ισχύει:

$$T^+T=I \qquad (T^+=\text{συναφής του } T)$$

όπου I ο **ταυτοτικός** τελεστής, ($Ix=x\ \forall x$). Εάν δε ισχύει:

$$T^+T=TT^+=I$$

ο τελεστής T ονομάζεται **μοναδιαίος** τελεστής, (**unitary**). Εάν δε ισχύει :

$$TT^t = I \qquad (T^t\text{=ο ανάστροφος του T})$$

ο τελεστής Τ λέγεται **ορθογώνιος**.

Θεώρημα 3.3.9: Σ' ένα χώρο εσωτερικού γινομένου οι επόμενες τρεις προτάσεις είναι ισοδύναμες:

1) $U^+U=I$
2) $\langle Ux|Uy\rangle=\langle x|y\rangle \ \ \forall x,y\in V$
3) $||Ux||=||x|| \ \ \forall x\in V$

Απόδειξη: Εάν $U^+U=I$, τότε $\langle Ux|Uy\rangle=\langle x|U^+Uy\rangle=\langle x|y\rangle$

Εάν y=x θα έχουμε $||Ux||=\sqrt{\langle Ux|Ux\rangle}=\sqrt{\langle x|x\rangle}=||x||$

Επίσης $||Ux||^2=\langle Ux|Ux\rangle=\langle U^+Ux|x\rangle=\langle x|x\rangle \ \Rightarrow \ \langle[U^+U-I]x|x\rangle=0 \ \ \forall x\in V \Rightarrow U^+U=I$. διότι ο τελεστής U^+U-I είναι ερμιτιανός και μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα 3.3.7.

Η πρόταση 3 δείχνει ότι μια ισομετρία διατηρεί τα μήκη και από τη σχέση:

$$\cos\theta=\frac{\langle x|y\rangle}{\|x\|\|y\|}=\frac{\langle Ux|Uy\rangle}{\|Ux\|\|Uy\|}$$

βλέπουμε ότι η ισομετρία διατηρεί και τη γωνία μεταξύ δυο διανυσμάτων.

Θεώρημα 3.3.10: Εάν $\{x_i\}$ i=1,…,n είναι ένα πλήρες ορθοκανονικό σύνολο, τότε και το σύνολο $\{Ux_i\}$ i=1,…,n είναι επίσης πλήρες και ορθοκανονικό.

Απόδειξη: Έχουμε: $\langle Ux_i|Ux_j\rangle=\langle x_i|U^+Ux_j\rangle=\langle x_i|x_j\rangle=\delta_{ij}$ δηλ. το σύνολο $\{Ux_i\}$ είναι ορθοκανονικό. Για να αποδείξουμε ότι το σύνολο $\{Ux_i\}$ είναι πλήρες, αρκεί να δείξουμε ότι ικανοποιεί την ταυτότητα του Parseval, (συνθήκη 5 Θεώρημα 2.1.3).

Έχουμε: $$\sum_{i=1}^{n}\langle y|Ux_i\rangle\langle Ux_i|x\rangle=\sum_{i=1}^{n}\langle U^+y|x_i\rangle\langle x_i|U^+x\rangle=\langle U^+y|U^+x\rangle$$

επειδή το σύνολο $\{x_i\}$ είναι πλήρες. Αλλά $\langle U^+y|U^+x\rangle=\langle y|UU^+x\rangle=\langle y|x\rangle$ δηλ

$\langle y|x\rangle=\sum_{i=1}^{n}\langle y|Ux_i\rangle\langle Ux_i|x\rangle$ και επομένως το σύνολο $\{Ux_i\}$ είναι πλήρες.

Θεώρημα 3.3.11: Κάθε ιδιοτιμή ενός Unitary, (ισομετρικού) τελεστή έχει απόλυτη τιμή ίση με την μονάδα.

Απόδειξη: Έστω $Ux=\lambda x$, $(x\neq 0)$, τότε $||x||=||Ux||=||\lambda x||=|\lambda|||x|| \ \Rightarrow \ |\lambda|=1$.

Θεώρημα 3.3.12: Εάν ο τελεστής Τ είναι ερμιτιανός ή ισομετρία, τότε τα ιδιοδιανύσματα του Τ, που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι κάθετα.

Απόδειξη: Έστω ότι $Tx_1=\lambda_1x_1$ και $Tx_2=\lambda_2x_2$ με $\lambda_1\neq\lambda_2$.

α) Εάν ο Τ είναι ερμιτιανός, τότε:

$$\langle x_1|Tx_2\rangle=\langle x_1|\lambda_2x_2\rangle=\lambda_2\langle x_1|x_2\rangle \qquad (1)$$

$$\langle x_1|Tx_2\rangle=\langle Tx_1|x_2\rangle=\lambda_1^*\langle x_1|x_2\rangle=\lambda_1\langle x_1|x_2\rangle \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$$(\lambda_2-\lambda_1)<x_1|x_2>=0 \;\Rightarrow\; <x_1|x_2>=0 \text{ επειδή } \lambda_1\neq\lambda_2$$

β) Εάν ο Τ είναι ισομετρία, τότε:

$$<x_1|x_2>=<Tx_1|Tx_2>=\lambda_1^*\lambda_2<x_1|x_2>=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}<x_1|x_2>, \text{ (επειδή } |\lambda_1|^2=\lambda_1\lambda_1^*=1) \;\Rightarrow$$

$$\left[1-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right]<x_1|x_2>=0 \;\Rightarrow\; (\lambda_1-\lambda_2)<x_1|x_2>=0 \;\Rightarrow\; <x_1|x_2>=0$$

Θεώρημα 3.3.13 Δυο ερμιτιανοί τελεστές Α και Β μετατίθενται εάν και μόνο εάν υπάρχει ένα πλήρες ορθοκανονικό σύνολο κοινών ιδιοδιανυσμάτων.

Απόδειξη: α) Έστω $\{x_i\}$ το κοινό σύνολο ιδιοδιανυσμάτων των τελεστών Α και Β, δηλ. $Ax_i=\alpha_i x_i$ και $Bx_i=\beta_i x_i$. Τότε θα έχουμε:

$$ABx_i=A(\beta_i x_i)= \beta_i(Ax_i)= \beta_i(\alpha_i x_i)= \beta_i\alpha_i x_i$$

και $$BAx_i=B(\alpha_i x_i)= \alpha_i(Bx_i)= \alpha_i(\beta_i x_i)= \alpha_i\beta_i x_i$$

Αφαιρώντας τις παραπάνω σχέσεις έχουμε: $(AB-BA)x_i=0 \;\forall x_i$

Αλλά επειδή τα ιδιοδιανύσματα x_i αποτελούν ένα πλήρες ορθοκανονικό σύνολο, δηλ. μια βάση, κάθε διάνυσμα x μπορεί να γραφεί σαν:

$$x=\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

οπότε $$(AB-BA)x=\sum_{i=1}^{n} c_i(AB-BA)x_i=0 \;\Rightarrow\; AB-BA=0 \;\Rightarrow AB=BA$$

β) Έστω τώρα ότι ΑΒ=ΒΑ και $\{x_i\}$ ιδιοδιανύσματα του τελεστή Α: $Ax_i=\alpha_i x_i$, που είναι ορθοκανονικά. Τότε:

$$BAx_i=\alpha_i Bx_i \Rightarrow ABx_i=\alpha_i(Bx_i)$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι το διάνυσμα Bx_i είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του Α που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή α_i . Εδώ διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:

1) Οι ιδιοτιμές α_i είναι διακεκριμένες, δηλ. έχουν αλγεβρική πολλαπλότητα 1, οπότε σε κάθε ιδιοτιμή α_i αντιστοιχεί ένα μόνο ιδιοδιάνυσμα x_i . Τότε για κάθε i, το διάνυσμα Bx_i πρέπει να είναι συγραμμικό του x_i: $Bx_i=\beta_i x_i$, δηλ. το x_i είναι ένα ιδιοδιάνυσμα και του Β με ιδιοτιμή β_i . Επομένως τα ιδιοδιανύσματα $\{x_i\}$ του τελεστή Α είναι και ιδιοδιανύσματα του τελεστή Β.

2) Έστω ότι οι ιδιοτιμές α_i του τελεστή Α δεν έχουν όλες αλγεβρική πολλαπλότητα 1. Τότε θα υπάρχουν ιδιοτιμές α_i με αλγεβρική πολλαπλότητα m>1. Στις ιδιοτιμές αυτές θα ανήκουν m ιδιοδιανύσματα του τελεστή Α: $\{x_i^{(1)}, x_i^{(2)},\cdots, x_i^{(k)},\cdots, x_i^{(m)}\}$ και βάσει των παραπάνω τα διανύσματα $\{Bx_i^{(1)}, Bx_i^{(2)},\cdots, Bx_i^{(k)},\cdots, Bx_i^{(m)}\}$ αποτελούν επίσης ιδιοδιανύσματα του Α, που ανήκουν στην ίδια ιδιοτιμή α_i και μπορούν να γραφούν σαν ένας γραμμικός συνδιασμός των m γραμμικώς ανεξαρτήτων ιδιοδιανυσμάτων $\{x_i^{(1)}, x_i^{(2)},\cdots, x_i^{(k)},\cdots, x_i^{(m)}\}$. Διαλέγουμε τα διανύσματα $\{x_i\}$ να αποτελούν ένα ορθοκανονικό σύνολο και γράφουμε αυτούς τους γραμμικούς συνδυασμούς αναλυτικά:

$$Bx_i^{(1)}=\sum_{j=1}^{m}\lambda_{j1}x_i^{(j)}$$

....

$$Bx_i^{(k)}=\sum_{j=1}^{m}\lambda_{jk}x_i^{(j)}$$

....

$$Bx_i^{(m)}=\sum_{j=1}^{m}\lambda_{jm}x_i^{(j)}$$

Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι, επειδή ο B είναι ερμιτιανός τελεστής, οι συντελεστές λ_{ij} σχηματίζουν έναν ερμιτιανό πίνακα Λ. Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να βρούμε εκείνους τους γραμμικούς συνδυασμούς των ιδιοδιανυσμάτων $x_i^{(k)}$ του τελεστή A, (που ανήκουν στην ιδιοτιμή α_i), και που είναι συγχρόνως ιδιοδιανύσματα του B. Εάν υποθέσουμε ότι ο γραμμικός συνδυασμός:

$$\sum_{k=1}^{m}\mu_k x_i^{(k)}$$

είναι ιδιοδιάνυσμα του B, (όπως είναι και του A), τότε αναγκαστικά η έκφραση:

$$B\left(\sum_{k=1}^{m}\mu_k x_i^{(k)}\right)=\sum_{k=1}^{m}\mu_k\left(Bx_i^{(k)}\right)=\sum_{j,k}^{m}\mu_k\left(\sum_{j=1}^{m}\lambda_{jk}\left(Bx_i^{(j)}\right)\right)$$

θα είναι της μορφής:

$$\gamma\sum_{k=1}^{m}\mu_k x_i^{(k)}$$

και αυτό είναι δυνατό εάν υπάρχουν αριθμοί μ_k έτσι ώστε:

$$\sum_{k=1}^{m}\lambda_{jk}\mu_k=\gamma\mu_j$$

Αλλά η τελευταία έκφραση είναι η εξίσωση ιδιοτιμών, σε αναλυτική μορφή, του ερμιτιανού (m×m) πίνακα $\Lambda=\lambda_{jk}$. Άρα υπάρχουν m σε πλήθος γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, τα οποία μπορούν να εκλεγούν έτσι ώστε να είναι ορθοκανονικά. Έτσι βρήκαμε m ιδιοτιμές γ_ν, μερικές από τις οποίες μπορεί να είναι ίσες, και m ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα $y^{(\nu)}$ τέτοια ώστε οι m γραμμικοί συνδυασμοί:

$$y_i^{(\nu)}=\sum_{k=1}^{m}\mu_k^{(\nu)}x_i^{(k)}$$

είναι ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα και των δυο τελεστών A και B.

Παρατήρηση 3.3.3 Το παραπάνω θεώρημα, που ισχύει και για χώρους απείρων διαστάσεων, δείχνει ότι οι τελεστές H, (χαμιλτόνια), L^2, (το τετράγωνο της ολικής στροφορμής) και L_z, (η z-συνιστώσα της στροφορμής), οι οποίοι μετατίθενται μεταξύ τους, έχουν ένα κοινό σύνολο ιδιοδιανυσμάτων και επομένως τα αντίστοιχα παρατηρήσιμα μεγέθη μπορούν να μετρηθούν συγχρόνως. Οι τελεστές p της ορμής και x της θέσεως δεν μπορούν να μετρηθούν συγχρόνως.

3.4 Φυσική ερμηνεία του γραμμικού φορμαλισμού

Σαν φυσική εφαρμογή του γραμμικού φορμαλισμού, θα μελετήσουμε την περίπτωση ενός σωματίου, που κινείται σε χώρο μιας διάστασης μέσα σ' ένα πηγάδι δυναμικού. Συμβολίζουμε την χωρική συντεταγμένη με x και τον χρόνο με t. Δεχόμαστε ότι στο σύστημα μας επενεργεί μια δύναμη F(x), που προκύπτει από δυναμικό V(x), δηλ. $F(x)= -\frac{d}{dx}V(x)$. Στην κλασική μηχανική, εάν συμβολίσουμε την ορμή με p, η ολική ενέργεια E δίνεται από την έκφραση:

$$E=\frac{p^2}{2m}+V(x) \qquad (1)$$

Κλασικά η κατάσταση ενός σωματίου περιγράφεται από την τροχιά του x(t), όπου για κάθε χρονική στιγμή t έχουμε $x(t)\in R^1$.

Όπως γνωρίζουμε, ένα από τα αξιώματα της Κβαντομηχανικής είναι ότι η κατάσταση ενός συστήματος περιγράφεται από μια συνάρτηση Ψ(t), όπου Ψ(t) είναι ένα διάνυσμα σ' ένα χώρο Hilbert. Από την πλευρά της Κυματομηχανικής, η κατάσταση ενός σωματίου περιγράφεται τη χρονική στιγμή t από την "κυματοσυνάρτηση" Ψ(x) για την οποία απαιτούμε να ικανοποιείται η σχέση:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\Psi(x,t)\right|^2 dx = 1 \qquad (2)$$

Σαν συνάρτηση του t, η Ψ(x,t) θεωρείται ότι είναι συνεχώς διαφορίσιμη ως προς t και ότι η δεύτερη παράγωγος ως προς x είναι κατά τμήματα συνεχής. Έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε ότι για κάθε t η Ψ(x,t) είναι ένα στοιχείο του Ευκλείδειου χώρου $L_2^1(R^1)$ όλων των μιγαδικών συναρτήσεων f(x), οι οποίες είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμες, δηλ.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|f(x)\right|^2 dx\langle+\infty$$

και συνεχώς διαφορίσιμες. Στον χώρο $L_2^1(R)$ το εσωτερικό γινόμενο ορίζεται από τη σχέση:

$$<f|g>=\int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x)g(x)dx$$

και η σχέση κανονικοποίησης είναι:

$$||\Psi(x,t)||^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\Psi(x,t)\right|^2 dx = 1$$

όπου $\Psi(t)\in L_2^1(R^1)$ συμβολίζει το διάνυσμα, που παριστάνεται από τη συνάρτηση $f_t(x)= \Psi(x,t)$.

Στην κλασική μηχανική η εξίσωση κίνησης προκύπτει από τον δεύτερο νόμο του Newton, ο οποίος στην περίπτωση αυτή είναι:

$$-\frac{dV}{dx} = m\ddot{x} \quad , \quad \ddot{x} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

Στην κυματομηχανική δεχόμαστε αξιωματικά ότι η κυματοσυνάρτηση Ψ(x,t) ικανοποιεί την εξίσωση του Schrödinger:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x)\Psi(x,t) \qquad (3)$$

Ένας απλός τρόπος, ο οποίος μας οδηγεί στην παραπάνω εξίσωση, είναι να αντικαταστήσουμε την ορμή p στην σχέση (1) από τον διαφορικό τελεστή $-i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x}$ και την ενέργεια E από τον διαφορικό τελεστή $i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}$. Εάν χρησιμοποιήσουμε αυτούς τους τελεστές τυπικά και γράψουμε:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

παίρνουμε την παρακάτω σχέση τελεστών:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x) \tag{4}$$

από την οποία προέρχεται η (3) όταν επιδράσει πάνω στην Ψ(x,t).

Αξίζει να σημειώσουμε ότι η εξίσωση του Schrödinger (3) διατηρεί την συνθήκη κανονικοποίησης (2):

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}|\Psi(x,t)|^2\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial\Psi^*(x,t)}{\partial t}\Psi(x,t)+\Psi^*(x,t)\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}\right)dx=$$

$$=\frac{\hbar}{2im}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial^2\Psi^*(x,t)}{\partial x^2}\Psi(x,t)-\Psi^*(x,t)\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2}\right)dx=$$

$$=\frac{\hbar}{2im}\left(\lim_{\alpha\to\infty}\left[\frac{\partial^*\Psi}{\partial x}\Psi-\Psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]_{x=-\alpha}^{x=\alpha}-\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial\Psi^*}{\partial x}\frac{\partial\Psi}{\partial x}-\frac{\partial\Psi^*}{\partial x}\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)dx\right)=0$$

3.5. Ισχυρή και ασθενής σύγκλιση

Ορισμός 3.5.1: Σ' ένα χώρο εσωτερικού γινομένου μπορούμε να ορίσουμε δυο είδη σύγκλισης.

α) Η πρώτη αναφέρεται ως προς την norm, (που προέρχεται από το εσωτερικό γινόμενο), και ονομάζεται **ισχυρή σύγκλιση**. Ορίζεται δε ως εξής:

Μια ακολουθία x_n συγκλίνει ισχυρά στο διάνυσμα x εάν

$$\lim_{n\to\infty}||x_n-x||=0$$

Την σύγκλιση αυτή την συμβολίζουμε:

$$x_n\xrightarrow{s}x \quad ή \quad s\text{-}\lim x_n=x$$

β) Η δεύτερη αναφέρεται στο εσωτερικό γινόμενο και ονομάζεται **ασθενής σύγκλισης.** Ορίζεται δε ως εξής:

Μια ακολουθία x_n συγκλίνει ασθενώς στο διάνυσμα x εάν

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n|y\rangle = \langle x|y\rangle \ \forall y \ \text{ ή ισοδύναμα } \lim_{n\to\infty} \left|\langle x_n|y\rangle - \langle x|y\rangle\right| = 0$$

Την σύγκλιση αυτή την συμβολίζουμε:

$$x_n \xrightarrow{w} x \ \text{ ή } \ w\text{-}\lim x_n = x$$

Θεώρημα 3.5.1: Εάν η ακολουθία x_n συγκλίνει ισχυρά, τότε συγκλίνει και ασθενώς.

Απόδειξη: Έχουμε

$\langle x_n|y\rangle - \langle x|y\rangle = \langle x_n - x|y\rangle \Rightarrow |\langle x_n|y\rangle - \langle x|y\rangle| = |\langle x_n - x|y\rangle| \le ||x_n - x|| \, ||y||$ (Ανισ. του Schwarz).

Επειδή όμως $\lim_{n\to\infty}||x_n-x||=0$, (διότι $x_n \xrightarrow{s} x$), θα έχουμε:

$$\lim_{n\to\infty} |\langle x_n|y\rangle - \langle x|y\rangle| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \langle x_n|y\rangle = \langle x|y\rangle \quad \text{δηλ. } x_n \xrightarrow{w} x$$

Παρατήρηση 3.5.1: Εάν η διάσταση του χώρου είναι πεπερασμένη, δηλ. $\dim V<\infty$, ισχύει και το αντίστροφο της προηγούμενης πρότασης. Γενικά όμως σε χώρους απείρων διαστάσεων το αντίστροφο δεν ισχύει, δηλ. εάν

$$x_n \xrightarrow{w} x \text{ δεν έπεται ότι } \quad x_n \xrightarrow{s} x \ .$$

Παράδειγμα 3.5.1 Έστω ο χώρος l^2 και θεωρούμε την ακολουθία:

$x_1=(1,0,0,\ldots)$

$x_2=(0,1,0,\ldots)$

$\ldots\ldots\ldots\ldots$

Τότε για κάθε $y=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ έχουμε $\langle x_n|y\rangle=\alpha_n$ και επειδή

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 < \infty$$

(αφού το $y\in l^2$), έχουμε $\alpha_k \to 0$. Άρα $\langle x_n|y\rangle \to 0$ και επομένως η ακολουθία x_n συγκλίνει ασθενώς και μάλιστα στο 0, (δηλαδή στην μηδενική ακολουθία: (0,0,…)). Δεν συγκλίνει όμως ισχυρά. Πράγματι από το γεγονός ότι $||x_n-x_m||=\sqrt{2}$ βλέπουμε ότι η ακολουθία x_n δεν μπορεί να συγκλίνει ισχυρά αφού δεν είναι ούτε ακολουθία του Cauchy.

Παρατήρηση 3.5.2 Εάν επιπλέον δεχθούμε ότι: $\lim_{n\to\infty} ||x_n||=||x||$ (που ισχύει σε πεπερασμένους χώρους), τότε ισχύει και το αντίστροφο. Πράγματι:

Έστω $\quad x_n \xrightarrow{w} x \Leftrightarrow \langle x_n|y\rangle \to \langle x|y\rangle \ \ \forall y$

Έχουμε: $\quad ||x_n-x||^2 = \langle x_n-x|x_n-x\rangle = ||x_n||^2 - \langle x_n|x\rangle - \langle x|x_n\rangle + ||x||^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} ||x||^2-||x||^2-||x||^2+||x||^2=0$

$$\Rightarrow x_n \xrightarrow{s} x$$

Ορισμός 3.5.2: Ένας τελεστής T λέγεται **συνεχής στο σημείο** $x_0\in D(T)$, {D(T)= πεδίον ορισμού του T}, εάν ισχύει:

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall x\in D(T))\big[\ ||x-x_0||<\delta \Rightarrow ||Tx-Tx_0||<\varepsilon\ \big]$$

ή ισοδύναμα: εάν για κάθε ακολουθία x_n με $x_n \in D(T)$, που συγκλίνει στο x_0 ισχυρά, δηλ. $x_n \xrightarrow{s} x_0$ να έχουμε $Tx_n \xrightarrow{s} Tx_0$ (ισοδύναμος ορισμός της συνέχειας κατά Heine, που στηρίζεται στο θεώρημα της μεταφοράς).

Θεώρημα 3.5.2: Εάν ο τελεστής T είναι συνεχής σ' ένα σημείο $x_0 \in D(T)$, τότε είναι συνεχής σ' όλο το D(T).

Απόδειξη: Έστω $y_0 \in D(T)$ και μια ακολουθία $y_n \xrightarrow{s} y_0$.

Σχηματίζουμε την ακολουθία: $x_n=(y_n-y_0)+x_0$, η οποία τείνει στο x_0: $x_n \xrightarrow{s} x_0$. Τότε θα έχουμε $Tx_n \xrightarrow{s} Tx_0$, λόγω της συνέχειας του T στο σημείο x_0. Αλλά

$$Tx_n=Ty_n-Ty_0+Tx_0 \Rightarrow \text{s-lim}_{n\to\infty}Tx_n=\text{s-lim}_{n\to\infty}\{Ty_n-Ty_0+Tx_0\} \Rightarrow$$

$$Tx_0=\text{s-lim}_{n\to\infty}\{Ty_n-Ty_0\}+Tx_0 \Rightarrow$$

$$\text{s-lim}_{n\to\infty}\{Ty_n-Ty_0\}=0 \Rightarrow \text{s-lim}_{n\to\infty} Ty_n=Ty_0$$

Σαν x_0 θεωρούμε συχνά το μηδενικό διάνυσμα.

Ορισμός 3.5.3: Ο τελεστής T λέγεται **φραγμένος** εάν υπάρχει θετικός αριθμός k έτσι ώστε: $||Tx||\leq k||x|| \ \ \forall x\in V$ δηλ.

$$(\exists k>0)(\forall x\in V)[\ ||Tx||\leq k||x||\ ]$$

Ορισμός 3.5.4: Εάν T είναι ένας φραγμένος τελεστής, ορίζουμε την **norm**, (ή **στάθμη**), του T ως εξής:

$$||T||=\sup\frac{||Tx||}{||x||} \quad \text{με } x\in V$$

ή ισοδύναμα $\qquad ||T||= \sup_{||x||=1}||Tx||$

Επειδή μπορεί να δει κανείς ότι $||T||=\inf(k)$ όταν $||Tx||\leq k||x|| \ \ \forall x\in V$ μπορούμε να γράψουμε:

$$||Tx||\leq ||T||\ ||x||$$

Θεώρημα 3.5.3: Εάν ο τελετής T είναι φραγμένος, τότε κατ' ανάγκη είναι συνεχής και αντίστροφα.

Απόδειξη : α) Έστω ότι ο τελεστής T είναι φραγμένος και έστω ότι:

$$x_n \xrightarrow{s} x_0\in D(T).$$

Τότε $\qquad ||Tx_n-Tx_0||=||T(x_n-x_0)||\leq k||x_n-x_0|| \to 0 \quad$ όταν $n\to\infty$

δηλ. $Tx_n \xrightarrow{s} Tx_0$ και λόγω του θεωρήματος 3.5.2, ο T είναι παντού συνεχής.

β) Έστω ότι ο T είναι συνεχής στο σημείο x_0 . Θα έχουμε:

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta(\varepsilon)>0)\Big[\ ||x-x_0||<\delta \ \Rightarrow\ ||Tx-Tx_0||=||T(x-x_0)||<\varepsilon\ \Big]$$

ή θέτοντας $x-x_0=u$

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta(\varepsilon)>0)\Big[\ ||u||<\delta \ \Rightarrow\ ||Tu||<\varepsilon\ \Big]$$

Εάν πάρουμε $\varepsilon_1>0$, τέτοιο ώστε $0<\varepsilon_1<\delta$ και θεωρήσουμε ένα τυχαίο διάνυσμα $\xi\in V$, θα έχουμε:

$$\left\|\frac{\xi}{\|\xi\|}(\delta-\varepsilon_1)\right\| = |\delta-\varepsilon_1| \langle \delta$$

Θεωρώντας σαν u το $\frac{\xi}{\|\xi\|}(\delta-\varepsilon_1)$ θα έχουμε:

$$\|u\| = \left\|\frac{\xi}{\|\xi\|}(\delta-\varepsilon_1)\right\| = |\delta-\varepsilon_1| \langle \delta \Rightarrow \|Tu\| = \left\|\frac{T\xi}{\|\xi\|}(\delta-\varepsilon_1)\right\| < \varepsilon \;\Rightarrow\; \|T\xi\| < \frac{\varepsilon}{\delta-\varepsilon_1}\|\xi\|$$

Από την τελευταία σχέση συμπεραίνουμε ότι ο T είναι φραγμένος.

Άλλος τρόπος για να αποδείξουμε το αντίστροφο είναι ο εξής:

Έστω ότι ο T δεν είναι φραγμένος. Τότε για κάθε φυσικό αριθμό n υπάρχει διάνυσμα y_n τέτοιο ώστε $\|Ty_n\|>n\|y_n\|$. Θέτουμε $x_n = \frac{1}{n}\frac{y_n}{\|y_n\|}$, τότε $\|x_n\| = \frac{1}{n} \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty}\|x_n\| = 0$

Αλλά $\|Tx_n\| = \frac{1}{n}\left\|\frac{Ty_n}{\|y_n\|}\right\| > \frac{1}{n}\frac{n\|y_n\|}{\|y_n\|} = 1$, και επομένως $\lim_{n\to\infty} Tx_n \not\to 0$ δηλαδή ο T δεν είναι συνεχής.

Θεώρημα 3.5.4: Το άθροισμα T+S δυο φραγμένων τελεστών είναι επίσης φραγμένος τελεστής.

<u>Απόδειξη</u>: $\|(T+S)x\| = \|Tx+Sx\| \le \|Tx\|+\|Sx\| \le \|T\|\,\|x\|+\|S\|\,\|x\| =$

$$= \left[\|T\|+\|S\|\right]\|x\| \;\; \forall x\in V \;\Rightarrow\; \|T+S\|\le \|T\|+\|S\|$$

Επίσης για ένα φραγμένο τελεστή T και για $\lambda\in C$ έχουμε:

$$\|\lambda T\| = \sup\frac{\|\lambda(Tx)\|}{\|x\|} = |\lambda|\sup\frac{\|Tx\|}{\|x\|} = |\lambda|\,\|T\|$$

Από τα παραπάνω εύκολα προκύπτει ότι <u>*το σύνολο των φραγμένων τελεστών αποτελεί ένα διανυσματικό χώρο με norm, δηλ. ένα σταθμητό διανυσματικό χώρο*</u>.

Θεώρημα 3.5.5 Κάθε τελεστής ορισμένος σ' ένα χώρο πεπερασμένης διάστασης είναι φραγμένος.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $\{e_i\}$ i=1,…,n μια ορθοκανονική βάση και $x=\sum_{i=1}^{n} c_i e_i$ με $c_i=\langle e_i|x\rangle$ ένα τυχαίο διάνυσμα. Έχουμε:

$$Tx = \sum_{i=1}^{n} c_i Te_i = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i | x\rangle Te_i$$

$$||Tx||^2=<Tx|Tx>=\left\langle \sum_{i=1}^{n}\langle e_i|x\rangle Te_i \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n}\langle e_j|x\rangle Te_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\langle x|e_i\rangle\langle Te_i|Te_j\rangle\langle e_j|x\rangle$$

Αλλά από την ανισότητα του Schwarz έχουμε:

$$|<x|e_i>| \leq ||x||\ ||e_i|| = ||x||$$

Επομένως $\quad ||Tx||^2 \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}||x||\left|\langle Te_i|Te_j\rangle\right|||x||= \left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|\langle Te_i|Te_j\rangle\right|\right\}||x||^2$

Εάν $M=\max|<Te_i|Te_j>|$ τότε $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|\langle Te_i|Te_j\rangle\right| \leq n^2M$ και τελικά:

$$||Tx||^2 \leq n^2M||x||^2 \ \Rightarrow\ ||Tx|| \leq n\sqrt{M}||x||$$

δηλ. ο T είναι φραγμένος.

Παράδειγμα 3.5.2: Έστω ο χώρος $V=C\,[\alpha,\beta]$ των συνεχών μιγαδικών συναρτήσεων πραγματικής μεταβλητής $x\in[\alpha,\beta]$. Ορίζουμε τον τελεστή T από τη σχέση:

$$T(f(x)) \equiv \int_{\alpha}^{x} f(y)dy \quad \forall f\in C\,[\alpha,\beta]$$

Από τον ολοκληρωτικό λογισμό ξέρουμε ότι η συνάρτηση Tf είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$. Επομένως $Tf\in C\,[\alpha,\beta]$. Η γραμμικότητα του T είναι προφανής. Θα δείξουμε ότι ο T είναι φραγμένος.

Κατ' αρχήν θυμίζουμε ότι η norm στο χώρο $C\,[\alpha,\beta]$ είναι:

$$||f||= \sup_x |f(x)|$$

Στη συνέχεια έχουμε:

$$||Tf||=\sup_x\left|\int_{\alpha}^{x} f(y)dy\right| \leq \sup_x \int_{\alpha}^{x}|f(y)|\,dy \leq \int_{\alpha}^{\beta}|f(y)|\,dy \leq (\beta-\alpha)\sup_x|f(x)|=(\beta-\alpha)||f||$$

δηλ. ο τελεστής T είναι φραγμένος.

(Αποδεικνύεται ότι $||T||=\beta-\alpha$, (π.χ. θεωρείστε την συνάρτηση $f(x)=1$ και δείτε ότι $||f(x)||=1$), και ότι το πεδίο τιμών R(T) του T δεν είναι όλος ο χώρος $C\,[\alpha,\beta]$ αλλά μόνο ο υπόχωρος των διαφορισίμων συναρτήσεων.)

Παράδειγμα 3.5.3: Έστω V ένας διανυσματικός χώρος εσωτερικού γινομένου και x_0 ένα μοναδιαίο διάνυσμα: $||x_0||=1$. Ορίζουμε τον τελεστή T από την σχέση:

$$Tx=<x_0|x>x_0 \quad \forall x\in V$$

δηλ. ο T είναι ένας προβολικός τελεστής, που προβάλλει κάθε διάνυσμα x στην διεύθυνση του x_0. Έχουμε:

$$||Tx||=||<x_0|x>x_0||=|<x_0|x>|\ ||x_0||=|<x_0|x>|\leq||x_0||\ ||x||=||x|| \ \Rightarrow\ \frac{||Tx||}{||x||}\leq 1$$

Αλλά για $x=x_0$ έχουμε $||Tx_0||=||x_0||=1$ δηλ. η norm του T δεν μπορεί να είναι μικρότερη του 1. Άρα $||T||=1$.

Παράδειγμα 3.5.4: Έστω V ένας διανυσματικός χώρος και $\{\dots e_k \dots\}$ μια ορθοκανονική βάση. Ορίζουμε τον τελεστή T θέτοντας:

$$Te_k=\frac{1}{k}e_k \quad \forall k=1,2,\dots$$

Επεκτείνουμε αυτόν τον ορισμό, με την βοήθεια της γραμμικότητας σ' όλα τα διανύσματα x= $\sum_{k}^{\infty}\alpha_k e_k$ και έχουμε:

$$Tx=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k Te_k=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\frac{1}{k}e_k \qquad \forall x\in V$$

Επειδή $\|x\|^2<\infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|^2<\infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\alpha_k}{k}\right|^2<\infty$ βλέπουμε ότι $Tx\in V$. Έτσι έχουμε ένα γραμμικό τελεστή ορισμένο σ' όλο τον V δηλ. D(T)=V. Ο τελεστής T είναι φραγμένος διότι

$$\|Tx\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\alpha_k|^2}{k^2}\le\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\alpha_k|}{k}\right]^2\le\left[\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|^2\right]\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right]=K^2\|x\|^2$$

όπου $K^2=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι το πεδίο τιμών R(T) του T αποτελείται από τα διανύσματα

$$y=\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k e_k \quad \text{για τα οποία} \quad \sum_{k=1}^{\infty}k^2|\beta_k|^2<\infty \quad \text{δηλ. } R(T)\subset V.$$

διότι
$$y=Tx\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\beta_k e_k=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\frac{1}{k}e_k \Rightarrow \beta_k=\frac{\alpha_k}{k}\Rightarrow \alpha_k=k\beta_k$$

και επειδή
$$\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|^2<\infty\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}k^2|\beta_k|^2<\infty$$

Είναι προφανές ότι ο τελεστής T έχει αντίστροφο, ο οποίος μπορεί να ορισθεί θέτοντας:

$$T^{-1}e_k=ke_k \quad \forall k$$

και επεκτείνοντας τον με την βοήθεια της γραμμικότητας στο R(T). Πράγματι εάν $y\in R(T)$, τότε:

$$T^{-1}(y)=T^{-1}(Tx)=T^{-1}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k}{k}e_k\right]=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k}{k}T^{-1}e_k=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k e_k=x$$

Όμως ο T^{-1} δεν είναι φραγμένος. Εάν π.χ. $y=e_k$, τότε:

$$\|T^{-1}e_k\|=\|ke_k\|=k\|e_k\|=k$$

και διαλέγοντας το k αρκετά μεγάλο το $\|T^{-1}e_k\|$ υπερβαίνει οποιοδήποτε θετικό αριθμό.

Το παράδειγμα αυτό μας προειδοποιεί ότι ο αντίστροφος ενός φραγμένου τελεστή δεν είναι πάντα φραγμένος.

Παράδειγμα 3.5.5: Ας θεωρήσουμε τον διαν. χώρο $L^2(-\infty,+\infty)$ των κατά Lebesque τετραγωνικά ολοκληρωσίμων συναρτήσεων πραγματικής μεταβλητής. Θεωρούμε τον υπόχωρο, (γραμμική πολλαπλότητα), $U\subset L^2(-\infty,+\infty)$, που αποτελείται από τις συναρτήσεις f(x) που έχουν την ιδιότητα οι συναρτήσεις xf(x) να είναι επίσης τετραγωνικά ολοκληρώσιμες.

Έστω Q η απεικόνιση:

$$Q: U \rightarrow L^2(-\infty,+\infty)$$

$$Q: f \mapsto Qf=xf(x) \quad \forall f\in U$$

Είναι προφανές ότι η Q είναι μια γραμμική απεικόνιση. Αλλά δεν είναι συνεχής, (ούτε επομένως και φραγμένη). Πράγματι ας θεωρήσουμε την ακολουθία των συναρτήσεων:

$$f_n(x)=\begin{cases} \sqrt{\exp\left(-\dfrac{x}{n+1}\right)-\exp\left(-\dfrac{x}{n}\right)}\dfrac{1}{\sqrt{x}} & \text{εάν } x\geq 0 \\ 0 & \text{εάν } x\langle 0 \end{cases}$$

Τα στοιχεία αυτής της ακολουθίας ανήκουν στον υπόχωρο U, διότι:

$$\|Qf_n\|^2=\int_0^\infty\left[\exp\left(-\frac{x}{n+1}\right)-\exp\left(-\frac{x}{n}\right)\right]xdx=(n+1)^2-n^2=2n+1<\infty \quad \forall n\in N$$

Επί πλέον η ακολουθία f_n συγκλίνει στη μηδενική συνάρτηση $f\equiv 0$ αφού:

$$\|f_n\|^2=\int_0^\infty\left[\exp\left(-\frac{x}{n+1}\right)-\exp\left(-\frac{x}{n}\right)\right]\frac{1}{x}dx=\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\rightarrow 0 \quad \text{όταν } n\rightarrow\infty$$

Όμως $\|Qf_n-Qf\|\equiv\|Qf_n\|=\sqrt{2n+1}$ που δεν τείνει στο μηδέν όταν $n\rightarrow\infty$. Τελικά η απεικόνιση Q, (ο τελεστής θέσης της Κβαντομηχανικής), δεν είναι συνεχής και άρα ούτε φραγμένη.

Το ότι ο τελεστής Q δεν είναι φραγμένος μπορούμε επίσης να το συμπεράνουμε από το γεγονός ότι η τιμή του ολοκληρώματος:

$$\|Qf(x)\|^2=\int_{-\infty}^{+\infty}|xf(x)|^2\,dx$$

μπορεί να γίνει όσες φορές θέλουμε μεγαλύτερη από το ολοκλήρωμα:

$$\|f(x)\|^2=\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^2\,dx$$

Παράδειγμα 3.5.6: Ένας άλλος ιδιαιτέρου ενδιαφέροντος τελεστής στην Κβαντομηχανική είναι ο τελεστής της ορμής P. Θεωρούμε πάλι τον χώρο $L^2(-\infty,+\infty)$ και συμβολίζουμε με W τον υπόχωρο του L^2, που αποτελείται από τις συναρτήσεις f(x) οι οποίες είναι διαφορίσιμες και η συνάρτηση $-i\dfrac{df(x)}{dx}$ τετραγωνικά ολοκληρώσιμη. Ορίζουμε τον τελεστή P ως εξής:

$$P: W \rightarrow L^2$$

$$P:\ f(x) \mapsto Pf(x) = -i\frac{df(x)}{dx}$$

Η γραμμικότητα του P είναι προφανής. Όμως ο P δεν είναι συνεχής. Για παράδειγμα ας πάρουμε την ακολουθία $f_n(x)=\exp(-n|x|)$. Τα στοιχεία της ανήκουν στο W διότι:

$$Pf_n(x)=\begin{cases} in\exp(-nx) & x\rangle 0 \\ \\ -in\exp(-nx) & x\langle 0 \end{cases}$$

έτσι ώστε: $\quad ||Pf_n||^2=n^2\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-2n|x|)dx = n<\infty \quad \forall n\in N$

Η ακολουθία f_n συγκλίνει στη μηδενική συνάρτηση $f\equiv 0$, διότι

$$||f_n||^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-2n|x|)dx = 1/n \ \to\ 0 \quad \text{για } n\to\infty$$

Όμως $\quad ||Pf_n-Pf||=||Pf_n||=\sqrt{n}$ δεν τείνει στο μηδέν για $n\to\infty$

Άρα ο P δεν είναι συνεχής, (ούτε και φραγμένος).

Παρατήρηση 3.5.3: O τελεστής θέσης Q όταν θεωρηθεί στον χώρο $L^2(\alpha,\beta)$ με $0<\alpha<\beta$, τότε είναι φραγμένος και άρα συνεχής. Πράγματι:

$$||Qf||^2=\int_\alpha^\beta x^2\,|f(x)|^2\,dx \le \beta^2\int_\alpha^\beta |f(x)|^2\,dx = \beta^2\,||f||^2$$

Δυστυχώς δεν συμβαίνει το ίδιο για τον τελεστή της ορμής $P=-i\frac{d}{dx}$ στον χώρο $L^2(\alpha,\beta)$. Γιατί;

(Θωρείστε την ακολουθία $f_n=\exp(-n|x|)$ του προηγουμένου παραδείγματος.)

4 ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΟΕΙΔΗ ΚΑΙ ΔΥΪΚΟΣ ΧΩΡΟΣ

Έστω V διαν. χώρος επί του σώματος K[31] (=R ή C) με dimV=n.

Ορισμός 4.1.1 Μια απεικόνιση $F : V \to K$ με την ιδιότητα:

$$F(\lambda x+\mu y)=\lambda F(x)+\mu F(y) \quad \forall x,y\in V \text{ και } \forall \lambda,\mu\in K$$

ονομάζεται **γραμμικό συναρτησοειδές**.

Το σύνολο όλων των γραμμικών συναρτησοειδών, που ορίζονται πάνω σ' ένα διαν. χώρο V, αποτελεί διαν. χώρο με πράξεις:

α) την πρόσθεση δυο συναρτησοειδών F και G:

$$F+G: V \to K$$

$$F+G: x \mapsto (F+G)(x)\equiv F(x)+G(x) \text{ και}$$

β) τον πολλαπλασιασμό αριθμού $\lambda\in K$ επί ενός συναρτησοειδούς F:

$$\lambda F: V \to K$$

$$\lambda F: x \mapsto (\lambda F)(x)\equiv \lambda F(x)$$

Ορισμός 4.1.2 Ο διαν. χώρος των συναρτησοειδών ονομάζεται **αλγεβρικός δυϊκός χώρος** του V και συμβολίζεται με V^*.

Θεώρημα 4.1.1 Ο δυϊκός χώρος V^* είναι ισόμορφος προς τον διανυσματικό χώρο K^n [32].

<u>Απόδειξη</u>: Για να αποδείξουμε ότι οι χώροι V^* και K^n είναι ισόμορφοι αρκεί να ορίσουμε μια απεικόνιση Φ του K^n εντός του V^* , η οποία να πληροί τις τρεις ιδιότητες:

α) να είναι αμφιμονοσήμαντη, β) επί και γ) γραμμική.

Θεωρούμε μια βάση του χώρου V, έστω την $B=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ και ένα στοιχείο του K^n, δηλ μια n-άδα: $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$. Σ΄αυτήν την n-άδα θα αντιστοιχίσουμε μια απεικόνιση:

$$F: V\to K$$

ως εξής: έστω $x\in V$ με $x=x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n$, τότε ορίζουμε την απεικόνιση F από την σχέση:

$$F(x)\equiv \alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n$$

η οποία εκ κατασκευής είναι γραμμική και επομένως είναι ένα συναρτησοειδές, $F\in V^*$. Επίσης έχουμε: $F(e_1)=\alpha_1$, $F(e_2)=\alpha_2$, $\cdots$, $F(e_n)=\alpha_n$.

Με την παραπάνω εργασία μπορούμε σε κάθε στοιχείο $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in K^n$ να αντιστοιχίσουμε ένα συναρτησοειδές $F\in V^*$, δηλ. ορίζουμε μια απεικόνιση $\Phi: K^n\to V^*$. Για να είναι οι χώροι K^n και V^* ισόμορφοι, αρκεί να αποδείξουμε ότι η απεικόνιση Φ είναι α) αμφιμονοσήμαντη, β) επί και γ) γραμμική.

---

[31] Προς αποφυγή συγχύσεως στο κεφάλαιο αυτό το σώμα θα το συμβολίζουμε με K αντί με F.

[32] Το σύνολο K^n αποτελείται από τις n-άδες $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$, με $\alpha_i\in K$, και εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι αποτελεί διανυσματικό χώρο πάνω στο ίδιο σώμα K με $\dim K^n=n$, όπως επίσης ότι κάθε πεπερασμένος διανυσματικός χώρος V επί του σώματος K με dimV=n είναι ισόμορφος με τον K^n , δηλ. $V\cong K^n$.

α) Εάν υποθέσουμε ότι σε δυο διαφορετικά στοιχεία $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ και $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$ του K^n αντιστοιχεί με την βοήθεια της Φ το ίδιο συναρτησοειδές F, τότε πρέπει να έχουμε:

$F(e_i)=\alpha_i$ και $F(e_i)=\beta_i$ $i=1,2,\cdots,n$ $\Rightarrow$ $\alpha_i=\beta_i$ $i=1,2,\cdots,n$ όπερ άτοπο διότι

$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\neq(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$ δηλ. η Φ είναι αμφιμονοσήμαντη.

β) Θεωρούμε ένα τυχαίο στοιχείο F του V^* και θέτουμε $F(e_i)=\alpha_i$ $i=1,2,\cdots,n$. Έστω ότι στο στοιχείο $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ του K^n αντιστοιχεί το συναρτησοειδές G για το οποίο έχουμε

$G(e_i)=\alpha_i$ $i=1,2,\cdots,n$

Επομένως $F(e_i)=G(e_i)$ $i=1,2,\cdots,n \Rightarrow F=G$ δηλ. η Φ είναι επί.

γ) Θεωρούμε τρία συναρτησοειδή F,G και H τα οποία ορίζονται από τις παρακάτω n-άδες:

$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$, $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$ και $(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_n+\beta_n)$

Έχουμε: $H(e_i)=\alpha_i+\beta_i=F(e_i)+G(e_i)=(F+G)(e_i) \Rightarrow F+G=H$ (1)

Εξ' άλλου έχουμε:

$\Phi(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=F$, $\Phi(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=G$, $\Phi(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_n+\beta_n)=H$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$$\Phi[(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)+(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)]=\Phi(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)+\Phi(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι

$\Phi[\lambda(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)]=\lambda\Phi(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ δηλ. η Φ είναι γραμμική.

Παράδειγμα 4.1.1 Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $V=R^n$ πάνω στο σώμα K=R, του οποίου τα διανύσματα τα γράφουμε υπό μορφή στήλης:

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Βάσει του προηγουμένου θεωρήματος τα στοιχεία του δυϊκού χώρου $V^*=(R^n)^*$ παρίστανται υπό μορφή σειράς:

$$F=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$$

Το αποτέλεσμα της επιδράσεως του συναρτησοειδούς F πάνω στο στοιχείο x μπορούμε να το πάρουμε από το γινόμενο της σειράς $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ με την στήλη:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

δηλ. $$F(x)= (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =\alpha_1x_1+\alpha_2+x_2+\cdots+\alpha_nx_n \qquad (1)$$

Επομένως μπορούμε να πούμε ότι, εάν τα στοιχεία x του διανυσματικού χώρου $V=R^n$ τα γράφουμε υπό μορφή στήλης, τότε τα στοιχεία F του δυϊκού χώρου $V^*=(R^n)^*$ θα τα γράφουμε υπό μορφή γραμμής.

Η σχέση (1) μας θυμίζει το ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο του R^n . Όμως εδώ εμφανίζεται κάποιο πρόβλημα: Το εσωτερικό γινόμενο ορίζεται σε διανύσματα του ίδιου χώρου: με $x,y\in R^n$ έχουμε $<x|y>=x_1y_1+x_2+y_2+\cdots+x_ny_n$. Άρα πρέπει να περιμένουμε ότι τα στοιχεία του δυϊκού χώρου $(R^n)^*$ βρίσκονται σε πλήρη αντιστοιχία με τα στοιχεία του αρχικού χώρου R^n . Πράγματι από το προηγούμενο θεώρημα είδαμε ότι σε κάθε συναρτησοειδές $F\in(R^n)^*$ αντιστοιχεί ένα στοιχείο του $K^n=R^n$ δηλ. μια n-άδα. Αλλά από την γραμμική Άλγεβρα είναι γνωστό ότι κάθε πεπερασμένος διανυσματικός χώρος V επί του σώματος K είναι ισομορφικός με τον K^n . Επομένως η σειρά, που αντιστοιχεί στο συναρτησοειδές F μπορεί να θεωρηθεί σαν στήλη, δηλ. σαν στοιχείο του αρχικού χώρου $V=R^n$.

Το προηγούμενο συμπέρασμα μπορεί να επεκταθεί και για χώρους απείρων διαστάσεων, αρκεί να είναι χώροι Hilbert. Αυτό το εγγυάται, όπως θα δούμε παρακάτω, το θεώρημα του Riesz

Ο χώρος V^* αποκτά ενδιαφέρουσες ιδιότητες όταν ο διαν. χώρος V έχει κάποια τοπολογική δομή. Όπως ξέρουμε ένας norm διαν. χώρος είναι και τοπολογικός χώρος με τοπολογία που ορίζεται από την norm. Έτσι εάν V είναι ένας norm χώρος, τότε μπορούμε να μιλάμε για συνεχή γραμμικά συναρτησοειδή και για το μέτρο τους, κατ' αναλογία με τους συνεχείς τελεστές.

Ορισμός 4.1.3 Έστω V ένας norm χώρος. Ένα γραμμικό συναρτησοειδές F λέγεται **συνεχές** στο σημείο, (διάνυσμα), x_0 εάν ισχύει:

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in V)\Big[\ ||x-x_0||<\delta\ \Rightarrow\ |F(x)-F(x_0)|<\varepsilon\ \Big]$$

Παρατήρηση 4.1.1 Όπως και στην περίπτωση των τελεστών, μπορούμε να δούμε ότι εάν ένα γραμμικό συναρτησοειδές είναι συνεχές σε κάποιο σημείο x_0, τότε είναι συνεχές σ' όλο το πεδίο ορισμού του.

Παρατήρηση 4.1.2 Ο ορισμός της συνέχειας ενός γραμμικού συναρτησοειδούς σε κάποιο σημείο x_0 είναι ισοδύναμος με τον ορισμό της συνέχειας κατά Heine χάριν του θεωρήματος της μεταφοράς. Δηλαδή εάν για κάθε συγκλίνουσα στο x_0 ακολουθία διανυσμάτων x_n, η ακολουθία $F(x_n)$ συγκλίνει στο $F(x_0)$, τότε το F είναι συνεχές και αντίστροφα.

Ορισμός 4.1.4 Το μέτρο ενός συνεχούς γραμμικού συναρτησοειδούς F ορίζεται σαν το infimum των θετικών αριθμών k, για τα οποία ισχύει:

$$(\forall x\in V)\Big[\ |F(x)|\le k||x||\ \Big]$$

και συμβολίζεται με $||F||$ δηλ.

$$||F||=\inf\{k\ /\ |F(x)|\le k||x||\ \}$$

ή ισοδύναμα:

$$||F||=\sup_{x\neq 0}\frac{|F(x)|}{||x||}=\sup_{||x||=1}|F(x)|$$

Η πιο σπουδαία ιδιότητα των συνεχών γραμμικών συναρτησοειδών είναι αυτή που περιγράφεται από το θεώρημα των Hahn-Banach, το οποίο με απλά λόγια λέει ότι ένα συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές ορίζεται από τις τιμές του πάνω σε μια "μικρή" περιοχή του χώρου. Η ακριβής διατύπωση έχει ως εξής:

Θεώρημα 4.1.2 Έστω U ένας υπόχωρος, (πιο γενικά μια γραμμική πολλαπλότητα), ενός norm χώρου V. Έστω F ένα συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές ορισμένο στο U. Τότε το F μπορεί να επεκταθεί σ' ένα συνεχές γραμμικό συναρτησοδειδές $\hat{F}$ ορισμένο σ' όλο τον χώρο V και $||\hat{F}||=||F||$.

Θεώρημα 4.1.3 Εάν $(V_1, ||\cdot\cdot||_1)$ είναι ένας norm χώρος και $(V_2, ||\cdot\cdot||_2)$ ένας χώρος Banach, τότε ο χώρος $L(V_1, V_2)$ των συνεχών γραμμικών απεικονίσεων

$$F: V_1 \to V_2$$

είναι Banach χώρος ως προς την norm

$$||F||=\sup_{x\neq 0}\frac{||F(x)||_2}{||x||_1}$$

<u>Απόδειξη</u>: Έστω F_n μια ακολουθία του Cauchy με στοιχεία από τον χώρο $L(V_1, V_2)$, δηλ. $||F_n-F_m|| \to 0$ όταν $m,n \to \infty$. Τότε $\forall x\in V_1$ έχουμε:

$$||F_n(x)-F_m(x)||_2=||(F_n-F_m)(x)||_2\leq||F_n-F_m||\,||x||_1 \to 0 \qquad (1)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την σχέση:

$$||F(x)||_2\leq||F||\ ||x||_1$$

που προκύπτει από τον ορισμό της norm μιας γραμμικής. απεικόνισης.

Η σχέση (1) δείχνει ότι η ακολουθία $F_n(x)$ είναι ακολουθία του Cauchy με στοιχεία από τον χώρο V_2 , και επειδή ο χώρος V_2 είναι πλήρης, η ακολουθία αυτή συγκλίνει σε κάποιο διάνυσμα του V_2 , που θα το γράψουμε με F(x). Έτσι για κάθε διάνυσμα $x\in V_1$ υπάρχει ένα διάνυσμα $F(x)\in V_2$ έτσι ώστε:

$$F_n(x) \to F(x) \quad \text{όταν} \quad n \to \infty \qquad (2)$$

Αφήνοντας τώρα το x να διατρέχει όλο τον χώρο V_1 , έχουμε μια απεικόνιση

$$F: V_1 \to V_2$$

που εύκολα μπορούμε να δούμε, χρησιμοποιώντας την συνέχεια του αθροίσματος και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού, ότι είναι γραμμική. Επίσης είναι συνεχής. Πράγματι:

$$||F(x)||_2=||\lim_{n\to\infty} F_n(x)||_2=\lim_{n\to\infty}||F_n||\ ||x||_1 \leq\left(\sup\ \{||F_n||\}\right)||x||_1$$

(όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι το F είναι συνεχές και άρα φραγμένο). Επειδή η F_n είναι ακολουθία Cauchy, μπορεί να δειχθεί ότι το $\{||F_n||\}$ είναι ένα φραγμένο σύνολο αριθμών, έτσι ώστε το $\sup_n\{||F_n||\}$ είναι μια πεπερασμένη σταθερά. Αυτό δείχνει ότι: $||F(x)||_2\leq K||x||_1$, δηλ. το F είναι συνεχές.

Τέλος θα δείξουμε ότι $F_n \to F$ ως προς την norm $||\cdot\cdot||$ του L. Πράγματι:

$$\lim_{n\to\infty}||F_n-F||=\lim_{n\to\infty}\sup_{||x||=1}||F_n(x)-F(x)||_2=\sup_{||x||=1}||\lim_{n\to\infty}(F_n(x)-F(x))|| = 0$$

όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε την σχέση (2). Τελικά αποδείξαμε ότι η τυχαία ακολουθία Cauchy F_n από τον χώρο L συγκλίνει σε κάποιο στοιχείο $F \in L$ και επομένως ο L είναι πλήρης.

Ας θεωρήσουμε τώρα το σύνολο L(V,C) όλων των συνεχών γραμμικών συναρτησοειδών ορισμένων σ' ένα norm χώρο V. Επειδή το σύνολο των μιγαδικών αριθμών C είναι χώρος Banach, από το προηγούμενο θεώρημα, συμπεραίνουμε ότι ο χώρος L(V,C) είναι χώρος Banach.

Ορισμός 4.1.4 Ο χώρος L(V,C) ονομάζεται **δυϊκός χώρος**, (**dual space**), του norm γραμμικού χώρου V και συμβολίζεται με V^* , (όπως και ο αλγεβρικός δυϊκός χώρος).

Είναι αρκετά ενδιαφέρον να ανακαλύψουμε την φύση όλων των συνεχών γραμμικών συναρτησοειδών σ' ένα χώρο V. Αυτό βασικά σημαίνει να βρούμε την γενική μορφή ενός συνεχούς γραμμικού συναρτησοειδούς στον V. Θα εξετάσουμε αυτό το πρόβλημα στην πιο απλή αλλά και πιο σπουδαία περίπτωση όταν ο χώρος V είναι Hilbert χώρος.

Στη συνεχεία θα προσπαθήσουμε να κατασκευάσουμε τον δυϊκό χώρο ενός χώρου εσωτερικού γινομένου, (που δεν χρειάζεται προς το παρόν να είναι Hilbert χώρος).

Με την βοήθεια του εσωτερικού γινομένου $<|>$, και με ένα τυχαίο αλλά σταθερό διάνυσμα $g \in V$, ορίζουμε την απεικόνιση:

$$F: V \to C$$

$$F: x \mapsto F(x) \equiv <g|x> \quad \forall x \in V$$

Από τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου έπεται ότι η F είναι γραμμική. Είναι επίσης και συνεχής, διότι από την ανισότητα του Schwarz έχουμε:

$$|F(x)| = |<g|x>| \leq ||g||\ ||x|| \qquad (1)$$

Η σχέση (1) δείχνει ότι η F είναι φραγμένη και άρα συνεχής. Προχωρώντας μπορούμε να υπολογίσουμε την norm της F. Από την (1) έχουμε:

$$||F|| \leq ||g|| \qquad (2)$$

Θέτοντας όμως x=g έχουμε $|F(g)| = |<g|g>| = ||g||^2$. Έτσι βρήκαμε ένα διάνυσμα τέτοιο ώστε:

$$\frac{|F(g)|}{||g||} = ||g||$$

Άρα η σχέση (2) δεν μπορεί να ισχύει παρά μόνο με το ίσον. Τελικά έχουμε:

$$||F|| = ||g|| \qquad (3)$$

Είδαμε λοιπόν ότι *σ' ένα οποιονδήποτε χώρο εσωτερικού γινομένου κάθε διάνυσμα g παράγει ένα συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές F, του οποίου η norm ισούται με την norm του g. Το αντίστροφο ισχύει όταν ο χώρος του εσωτερικού γινομένου είναι χώρος Hilbert H. Το σπουδαίο αυτό γεγονός διατυπώνεται στο παρακάτω βασικό* ***θεώρημα του Riesz****, (Riesz representation theorem).*

Θεώρημα 4.1.4 Έστω F ένα τυχαίο συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές σ' ένα χώρο Hilbert H. Τότε υπάρχει ένα μοναδικό διάνυσμα $g \in H$ τέτοιο ώστε, για κάθε $x \in H$, $F(x) = <g|x>$. Επιπλέον $||F|| = ||g||$.

Απόδειξη: Επειδή ο χώρος H είναι διαχωρίσιμος υπάρχει μια αριθμήσιμη ορθοκανονική βάση $\{\cdots e_k \cdots\}$ έτσι ώστε για κάθε $x \in H$,

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k e_k$$

Έστω $v_n=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k e_k$. Επειδή το F είναι γραμμικό και συνεχές θα έχουμε:

$$F(v_n)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k F(e_k) \quad \text{και} \quad \lim_{n\to\infty} F(v_n)=F(\lim_{n\to\infty} v_n)=F\left(\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k e_k\right)$$

έτσι ώστε: $$F(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k F(e_k) \tag{1}$$

Το επόμενο βήμα είναι να δείξουμε ότι:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|F(e_k)\right|^2\langle\infty \tag{2}$$

Έστω $h_n\equiv\sum_{k=1}^{n}F^*(e_k)e_k$. Τότε από την (1) προκύπτει:

$$F(h_n)=\sum_{k=1}^{n}F^*(e_k)F(e_k)=\sum_{k=1}^{n}|F(e_k)|^2=||h_n||^2 \tag{3}$$

Επειδή το F είναι φραγμένο έχουμε:

$$|F(h_n)|^2\le ||F||^2||h_n||^2$$

και αντικαθιστώντας το $||h_n||^2$ από την (3) προκύπτει:

$$|F(h_n)|\le ||F||^2$$

και με την βοήθεια πάλι της (3) βλέπουμε ότι:

$$\sum_{k=1}^{n}|F(e_k)|^2 \le||F||^2$$

που συνεπάγεται ότι η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty}|F(e_k)|^2$$

συγκλίνει και επομένως το διάνυσμα

$$g=\sum_{k=1}^{\infty}F^*(e_k)e_k \tag{4}$$

υπάρχει, (δηλ. η σειρά συγκλίνει).

Στη συνέχεια μπορούμε να υπολογίσουμε το εσωτερικό γινόμενο:

$$<g|x>=\left\langle\sum_{k=1}^{\infty}F^*(e_k)e_k\,\middle|\,\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k e_k\right\rangle=\sum_{k=1}^{\infty}F(e_k)\alpha_k$$

και από τη σχέση (1) έχουμε:

$$F(x)=<g|x>$$

Έτσι βρήκαμε ένα διάνυσμα g, το οποίο αναπαραγάγει την τιμή του δεδομένου συναρτησοειδούς F για κάθε $x\in H$ με την βοήθεια του εσωτερικού γινομένου. Το διάνυσμα g είναι μοναδικό. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα άλλο διάνυσμα g' τέτοιο ώστε:

$$<g'|x>=F(x)=<g|x> \Rightarrow <g'-g|x>=0 \quad \forall x\in H \Rightarrow g'-g=0 \text{ δηλ. } g'=g$$

Τέλος εύκολα αποδεικνύεται από τα προηγούμενα ότι $||F||=||g||$

Αιτιολογία του όρου Δυϊκός χώρος. Είδαμε προηγουμένως ότι υπάρχει μια μοναδική ένα-προς-ένα και επί αντιστοιχία:

$$\varphi: H^* \to H$$

μεταξύ των συνεχών γραμμικών συναρτησοειδών επί του H και των διανυσμάτων του H, οριζόμενη από την σχέση:

$$\varphi: F\in H^* \to \varphi(F)=g \quad \forall F\in H^*$$

όπου το g ορίζεται από την απαίτηση:

$$F(x)=<g|x> \quad \forall x\in H$$

Ας εξετάσουμε τις ιδιότητες της φ.

α) Η φ είναι ισομετρία διότι $||\varphi(F)||=||g||=||F||$

β) Η φ είναι "σχεδόν" ένας ισομορφισμός δηλ. ένας αντιισομορφισμός.

Πράγματι:

$$(F_1+F_2)(x)=F_1(x)+F_2(x)=<g_1|x>+<g_2|x>=<g_1+g_2|x>$$

δηλ. ο γεννήτορας του F_1+F_2 είναι το g_1+g_2 . Αυτό σημαίνει ότι

$$\varphi(F_1+F_2)=g_1+g_2=\varphi(F_1)+\varphi(F_2).$$

Επιπλέον $\quad (\alpha F)(x)=\alpha F(x)=\alpha<g|x>=<\alpha^* g|x>$

δηλ. ο γεννήτορας του αF είναι το $\alpha^* g$. Αυτό σημαίνει ότι

$$\varphi(\alpha F)=\alpha^* g=\alpha^*\varphi(F)$$

δηλ. η απεικόνιση φ δεν είναι γραμμική αλλά αντιγραμμική. Τελικά μπορούμε να πούμε ότι η απεικόνιση φ είναι ένας ισομετρικός αντισομορφισμός μεταξύ των χώρων H και H^* . Εάν τώρα θεωρήσουμε την απεικόνιση φ' οριζόμενη από τη σχέση:

$$\varphi': H^* \to H$$

$$\varphi': F \to \varphi'(F)=C\varphi(F)]=C(g)$$

όπου C είναι η μιγαδική συζυγής απεικόνιση οριζόμενη πάνω στον χώρο H, δηλ.

$$C: H \to H$$

με τις ιδιότητες

$$C(x+y)=C(x)+C(y) \quad \text{και} \quad C(\alpha x)=\alpha^* C(x)$$

τότε βλέπουμε ότι η απεικόνιση φ' είναι ένας ισομετρικός ισομορφισμός. Αυτό μας επιτρέπει να πούμε ότι οι χώροι H και H^* όταν θεωρηθούν σαν τοπολογικοί διανυσματικοί χώροι, είναι αλγεβρικά και τοπολογικά ισοδύναμοι.

Συμβολισμός του Dirac: Συνεχίζοντας μπορούμε να δούμε ότι ο ισομετρικός ισομορφισμός φ′ δικαιολογεί πλήρως τον συμβολισμό του Dirac για τα εσωτερικά γινόμενα. Ένα "Dirac ket" |x> είναι ένα διάνυσμα του H. Ένα "Dirac bra" <y| σημαίνει ένα συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές πάνω στο H και συγκεκριμένα εκείνο που παράγεται από το διάνυσμα y≡|y>. Η τιμή αυτού του συναρτησοειδούς F_y ≡<y| στο διάνυσμα |x> δίνεται τυπικά από τον πολλαπλασιασμό του bra διανύσματος <y| επί του ket διανύσματος |x>:

$$F_y(x) \equiv \langle y||x\rangle \equiv \langle y|x\rangle$$

Μελετώντας περισσότερο την δομή του δυϊκού χώρου H^* μπορούμε να δούμε ότι ο H^* δεν είναι μόνο ένας πλήρης norm χώρος, (με norm $||F||=\sup|F(x)|$ για $||x||=1$), αλλά είναι ένας χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο:

$$\langle F_1|F_2\rangle \equiv \langle g_1|g_2\rangle$$

όπου F_1 και F_2 παράγονται από τα διανύσματα g_1 και g_2 αντίστοιχα. Ο ορισμός αυτός πληροί τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου. Έτσι έχουμε ένα χώρο εσωτερικού γινομένου με προκύπτουσα norm την:

$$||F|| = \sqrt{\langle F|F\rangle} = \sqrt{\langle g|g\rangle} = ||g||$$

η οποία, όπως είδαμε, καθιστά τον χώρο H^* πλήρη. Άρα ο χώρος H^* είναι χώρος Hilbert. Τελικά καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ο **δυϊκός χώρος** H^* **ενός οποιουδήποτε χώρου Hilbert** H **είναι ένας χώρος Hilbert ισομετρικά ισόμορφος με τον** H.

Εάν τώρα θεωρήσουμε το σύνολο όλων των συνεχών γραμμικών συναρτησοειδών πάνω στον H^*, προκύπτει ένας νέος χώρος Hilbert, ο "δεύτερος δυϊκός χώρος" H^{**} του H. Κάθε στοιχείο του H^{**} παράγεται από ένα στοιχείο του H^*, (δηλ. από ένα συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές πάνω στον H), και αντίστροφα. Υπάρχει επομένως ένας ισομετρικός αντιισομορφισμός:

$$f: H^{**} \rightarrow H^*$$

μεταξύ του δεύτερου και του πρώτου δυϊκού χώρου. Επειδή όμως η σύνθεση δυο αντιγραμμικών απεικονίσεων είναι γραμμική απεικόνιση, η σύνθεση δυο ένα-προς-ένα και επί είναι ένα-προς-ένα και επί, όπως και η σύνθεση δυο ισομετριών είναι ισομετρία, έπεται ότι η απεικόνιση:

$$\varphi f: H^{**} \rightarrow H$$

είναι ένας **ισομετρικός ισομορφισμός**. Έτσι οι χώροι H και H^{**} είναι ισοδύναμοι δηλ. ταυτίζονται ως προς την αλγεβρική και τοπολογική τους δομή, όπως επίσης και ως προς το εσωτερικό τους γινόμενο.

5 ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΟ ΤΗ ΦΑΣΜΑΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

5.1 Εισαγωγή

Το βασικό πρόβλημα, σ' ότι αφορά τις εφαρμογές της Κβαντομηχανικής και τις εφαρμογές της θεωρίας των τελεστών στην ανάλυση, αποτελείται από την λύση της εξίσωσης:

$$Ax=\lambda x \qquad (1)$$

ή της μη ομογενούς:

$$(A-\lambda I)x=y \qquad (2)$$

Το πρόβλημα αυτό παλιά εξεταζόταν στα πλαίσια των κλασικών Μαθηματικών και αποτελούσε συνήθως πρόβλημα λύσης διαφορικών ή ολοκληρωτικών εξισώσεων, που πληρούσαν ορισμένες οριακές συνθήκες. Μιλούσαμε τότε για ομογενές ή μη ομογενές πρόβλημα, ανάλογα των περιπτώσεων (1) ή (2) και για οριακό πρόβλημα πρώτου ή δεύτερου είδους, ανάλογα της μορφής των οριακών συνθηκών.

Μετά τον συμβιβασμό των δυο κατευθύνσεων της Κβαντομηχανικής, (Εικόνες Heisenberg-Schrödinger), και την ανάπτυξη που ακολούθησε της θεωρίας των τελεστών, το οριακό πρόβλημα στην κβαντική φυσική μετετράπηκε σε πρόβλημα μελέτης γραμμικών τελεστών σε χώρο Hilbert. Οι οριακές συνθήκες σε συνδυασμό με το όλο φυσικό πρόβλημα, αφ' ενός καθορίζουν την περιοχή ορισμού του τελεστή A, αφ' έτερου δε προσδίδουν σ' αυτόν χαρακτηριστικές ιδιότητες.

Αλλά όπως κάθε θεωρία έτσι και η θεωρία των τελεστών έχει τα όρια της. Το πρόβλημα του προσδιορισμού των ιδιοτιμών και ιδιοσυναρτήσεων παραμένει στη γενική του μορφή άλυτο. Γενικά θεωρήματα ύπαρξης είναι ελάχιστα. Εξ' αλλού από την πείρα γνωρίζουμε ότι άλλοτε υπάρχουν ιδιοτιμές και άλλοτε δεν υπάρχουν. Η ύπαρξη τους εξαρτάται και από τις ιδιότητες των τελεστών και από τον χώρο του Hilbert στον οποίο ορίζονται:

$$L_2(0,1)\,,\quad L_2(0,\infty)\,,\quad L_2(-\infty,+\infty).$$

Συνήθως συμβαίνει ο τελεστής που μελετάμε να αποτελείται από το άθροισμα δυο ή περισσότερων τελεστών, από τους οποίους γνωρίζουμε το **φάσμα**, (δηλ. το σύνολο των ιδιοτιμών), τουλάχιστον ενός. Η παραπέρα μελέτη του αρχικού τελεστή αποτελεί το πρόβλημα **της διαταραχής του φάσματος**, το οποίο από τη φύση του προϋποθέτει σαφή γνώση του φάσματος του διαταρασσομένου τελεστή.

Η μελέτη του φάσματος των τελεστών αποτελεί ένα ιδιαίτερο κεφαλαίο της Μαθηματικής Φυσικής και ονομάζεται **Φασματική θεωρία**.

Ο σκοπός της φασματικής θεωρίας είναι να αναλύσει την δομή και τον τρόπο με τον οποίο δρα ένας τελεστής A, ορισμένος σε κάποιο χώρο V. Η ανάλυση αυτή ξεκινάει με το να αποδώσουμε στον τελεστή A ένα συγκεκριμένο υποσύνολο των μιγαδικών αριθμών C, που ονομάζεται **φάσμα του τελεστή**. Από την γνώση του φάσματος μπορούμε να συναγάγουμε διάφορα συμπεράσματα, ιδίως αλγεβρικά, που σχετίζονται με την δράση του A, (και άλλων τελεστών, που συνδέονται στενά με τον A), πάνω σε υποσύνολα διανυσμάτων του χώρου V. Έτσι μπορούμε να έχουμε θεωρήματα για υπόχωρους, που είναι αναλλοίωτοι κάτω από τη δράση του A, για σύνολα διανυσμάτων που γεννούν αυτούς τους υπόχωρους, (ιδιοδιανύσματα), για την πληρότητα τέτοιων συνόλων ιδιοδιανυσμάτων, (επομένως θεωρήματα αναπτύξεως), και για την επίλυση ορισμένων διανυσματικών εξισώσεων, (αλγεβρικές ή ολοκληρωτικές εξισώσεις).

Σε ορισμένες περιπτώσεις μπορούμε να προχωρήσουμε περισσότερο και να βρούμε μια ανάλυση του τελεστή A, τέτοια που η δράση του πάνω στα διανύσματα του πεδίου ορισμού του να είναι αρκετά προφανής. Η ανάλυση αυτή του A ονομάζεται **φασματική αναπαράσταση** του A. Η κατασκευή αυτής της φασματικής αναπαράστασης του A συνεπάγεται βασικά την **φασματική σύνθεση** του A από απλούστερους τελεστές, που ο καθένας δρα σ' ένα χώρο μικρότερο από το πεδίο ορισμού του A.

Για την απλότητα του θέματος θα περιορισθούμε σε γραμμικούς τελεστές, που δρουν σ' ένα χώρο Hilbert, αν και πολλά από τα θεωρήματα μπορούν να επεκταθούν και σε χώρους Banach ή ακόμα και σε μη πλήρεις γραμμικούς χώρους με norm.

5.2 Το επιλύον σύνολο και το φάσμα ενός τελεστή

Το πρόβλημα της λύσης γραμμικών εξισώσεων, (διαφορικών ή ολοκληρωτικών), σ' ένα χώρο V με norm, όπως είπαμε παραπάνω, αποτελείται γενικά από την μελέτη της εξίσωσης:

$$(A-\lambda I)x=y \qquad (1)$$

ή της ομογενούς

$$Ax=\lambda x \qquad (2)$$

όπου A ένας γραμμικός τελεστής, I ο ταυτοτικός τελεστής, λ μιγαδικός αριθμός, y ένα γνωστό διάνυσμα του V και x το άγνωστο διάνυσμα, δηλ. η ζητούμενη λύση της (1) ή (2). Εάν υποθέσουμε ότι υπάρχει ο αντίστροφος του $A_\lambda=(A-\lambda I)$ και ότι ορίζεται παντού στον V, τότε η εξίσωση (1) λύνεται μονοσήμαντα $\forall y\in V$, δηλ, $x=A_\lambda^{-1}\,y$. Εάν επιπλέον γνωρίζουμε και πως δρα ο A_λ^{-1} πάνω σε κάθε διάνυσμα του V, τότε βρίσκουμε το ζητούμενο διάνυσμα x.

Ώστε ενδιαφερόμαστε κατ' αρχή να γνωρίζουμε για ποιους μιγαδικούς αριθμούς λ υπάρχει ο A_λ^{-1} και ορίζεται παντού. Επειδή σε πολλά προβλήματα το γνωστό διάνυσμα y δίνεται σε μορφή σειράς

$$y=\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n \text{ ή σαν το όριο ακολουθίας } y_n=\sum_{k=1}^{n} c_k e_k$$

που συγκλίνει στο y, ενδιαφερόμαστε επίσης ο A_λ^{-1} να έχει την ιδιότητα $A_\lambda^{-1}y_n \xrightarrow{s} A_\lambda^{-1}y$ δηλ. ενδιαφερόμαστε ο A_λ^{-1} να είναι συνεχής ή επειδή συνεχής γραμμικός τελεστής σημαίνει ισοδύναμα φραγμένος γραμμικός τελεστής, ενδιαφερόμαστε ο A_λ^{-1} να είναι και φραγμένος. Υπάρχουν επομένως ορισμένες δυνατότητες που μας οδηγούν στους εξής βασικούς ορισμούς:

Ορισμός 5.2.1: Το **επιλύον σύνολο** ρ(A) ενός γραμμικού τελεστή A αποτελείται από εκείνους τους μιγαδικούς αριθμούς $\lambda\in C$, για τους οποίους υπάρχει ο $A_\lambda^{-1}=(A-\lambda I)^{-1}$, έχει πυκνό πεδίο ορισμού, δηλ. $\overline{D\left(A_\lambda^{-1}\right)}=V$ και είναι φραγμένος, (ή συνεχής), δηλ.

$$\rho(A)=\left\{\ \lambda\in C\ /\ (A-\lambda I)^{-1} \text{ υπαρχει, ειναι φραγμενος και } \overline{D\left((A-\lambda I)^{-1}\right)}=V\ \right\}$$

Εάν $\lambda\in\rho(A)$, τότε το λ λέγεται **κανονική**, **(regular)**, **τιμή** του A ή **ομαλό σημείο**.

Ορισμός 5.2.2: Το **φάσμα** σ(A) ενός γραμμικού τελεστή A αποτελείται από όλους τους μιγαδικούς αριθμούς λ που δεν είναι κανονικές τιμές του A, δηλ. σ(A)=C-ρ(A). Εάν $\lambda\in\sigma(A)$, τότε λέμε ότι ο λ ανήκει στο φάσμα του A ή ότι το λ είναι μια **φασματική τιμή** του A.

Παρατήρηση 5.2.1: Εφ' όσον $\rho(A)\cup\sigma(A)=C$, τότε είναι προφανές ότι κάθε μιγαδικός αριθμός λ ή θα είναι ένα ομαλό σημείο ή θα είναι μια φασματική τιμή.

Παράδειγμα 5.2.1: Έστω V ένας πεπερασμένος μιγαδικός διανυσματικός χώρος με dimV=n. Τότε, όπως είναι γνωστό, κάθε γραμμικός τελεστής A μπορεί να παρασταθεί από έναν πίνακας n×n, όπως επίσης και ο $A_\lambda=A-\lambda I$. Από την γραμμική άλγεβρα ξέρουμε ότι ο πίνακας A_λ^{-1} υπάρχει εάν και μόνο εάν η ορίζουσα

$$\det(A_\lambda)=\det(A-\lambda I)\neq 0$$

Εάν ο A_λ^{-1} υπάρχει, τότε είναι φραγμένος και το πεδίο ορισμού του είναι όλος ο χώρος[33]. Επομένως όλα τα λ, για τα οποία $\det(A_\lambda)\neq 0$, είναι ομαλά σημεία και το φάσμα του A αποτελείται από τις λύσεις της εξίσωσης $\det(A_\lambda)=0$. Εφ' όσον $\det(A_\lambda)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n ως προς λ, η εξίσωση $\det(A_\lambda)=0$ θα έχει οπωσδήποτε λύση, (το πολύ n διαφορετικές). Άρα $\sigma(A)\neq\varnothing$.

Παρατήρηση 5.2.2: Εάν ο διανυσματικός χώρος είναι πραγματικός, τότε υπάρχει περίπτωση $\sigma(A)=\varnothing$, όπως π.χ. συμβαίνει για τον τελεστή:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

για τον οποίο έχουμε ότι:

$$\det(A_\lambda)=\begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}=\lambda^2+1$$

και η εξίσωση $\det(A_\lambda)=\lambda^2+1=0$ δεν έχει πραγματική λύση.

Από τον ορισμό του φάσματος σ(A) ενός τελεστή είναι προφανές ότι υπάρχουν τρεις διαφορετικές κατηγορίες για τα $\lambda\in\sigma(A)$:

α) Εάν ο A_λ δεν έχει αντίστροφο, τότε λέμε ότι το λ ανήκει στο **σημειακό φάσμα**, που συμβολίζεται με Pσ(A), δηλ.

$$P\sigma(A)=\left\{\ \lambda\in C\ /\ (A-\lambda I)^{-1}\ \text{δεν υπαρχει}\ \right\}$$

β) Εάν ο A_λ έχει αντίστροφο A_λ^{-1}, που δεν είναι φραγμένος, (ή συνεχής), αλλά το $\overline{D\left(A_\lambda^{-1}\right)}=V$, τότε λέμε ότι το λ ανήκει στο **συνεχές φάσμα**, που συμβολίζεται με Cσ(A), δηλ.

$$C\sigma(A)=\left\{\ \lambda\in C/(A-\lambda I)^{-1}\ \text{υπαρχει,αλλα δεν ειναι φραγμενος και}\ \overline{D\left((A-\lambda I)^{-1}\right)}=V\right\}$$

γ) Εάν ο A_λ έχει αντίστροφο A_λ^{-1}, (ο οποίος μπορεί να είναι ή όχι φραγμένος), αλλά $\overline{D\left(A_\lambda^{-1}\right)}\neq V$, τότε λέμε ότι το λ ανήκει στο **υπόλοιπο φάσμα**, που συμβολίζεται με Rσ(A), δηλ.

---

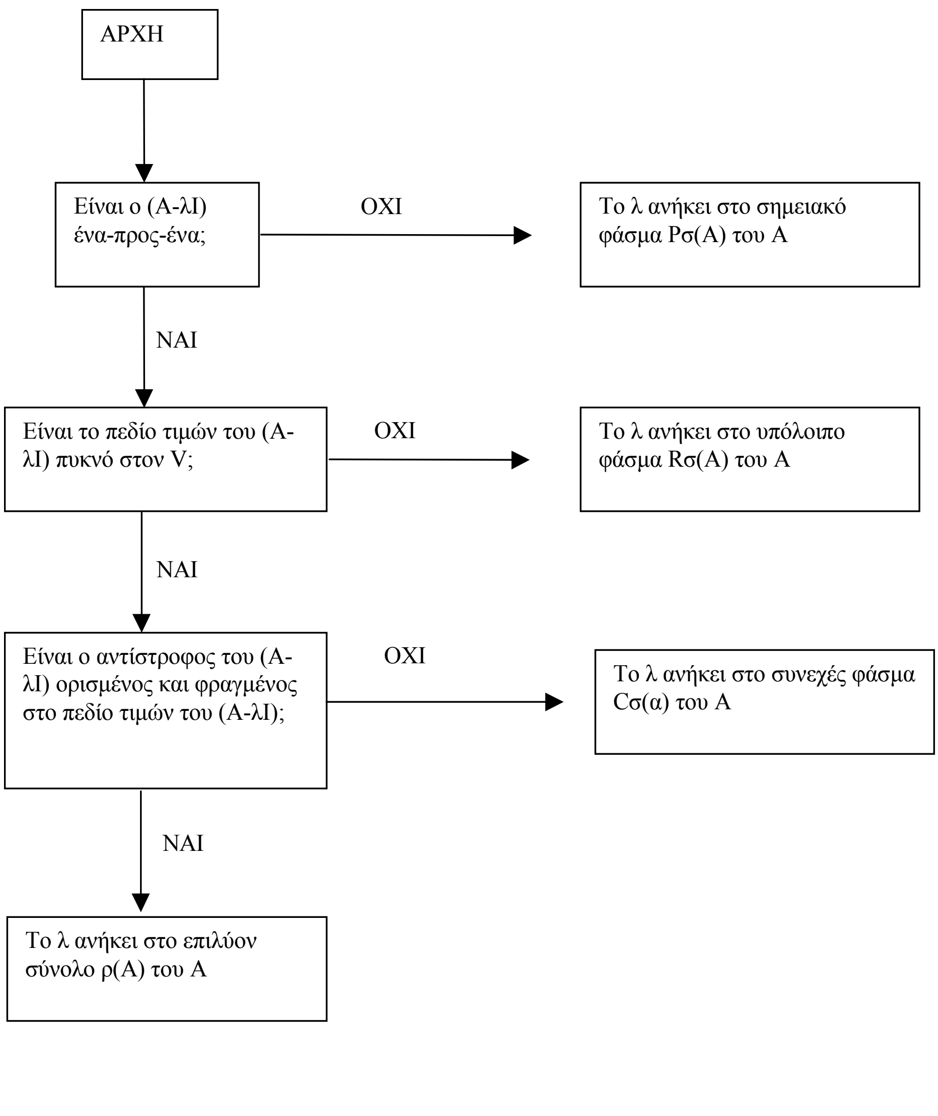
[33] Κάθε τελεστής σε πεπερασμένο διανυσματικό χώρο είναι φραγμένος και ορίζεται σ' όλο τον χώρο.

$$R\sigma(A) = \left\{ \lambda \in C / (A-\lambda I)^{-1} \text{ υπαρχει, ειναι ή οχι φραγμενος αλλα } \overline{D\left((A-\lambda I)^{-1}\right)} \neq V \right\}$$

Στον παρακάτω πίνακα περιέχονται όλες οι δυνατές περιπτώσεις, που μπορούν να συμβούν για τους μιγαδικούς αριθμούς λ, σχετικά με το φάσμα ενός τελεστή A.

$R(A_\lambda)=D(A_\lambda^{-1})$ / A_λ^{-1}	**V**	**Πυκνό≠V**	**Όχι πυκνό**
Δεν υπάρχει	Pσ(A)	Pσ(A)	Pσ(A)
Υπάρχει μη φραγμένος	Cσ(A)	Cσ(A)	Rσ(A)
Υπάρχει φραγμένος	ρ(A)	ρ(A)	Rσ(A)

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΡΟΗΣ ΓΙΑ ΤΟ ΕΠΙΛΥΟΝ ΣΥΝΟΛΟ ΚΑΙ ΤΟ ΦΑΣΜΑ ΕΝΟΣ ΤΕΛΕΣΤΗ



Παρατήρηση 5.2.3: Είναι φυσικό από τα παραπάνω ότι τα σύνολα ρ(A), Pσ(A), Cσ(A), Rσ(A) είναι ξένα μεταξύ τους και η ένωση τους είναι όλο το μιγαδικό επίπεδο. Έτσι η ταξινόμηση των μιγαδικών αριθμών ως προς τα παραπάνω σύνολα είναι μοναδική και αμοιβαία αποκλειστική.

Όπως θα φανεί αμέσως παρακάτω, το πιο ενδιαφέρον μέρος του φάσματος είναι το σημειακό, το οποίο θα μελετήσουμε πρώτα.

Ας υποθέσουμε ότι $\lambda\in P\sigma(A)$, τότε από τον ορισμό του Pσ(A) ο τελεστής $(A-\lambda I)^{-1}$ δεν υπάρχει και αυτό συμβαίνει εάν ο τελεστής (A-λI) δεν είναι ένα-προς-ένα ή ισοδύναμα ο πυρήνας Ker[(A-λI)] δεν αποτελείται μόνο από το μηδενικό διάνυσμα. Επομένως υπάρχει τουλάχιστον ένα διάνυσμα $x\neq 0$ με $x\in D(A)$ έτσι ώστε:

$$(A-\lambda I)x=0$$

Αντίθετα, εάν $\lambda\notin P\sigma(A)$, τότε η παραπάνω εξίσωση έχει μόνο την τετριμμένη λύση x=0. Τα παραπάνω διατυπώνονται με το εξής θεώρημα.

Θεώρημα 5.2.1: Η εξίσωση Ax=λx έχει μια μη τετριμμένη λύση εάν και μόνο εάν το λ ανήκει στο σημειακό φάσμα Pσ(A).

Ορισμός 5.2.3: Ένας μιγαδικός αριθμός λ, για τον οποίο η εξίσωση Ax=λx έχει μη τετριμμένη λύση, ονομάζεται **ιδιοτιμή**, (ή **χαρακτηριστική τιμή**) του A. Επί πλέον όλα τα μη μηδενικά διανύσματα $x\in D(A)$, που ικανοποιούν την εξίσωση Ax=λx, ονομάζονται **ιδιοδιανύσματα**, (ή **χαρακτηριστικά διανύσματα**), του A που ανήκουν στην ιδιοτιμή λ. Η διάσταση του χώρου, που γεννούν τα ιδιοδιανύσματα x, ονομάζεται **γεωμετρική πολλαπλότητα** ή **βαθμός εκφυλισμού** της ιδιοτιμής λ. Εάν ο βαθμός εκφυλισμού είναι μεγαλύτερος του ένα, η ιδιοτιμή λ λέγεται **εκφυλισμένη**.

Παρατήρηση 5.2.5: Από το θεώρημα 5.2.1 έχουμε ότι το σημειακό φάσμα Pσ(A) αποτελείται ακριβώς από όλες τις ιδιοτιμές του A. Αυτό σημαίνει ότι το σημειακό φάσμα Pσ(A) μπορεί να βρεθεί "λύνοντας την εξίσωση ιδιοτιμών" Ax=λx.

Παρατήρηση 5.2.6: Η εύρεση του σημειακού φάσματος ενός τελεστή, (δηλ.των ιδιοτιμών), είναι καθαρά αλγεβρικό πρόβλημα, ενώ η εύρεση του συνεχούς και του υπόλοιπου φάσματος κάθε άλλο παρά αλγεβρικό πρόβλημα είναι, και αυτό διότι εμφανίζονται πολύπλοκα τοπολογικά προβλήματα, (σχετικά με τις έννοιες του πυκνού συνόλου και του φραγμένου τελεστή).

Παρατήρηση 5.2.7: Η έκφραση "σημειακό φάσμα", που αναφέρεται σαν ένας άλλος όρος για το σύνολο των ιδιοτιμών, μπορεί να οδηγήσει σε παραπλάνηση. Διότι γενικά το σημειακό φάσμα Pσ(A) δεν είναι απαραίτητο να αποτελείται μόνο από μεμονωμένα σημεία, ή με αλλά λόγια το σύνολο των ιδιοτιμών δεν είναι αναγκαία "διακεκριμένο", (ακόμα και αν ο όρος "διακεκριμένο φάσμα" χρησιμοποιείται συχνά για το σημειακό φάσμα). Επίσης το συνεχές φάσμα Cσ(A) δεν χρειάζεται να είναι μη αριθμήσιμο. Μπορεί να αποτελείται από ένα μόνο σημείο.

Παρατήρηση 5.2.8: Εάν ο τελεστής A είναι αυτοσυζυγής, $(A^{+}=A)$, τότε αποδεικνύεται ότι:

1) Δεν έχει υπόλοιπο φάσμα, $R\sigma(A)=\varnothing$.

2) Το σύνολο των ομαλών σημείων είναι ανοικτό σύνολο και επομένως το φάσμα είναι κλειστό σύνολο.

3) Το σημείο $\lambda\in C$ είναι ομαλό σημείο ενός αυτοσυζυγούς τελεστή A εάν και μόνο εάν υπάρχει α>0 έτσι ώστε:

$$||Ax-\lambda x||\geq \alpha \qquad \forall x\in D(A) \text{ με } ||x||=1$$

ή εάν και μόνο εάν $||Ax-\lambda x||\geq \alpha||x|| \quad \forall x\in D(A)$

4) Το λ ανήκει στο φάσμα ενός αυτοσυζυγούς τελεστή A εάν και μόνο εάν υπάρχει ακολουθία $x_n\in D(A)$ με $||x_n||=1$ έτσι ώστε:

$$||Ax_n-\lambda x_n|| \rightarrow 0 \text{ όταν } n\rightarrow\infty$$

(Περισσότερα για την περίπτωση αυτή βλέπε παρ. 5.6)

5) Εάν $\lambda=\alpha+i\beta$ με $\beta\neq 0$, (δηλ. ο λ δεν είναι πραγματικός), τότε αποδεικνύεται ότι το λ είναι ομαλό σημείο για κάθε αυτοσυζυγή τελεστή.

5.3 Γενίκευση της έννοιας της ιδιοτιμής

Έστω A ένας γραμμικός τελεστής, και ας υποθέσουμε ότι υπάρχει από το πεδίο ορισμού του, D(A), μια ακολουθία μοναδιαίων διανυσμάτων $(x_n)_{n\in N}$ με $||x_n||=1$, $x_n\in D(A)$ και τέτοια ώστε:

$$\lim_{n\rightarrow\infty}(A-\lambda I)x_n=0$$

για κάποιο $\lambda\in C$. Τότε το λ ονομάζεται **γενικευμένη ιδιοτιμή** του A ή ότι ανήκει στο **προσεγγιστικό σημειακό φάσμα** του A.

Παρατήρηση 5.3.1: Είναι φανερό ότι εάν το λ ανήκει στο σημειακό φάσμα, (δηλ. εάν είναι μια ιδιοτιμή), τότε ικανοποιεί την παραπάνω σχέση. Γενικά όμως η έννοια της γενικευμένης ιδιοτιμής είναι πιο ευρεία.

Εάν ο χώρος, στον οποίο ο A ορίζεται, δεν είναι πλήρης, τότε μια γενικευμένη ιδιοτιμή, όπως ορίσθηκε παραπάνω, δεν χρειάζεται να ανήκει στο φάσμα του A.

Εάν όμως ο A είναι ένας τελεστής σε Banach ή Hilbert χώρο, τότε μπορεί να δειχθεί ότι κάθε γενικευμένη ιδιοτιμή ανήκει σε κάποιο μέρος του φάσματος.

Από την άλλη μεριά το σύνολο των γενικευμένων ιδιοτιμών δεν εξαντλεί αναγκαστικά το φάσμα.

Εκείνα τα στοιχεία του υπόλοιπου φάσματος $R\sigma(A)$ για τα οποία υπάρχει και είναι φραγμένος ο τελεστής $A_\lambda^{-1}=(A-\lambda I)^{-1}$, αλλά το πεδίο ορισμού του δεν είναι πυκνό, (δηλ. ανήκει στη τρίτη στήλη και στη τρίτη σειρά του σχετικού πίνακα), δεν μπορούν να χαρακτηρισθούν σαν γενικευμένες ιδιοτιμές.

Επίσης μπορεί να αποδειχθεί ότι εάν λ είναι μια γενικευμένη ιδιοτιμή, τότε

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists x\in D(A))\left[\ ||(A-\lambda I)x||<\varepsilon\ \right]$$

Το διάνυσμα x ονομάζεται "**προσεγγιστικό ιδιοδιάνυσμα**".

Επίσης υπάρχει και ο ορισμός του **γενικευμένου ιδιοδιανύσματος** τάξης k, που ορίζεται από την σχέση:

$$(A-\lambda I)^k x=0 \text{ με } (A-\lambda I)^{k-1}x\neq 0.$$

5.4. Παραδείγματα Φασμάτων

Παράδειγμα 5.4.1: Έστω H ένας χώρος Hilbert και E ο τελεστής που προβάλλει στον υπόχωρο $M\subset H$. Εδώ έχουμε $D(E)=H$ και το φάσμα του E αποτελείται από δυο ιδιοτιμές $\lambda=\{0,1\}$. Πιο συγκεκριμένα:

$$P\sigma(E)=\{0,1\} \qquad R\sigma(E)=\varnothing$$

$$C\sigma(E)=\varnothing \qquad \rho(E)=C-\{0,1\}$$

Απόδειξη: Για να βρούμε το επιλύον σύνολο $\rho(E)$ και το φάσμα $\sigma(E)$ πρέπει να μελετήσουμε τον τελεστή E-λI. Για να δούμε πότε ο E-λI δεν έχει αντίστροφο, πρέπει να ελέγξουμε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση $(E-\lambda I)x=0$ έχει και μη τετριμμένη λύση. Κάθε διάνυσμα $x\in H$ μπορεί να γράφει σαν $x=x_1+x_2$ με $x_1\in M$ και $x_2\in M^{\perp}$, όπου ο χώρος $M^{\perp}$ ορίζεται:

$$M^{\perp}=\{\, y\in H \,/\, \langle y|x\rangle=0 \ \forall x\in M \,\}$$

και ονομάζεται **ορθογώνιος υπόχωρος** ως προς τον M.

Η εξίσωση $(E-\lambda I)x=0$ γράφεται:

$$E(x_1+x_2)-\lambda(x_1+x_2)=0 \ \Rightarrow\ x_1-\lambda x_1-\lambda x_2=0 \ \Rightarrow\ (1-\lambda)x_1-\lambda x_2=0$$

και για να υπάρχει μη τετριμμένη λύση θα πρέπει λ=1 ή λ=0, όποτε για λ=1 οποιοδήποτε διάνυσμα x με $x_2=0$ είναι μια λύση και για λ=0 οποιοδήποτε διάνυσμα x με $x_1=0$ είναι μια λύση. Άρα ο τελεστής (E-λI) δεν έχει αντίστροφο για τις τιμές του λ: λ=0 και λ=1, οι οποίες είναι οι ιδιοτιμές του E με αντίστοιχους ιδιοχώρους $M^{\perp}$ και M. Και οι δυο ιδιοτιμές είναι εκφυλισμένες με βαθμό εκφυλισμού για την λ=0 $\dim M^{\perp}$ και για την λ=1 $\dim M$.

Τώρα για $\lambda\neq 0,1$ ο $(E-\lambda I)^{-1}$ υπάρχει. Προφανώς $R(E-\lambda I)=H \Rightarrow D((E-\lambda I)^{-1})=H$.

Επίσης ο $(E-\lambda I)^{-1}$ είναι φραγμένος. Πράγματι:

Έστω $z=z_1+z_2$, $y=y_1+y_2$, όπου $z_1, y_1\in M$ και $z_2, y_2\in M^{\perp}$. Θεωρούμε την εξίσωση:

$$(E-\lambda I)z=y \ \Rightarrow\ z_1-\lambda(z_1+z_2)=y_1+y_2 \ \Rightarrow\ z_1(1-\lambda)-\lambda z_2=y_1+y_2 \ \Rightarrow\ z_1=\frac{1}{1-\lambda}y_1 \quad \text{και} \quad z_2=\frac{-1}{\lambda}y_2$$

Επομένως από την σχέση $(E-\lambda I)z=y \ \Rightarrow\ (E-\lambda I)^{-1}y=z=z_1+z_2=\frac{1}{1-\lambda}y_1+\frac{-1}{\lambda}y_2$

και αν πάρουμε $\|y\|^2=\|y_1\|^2+\|y_2\|^2=1$ έχουμε:

$$\|(E-\lambda I)^{-1}\|=\sup_{\|y\|=1}\|(E-\lambda I)^{-1}y\|=\sup_{\|y\|=1}\left\|\frac{1}{1-\lambda}y_1-\frac{1}{\lambda}y_2\right\|\leq$$

$$\leq \sup_{\|y\|=1}\left[\frac{1}{|1-\lambda|}\|y_1\|+\frac{1}{|\lambda|}\|y_2\|\right]\leq \frac{1}{|1-\lambda|}+\frac{1}{|\lambda|}$$

Συμπέρασμα: Οι τιμές λ=0,1 ανήκουν στο σημειακό φάσμα και κάθε $\lambda\neq 0,1$ ανήκει στο επιλύον σύνολο.

Παράδειγμα 5.4.2 Έστω H ένας διαχωρίσιμος χώρος Hilbert και $(\lambda_k)_{k\in N}$ μια ακολουθία διακεκριμένων μιγαδικών αριθμών, τέτοιων ώστε $\lambda_k\neq 1$ $\forall k\in N$ και $\lim_{k\to\infty}\lambda_k=1$. Ορίζουμε τον τελεστή A:

$$Ae_k=\lambda_k e_k \qquad \forall k\in N$$

όπου $\{e_k\}$, $k=1\cdots\infty$ μια ορθοκανονική βάση του H, και τον επεκτείνουμε με την γραμμικότητα σ' όλο τον χώρο H. Έχουμε D(A)=H και A φραγμένος. Το φάσμα του A είναι:

$$P\sigma(A)=\{\lambda_k \,/\, k\in N\} \qquad R\sigma(A)=\varnothing$$

$$C\sigma(A)=\{1\} \qquad \rho(A)=C-P\sigma(A)-C\sigma(A)$$

<u>Απόδειξη</u>:

α) Ο τελεστής A είναι φραγμένος διότι εάν

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k e_k \quad \text{με} \quad \|x\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|^2=1$$

τότε
$$\|Ax\|^2=\left\|\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\lambda_k e_k\right\|^2 \le \sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k\lambda_k|^2$$

αλλά η ακολουθία λ_k είναι φραγμένη σαν συγκλίνουσα, επομένως υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε $|\lambda_k|^2 < c \quad \forall k\in N$. Άρα $\|Ax\|^2\le c\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|^2=c$

β) Ο αντίστροφος τελεστής $(A-\lambda I)^{-1}$ υπάρχει για $\lambda\neq\lambda_k$. Πράγματι: Είναι προφανές ότι κάθε λ_k είναι μια ιδιοτιμή με e_k το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα. Για να ελέγξουμε τους υπόλοιπους μιγαδικούς αριθμούς $\lambda\neq\lambda_k$ παίρνουμε $x=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k e_k$ και έχουμε:

$$(A-\lambda I)x=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\left(\lambda_k-\lambda\right)e_k \tag{1}$$

Το δεξιό μέλος της (1) μπορεί να είναι το μηδενικό διάνυσμα 0 μόνο εάν $\alpha_k(\lambda_k-\lambda)=0 \ \forall k$, αλλά επειδή $\lambda\neq\lambda_k$ θα πρέπει $\alpha_k=0 \ \forall k$ δηλ. x=0. Επομένως για $\lambda\neq\lambda_k$ έχουμε μόνο την τετριμμένη μηδενική λύση και το λ, (που είναι $\neq\lambda_k$), δεν μπορεί να είναι ιδιοτιμή. Με αλλά λόγια ο τελεστής $(A-\lambda I)^{-1}$ υπάρχει για $\lambda\neq\lambda_k$.

γ) Θα εξετάσουμε τώρα το πεδίο ορισμού $D((A-\lambda I)^{-1})$ ή ισοδύναμα το πεδίο τιμών $R(A-\lambda I)$ εάν είναι πυκνό. Παρατηρούμε ότι τα διανύσματα της ορθοκανονικής βάσης $e_k\in R(A-\lambda I)$ διότι

$$(\forall e_k)(\exists x_k)\big[\,(A-\lambda I)x_k=e_k\,\big]$$

Πράγματι εάν πάρουμε

$$x_k=\frac{1}{\lambda_k-\lambda}e_k \ \text{ έχουμε } \ (A-\lambda I)\,\frac{1}{\lambda_k-\lambda}e_k=\frac{1}{\lambda_k-\lambda}(Ae_k-\lambda e_k)=\frac{\lambda_k-\lambda}{\lambda_k-\lambda}e_k=e_k$$

Επομένως το $R(A-\lambda I)=D((A-\lambda I)^{-1})$ είναι πυκνό, (διότι τα διανύσματα $x_n=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k e_k \in R(A-\lambda I)$ και κάθε $x\in H$ είναι το όριο κάποιας ακολουθίας διανυσμάτων x_n της παραπάνω μορφής). Στην πραγματικότητα $R(A-\lambda I)=H$, διότι οποιοδήποτε $y\in H$ με $y=\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k e_k$ και $<\infty$ μπορεί να προέλθει από κάποιο $x=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k e_k$ με την επίδραση του τελεστή $(A-\lambda I)$ διαλέγοντας $\alpha_k=\beta_k/(\lambda_k-\lambda)$, (βέβαια $\lambda\neq\lambda_k$). Πράγματι:

$$(A\text{-}\lambda I)x=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k(\lambda_k-\lambda)e_k=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_k}{\lambda_k-\lambda}(\lambda_k-\lambda)e_k=\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k e_k=y$$

δ) Στη συνεχεία θα εξετάσουμε για ποιες τιμές του λ ο τελεστής $(A\text{-}\lambda I)^{-1}$ είναι φραγμένος. Από την σχέση (1) και για $\alpha_k=\beta_k/(\lambda_k\text{-}\lambda)$ έχουμε:

$$\left(A-\lambda I\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_k}{\lambda_k-\lambda}e_k=\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k e_k=y\;\Rightarrow\;(A\text{-}\lambda I)^{-1}y=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_k}{\lambda_k-\lambda}e_k\;\Rightarrow$$

$$\|(A\text{-}\lambda I)^{-1}\|^2=\sum_{k-1}^{n}\frac{|\beta_k|^2}{|\lambda_k-\lambda|^2}$$

Διακρίνουμε 2 περιπτώσεις:

i) Εάν λ=1 τότε $|\lambda_k\text{-}\lambda|\to 0$ και $\displaystyle\sum_{k-1}^{n}\frac{|\beta_k|^2}{|\lambda_k-\lambda|^2}\to\infty$

Επομένως η τιμή λ=1 ανήκει στο συνεχές φάσμα

ii) Εάν $\lambda\neq 1$, (και φυσικά $\lambda\neq\lambda_k$), τότε $|\lambda_k\text{-}\lambda|\geq\delta\ \forall k$ και θα έχουμε:

$$\|(A\text{-}\lambda I)^{-1}y\|^2\leq\frac{1}{\delta^2}\sum_{k=1}^{\infty}|\beta_k|^2=\frac{1}{\delta^2}\|y\|^2$$

δηλ. ο $(A\text{-}\lambda I)^{-1}$ είναι φραγμένος και το λ ανήκει στο επιλύον σύνολο.

Παρατήρηση 5.4.1: Το σημειακό και συνεχές φάσμα είναι διακεκριμένα. Το πρώτο είναι άπειρο σε πλήθος αλλά αριθμήσιμο, το δεύτερο είναι μονοσύνολο. Η τιμή λ=1 είναι γενικευμένη ιδιοτιμή, διότι για την ακολουθία e_k έχουμε:

$$(A\text{-}I)e_k=(\lambda_k\text{-}1)e_k\to 0 \quad \text{επειδή} \quad \lambda_k\to 1 \quad \text{όταν } k\to\infty$$

Παράδειγμα 5.4.3: Έστω H ένας διανυσματικός χώρος Hilbert και ορίζουμε τον τελεστή B:

$$Be_k=\frac{1}{k+1}e_{k+1} \qquad \forall k\in N$$

όπου $\{e_k\}$, $k=1\cdots\infty$ μια ορθοκανονική βάση του H. Είναι προφανές ότι ο B μπορεί να επεκταθεί με την γραμμικότητα σ' ένα φραγμένο τελεστή σ' όλο τον H. Το φάσμα του B είναι:

$$P\sigma(B)=\varnothing \qquad R\sigma(B)=0$$

$$C\sigma(B)=\varnothing \qquad \rho(B)=C\text{-}\{0\}$$

Το μηδέν είναι γενικευμένη ιδιοτιμή

Παράδειγμα 5.4.4: Έστω Q ο τελεστής θέσης στον χώρο $L(-\infty,+\infty)$. Το φάσμα του είναι

$$P\sigma(Q)=\varnothing \qquad R\sigma(Q)=\varnothing$$

$$C\sigma(Q)=R \qquad \rho(Q)=C\text{-}R$$

<u>Απόδειξη</u>: Η εξίσωση ιδιοτιμών:

$$Qf(x)=\lambda f(x)\;\Leftrightarrow\;(x\text{-}\lambda)f(x)=0$$

για κάθε $\lambda\in C$ έχει σαν λύση f(x)=0, (σχεδόν παντού), δηλ. την τετριμένη μηδενική λύση.

Άρα το σημειακό φάσμα είναι το κενό σύνολο $P\sigma(Q)=\varnothing$ και επομένως για κάθε λ υπάρχει ο αντίστροφος τελεστής $(Q-\lambda I)^{-1}$.

Στη συνέχεια πρέπει να βρούμε α) το πεδίο ορισμού του τελεστή $(Q-\lambda I)^{-1}$ και β) να εξετάσουμε εάν ο τελεστής $(Q-\lambda I)^{-1}$ είναι φραγμένος.

α) Έστω f(x) μια συνάρτηση, που ανήκει στο πεδίο ορισμού του τελεστή Q-λI, δηλ. στο πεδίο ορισμού του Q. Τότε θα έχουμε $(Q-\lambda I)f(x)=(x-\lambda)f(x)\equiv g(x)$. Η συνάρτηση g(x) πρέπει να ανήκει στον χώρο $L^2(-\infty,+\infty)$, δηλ. να είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη, όπως τετραγωνικά ολοκληρώσιμη πρέπει να είναι και η συνάρτηση $f(x)=g(x)/(x-\lambda)$. Επομένως το πεδίο τιμών του τελεστή (Q-λI), δηλ. το πεδίο ορισμού του $(Q-\lambda I)^{-1}$ είναι το σύνολο των συναρτήσεων $g(x)\in L^2$ και επίσης $g(x)/(x-\lambda)\in L^2$.

β) Για να δούμε εάν ο τελεστής $(Q-\lambda I)^{-1}$ είναι φραγμένος ή όχι, πρέπει να ελέγξουμε πότε το πεδίο ορισμού $D(Q-\lambda I)^{-1}$ είναι πυκνό ή όλος ο χώρος L^2. Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις ανάλογα εάν το λ είναι πραγματικός ή μιγαδικός αριθμός.

i) Εάν $\lambda\in R$, τότε το πεδίο ορισμού $D(Q-\lambda I)^{-1}$ είναι πυκνό και γνήσιο υποσύνολο του L^2 και ο τελεστής $(Q-\lambda I)^{-1}$ δεν είναι φραγμένος.

<u>Απόδειξη</u>: Θεωρούμε το σύνολο Α των συναρτήσεων $g(x)\in L^2(x)$ με την ιδιότητα $g(x)/(x-\lambda)\in L^2$. Θα αποδείξουμε ότι το σύνολο Α είναι πυκνό ως προς το L^2. Θα πρέπει δηλ. να αποδείξουμε ότι οποιαδήποτε συνάρτηση f(x) του συνόλου L^2 μπορεί να προσεγγιστεί από μια ακολουθία συναρτήσεων $g_n(x)$ στοιχείων του Α. Έστω $f(x)\in L^2$ και κατασκευάζουμε την ακολουθία $g_n(x)$ από την σχέση:

$$g_n(x)=\begin{cases} 0 & \text{εάν } \lambda-\dfrac{1}{n}\le x\le \lambda+\dfrac{1}{n} \\ f(x) & \text{αλλοιώς} \end{cases}$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι οι όροι της ακολουθίας αυτής είναι συναρτήσεις που ανήκουν στο σύνολο Α. Επίσης παρατηρούμε ότι:

$$\|g_n(x)-f(x)\|^2=\int_{\lambda-1/n}^{\lambda+1/n}|f(x)|^2\,dx\ \to 0 \ \text{ όταν } n\to\infty$$

Από την τελευταία σχέση συμπεραίνουμε ότι κάθε συνάρτηση $f(x)\in L^2$ μπορεί να προσεγγιστεί με οποιαδήποτε ακρίβεια θέλουμε από κάποιον όρο $g_n(x)$ της παραπάνω ακολουθίας. Από την άλλη πλευρά υπάρχουν συναρτήσεις του αρχικού χώρου L^2 που δεν ανήκουν στο πεδίο ορισμού του τελεστή $(Q-\lambda I)^{-1}$ π.χ. η συνάρτηση:

$$h(x)=\begin{cases} 1 & \text{εαν } \lambda-\alpha\le x\le\lambda+\alpha \quad (\alpha \text{ τυχαιο}) \\ 0 & \text{αλλοιως} \end{cases}$$

είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη, αλλά η συνάρτηση $h(x)/(x-\lambda)$ δεν είναι. Αυτό αποδεικνύει ότι $\overline{D(Q-\lambda I)^{-1}}=L^2$ αλλά $D(Q-\lambda I)^{-1}\neq L^2$

Για να αποδείξουμε τώρα ότι ο τελεστής $(Q-\lambda I)^{-1}$ δεν είναι φραγμένος παρατηρούμε πρώτα ότι για κάθε συνάρτηση g(x) έχουμε:

$$(Q-\lambda I)^{-1}g(x)=\frac{g(x)}{x-\lambda} \quad \text{διότι} \quad (Q-\lambda I)\,\frac{g(x)}{x-\lambda}=g(x)$$

και επομένως $\|(Q\text{-}\lambda I)^{-1}g(x)\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|g(x)|^2}{|x-\lambda|^2}dx$

και το δεξιό μέλος της παραπάνω σχέσης μπορεί να γίνει οσοδήποτε μεγάλο σε σχέσει με το μέτρο $\|g(x)\|^2$. Π.χ. εάν θεωρήσουμε την ακολουθία:

$$g_n(x)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{3n^3}{2}}\left(x-\lambda\right) & \text{εαν } \lambda-\dfrac{1}{n}\leq x\leq \lambda+\dfrac{1}{n}\\ 0 & \text{αλλοιως}\end{cases}$$

Για κάθε n έχουμε $\|g_n(x)\|^2=1$ όπου το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|g_n(x)|^2}{|x-\lambda|^2}dx = 3n^2 \to \infty$ όταν $n\to\infty$

Επομένως ο τελεστής $(Q\text{-}\lambda I)^{-1}$ δεν είναι φραγμένος.

Τελικά το λ ανήκει στο συνεχές φάσμα όταν είναι πραγματικός αριθμός.

ii) Εάν $\lambda\in C\text{-}R$, τότε το πεδίο ορισμού $D(Q\text{-}\lambda I)^{-1}=L^2$ και ο τελεστής $(Q\text{-}\lambda I)^{-1}$ είναι φραγμένος, δηλαδή το λ ανήκει στο επιλύον σύνολο ρ(Q).

Απόδειξη: Εάν το λ δεν είναι πραγματικός αριθμός, τότε για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό x η απόσταση $|x\text{-}\lambda|$ ποτέ δεν μηδενίζεται. Επομένως υπάρχει $\delta>0$ έτσι ώστε $|x\text{-}\lambda|\geq\delta$ $\forall x\in R$. Εάν τώρα θεωρήσουμε μια τετραγωνικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση $g(x)\in L^2$ βλέπουμε ότι:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|g(x)|^2}{|x-\lambda|^2}dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|g(x)|^2}{\delta^2}dx = \frac{1}{\delta^2}\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x)|^2\,dx < \infty$$

δηλ. η συνάρτηση $g(x)/(x\text{-}\lambda)$ είναι και αυτή τετραγωνικά ολοκληρώσιμη. Επομένως $D(Q\text{-}\lambda I)^{-1}=L^2$. Για να δείξουμε τώρα ότι ο τελεστής $(Q\text{-}\lambda I)^{-1}$ είναι φραγμένος υπενθυμίζουμε ότι

$$(Q\text{-}\lambda I)^{-1}g(x)=\frac{g(x)}{x-\lambda}$$

και έχουμε $\|(Q\text{-}\lambda I)^{-1}g(x)\|^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|g(x)|^2}{|x-\lambda|^2}dx \leq \frac{1}{\delta^2}\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x)|^2\,dx = \frac{1}{\delta^2}\|g(x)\|^2$

Η τελευταία σχέση δείχνει ότι ο τελεστής $(Q\text{-}\lambda I)^{-1}$ είναι φραγμένος. Τελικά το λ ανήκει στο επιλύον σύνολο ρ(Q) όταν δεν είναι πραγματικός αριθμός.

Συμπέρασμα: *Το φάσμα του τελεστή Q είναι συνεχές. Κάθε πραγματικός αριθμός λ ανήκει στο συνεχές φάσμα και κάθε μη πραγματικός αριθμός ανήκει στο επιλύον σύνολο*:

Εάν $\lambda\in R \;\to\; \lambda\in C\sigma(Q)$

Εάν $\lambda\in C\text{-}R \to \lambda\in \rho(Q)$

Οι πραγματικοί αριθμοί που αποτελούν το συνεχές φάσμα είναι γενικευμένες ιδιοτιμές.

Πράγματι: Θεωρούμε την ακολουθία των συναρτήσεων με $\lambda\in R$:

$$h_n(x)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{n}{2}} & \text{εαν } \lambda-\dfrac{1}{n}\le x\le \lambda+\dfrac{1}{n}\\[2em] 0 & \text{αλλου}\end{cases}$$

Προφανώς κάθε $h_n(x)\in D(Q)$ και $||h_n(x)||=1$. Πράγματι:

$$||h_n(x)||^2=\int_{-\infty}^{+\infty}|h_n(x)|^2\,dx=\int_{\lambda-\frac{1}{n}}^{\lambda+\frac{1}{n}}\frac{n}{2}dx=\frac{n}{2}\left(\lambda+\frac{1}{n}-\lambda+\frac{1}{n}\right)=\frac{n}{2}\left(\frac{2}{n}\right)=1$$

Επιπλέον η ακολουθία: $y_n=(Q-\lambda I)h_n(x)$ που ορίζεται από την σχέση:

$$y_n(x)=\begin{cases}(x-\lambda)\sqrt{\dfrac{n}{2}} & \text{εαν } \lambda-\dfrac{1}{n}\le x\le \lambda+\dfrac{1}{n}\\[2em] 0 & \text{αλλου}\end{cases}$$

συγκλίνει στο μηδενικό διάνυσμα, (μηδενική συνάρτηση), διότι

$$||y_n(x)||^2=\int_{-\infty}^{+\infty}|y_n(x)|^2\,dx=\frac{n}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}|x-\lambda|^2\,dx\le\frac{n}{2}\int_{\lambda-\frac{1}{n}}^{\lambda+\frac{1}{n}}\frac{1}{n^2}dx=\frac{1}{n^2}\xrightarrow{n\to\infty}0$$

Άρα το λ είναι γενικευμένη ιδιοτιμή.

Παρατήρηση 5.4.1: Η ακολουθία των συναρτήσεων $h_n(x)$ προσεγγίζει την δέλτα συνάρτηση δ(x-λ) του Dirac <u>και αυτός είναι ο λόγος που ονομάζουμε, (καταχρηστικά), τον πραγματικό αριθμό λ "ιδιοτιμή" του Q με αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση την δ(x-λ).</u>

Παρατήρηση 5.4.2: Εάν ο τελεστής Q περιορισθεί στον χώρο $L^2(\alpha,\beta)$, τότε είναι φραγμένος, αλλά το συνεχές φάσμα αποτελείται μόνο από τους πραγματικούς αριθμούς που ανήκουν στο διάστημα [α,β]. Το δε επιλύον σύνολο αποτελείται από τους καθαρά μιγαδικούς αριθμούς και από τους πραγματικούς αριθμούς $\lambda\notin[\alpha,\beta]$. Συγκεκριμένα έχουμε:

$P\sigma(Q)=\varnothing$ $\qquad$ $R\sigma(Q)=\varnothing$

$C\sigma(Q)=[\alpha,\beta]$ $\qquad$ $\rho(Q)=C-\{[\alpha,\beta]\}$

5.5. Γενικά στοιχεία για το φάσμα

Γενική Παρατήρηση: Η εύρεση του φάσματος ενός τελεστή είναι ένα δύσκολο πρόβλημα, γιατί δεν υπάρχει μέθοδος για την εύρεση του. Υπάρχουν όμως μερικά θεωρήματα που βοηθούν στην αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος.

Θεώρημα 5.5.1: Εάν οι τελεστές A και B είναι ισοδύναμοι σ' ένα χώρο Hilbert, δηλ.

$B=U^{-1}AU$ με U μοναδιαίος, (Unitary), τελεστής και $U(D(B))=D(A)$, τότε

$P\sigma(A)=P\sigma(B)$ $R\sigma(A)=R\sigma(B)$

$C\sigma(A)=C\sigma(B)$

και κάθε γενικευμένη ιδιοτιμή του B είναι επίσης γενικευμένη ιδιοτιμή του A.

Παράδειγμα 5.5.1: Εφ' όσον ο τελεστής της ορμής P είναι ισοδύναμος με τον τελεστή της θέσης Q, θα έχει, βάσει του παραπάνω θεωρήματος, το ίδιο φάσμα με το φάσμα του Q.

Θεώρημα 5.5.2: Το φάσμα ενός **κλειστού τελεστή**[34] A σ' ένα χώρο Banach συγκεντρώνεται μέσα σ' ένα κύκλο πεπερασμένης ακτίνας και με κέντρο την αρχή O του μιγαδικού επιπέδου. Με άλλα λόγια κάθε κλειστός τελεστής έχει πεπερασμένη **φασματική ακτίνα** r(A), ($r(A)=\sup|\lambda|\ \lambda\in\sigma(A)$).

Πρόταση 5.5.1: Εάν ο A είναι ένας φραγμένος τελεστής σε χώρο Banach, δηλ. εάν $||A||<\infty$, τότε η φασματική ακτίνα του είναι το $||A||$ και επί πλέον το φάσμα του είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του κλειστού δίσκου:

$$\Delta=\{\ \lambda\ /\ |\lambda|\leq||A||\ \}$$

Πρόταση 5.5.2: Εάν ο A είναι ένας φραγμένος τελεστής σ' ένα χώρο Banach V, (τότε $||A||<\infty$, D(A)=V), και $|\lambda|>||A||$ τότε το $\lambda\in\rho(A)$, δηλ. το λ είναι κανονική τιμή. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα, δηλ. μπορεί να υπάρχει κανονική τιμή λ, $\lambda\in\rho(A)$, τέτοια ώστε $|\lambda|\leq ||A||$. Π.χ. έστω A=I και λ=1/2

Θεώρημα 5.5.3: Έστω A ένας κλειστός τελεστής σ' ένα χώρο Hilbert H με $\overline{D(A)}$=H. Τότε:

α) Εάν $\lambda\in R\sigma(A)\ \rightarrow\ \lambda^*\in R\sigma(A^{\ })$

β) Εάν $\lambda\in C\sigma(A)\ \rightarrow\ \lambda^*\in C\sigma(A^{\ })$

γ) Εάν $\lambda\in P\sigma(A)\ \rightarrow$ ή $\lambda^*\in P\sigma(A^{\ })$ ή $\lambda^*\notin P\sigma(A^{\ })$

Πρόταση 5.5.3: Εάν ο A είναι ένας φραγμένος τελεστής σ' ένα χώρο Hilbert H, (ή ακόμα μη φραγμένος αλλά D(A)=H, τότε ισχύει:

$$\lambda\in\rho(A)\rightarrow\lambda^*\in\rho(A^{\ })$$

Παρατήρηση 5.5.1: Εάν ο A είναι φραγμένος τελεστής, όχι σ' ένα χώρο Hilbert αλλά σε χώρο Banach B, με D(A)=B, τότε εάν $\lambda\in\rho(A)\Rightarrow\lambda\in\rho(A^+)$, όπου A^+ είναι ο συναφής του A. Από αυτό έπεται ότι τα φάσματα του A και του A^+ συμπίπτουν.

Προσοχή: Οι A και A^+ δρουν σε διαφορετικούς χώρους.

5.6 Φυσική σημασία του Φάσματος των ερμιτιανών τελεστών

[34] Έστω X ένας norm χώρος και A ένας τελεστής με $D(A)\subset X$. Ο τελεστής A λέγεται **κλειστός** εάν για κάθε ακολουθία διανυσμάτων x_n με $x_n\in D(A)$, οι σχέσεις:

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x\quad,\quad \lim_{n\to\infty}Ax_n=y$$

συνεπάγονται τις σχέσεις: $x\in D(A)$, y=Ax., δηλ. η ταυτόχρονη σύγκλιση των ακολουθιών x_n και Ax_n συνεπάγεται ότι το όριο $x\in D(A)$ και y=Ax.

Εκτός από τη γενική σημασία του φάσματος, η οποία αφορά την λύση ομογενών και μη εξισώσεων, (διαφορικών ή ολοκληρωτικών), το φάσμα ενός αυτοσυζυγούς τελεστή έχει και ιδιαίτερη σημασία, που οφείλεται στα αξιώματα της Κβαντομηχανικής. Τα δυο πρώτα αξιώματα είναι τα εξής:

1) Η κατάσταση ενός κβαντομηχανικού συστήματος παριστάνεται με ένα κανονικοποιημένο διάνυσμα ενός διαχωρίσιμου χώρου Hilbert και κάθε φυσικό μέγεθος παριστάνεται από ένα αυτοσυζυγή τελεστή.

2) Εάν A είναι αυτοσυζυγής τελεστής και $||f||=1$, τότε $(Af,f)\equiv<A>$[35] παριστάνει την μέση τιμή του μεγέθους A στην κατάσταση f.

Σύμφωνα με το δεύτερο αξίωμα, εάν f είναι μια κατάσταση και α μιγαδικός αριθμός με $|\alpha|=1$, τότε το f και αf είναι ουσιαστικά η ίδια κατάσταση, διότι δεν υπάρχει φυσική διαφορά, δεδομένου ότι όλες οι πληροφορίες για το μέγεθος A προέρχονται από το εσωτερικό γινόμενο (f,Af). Πράγματι:

$$(\alpha f,A\alpha f)=\alpha\alpha^*(f,Af)=(f,Af)$$

Σύμφωνα με το αξίωμα 1, ιδιαίτερη σημασία έχει το σημειακό και το συνεχές φάσμα, διότι το υπόλοιπο φάσμα ενός αυτοσυζυγούς τελεστή είναι κενό.

Εάν λ είναι ιδιοτιμή του A, δηλ. ανήκει στο σημειακό φάσμα, τότε υπάρχει f με $||f||=1$, έτσι ώστε $Af=\lambda f$ και $<A>=(f,Af)=\lambda$, δηλ. το λ είναι η μέση τιμή του μεγέθους A στην κατάσταση f.

Εάν το λ ανήκει στο συνεχές φάσμα, τότε υπάρχει ακολουθία καταστάσεων f_n με $||f_n||=1$ $n=1,2,\cdots$ έτσι ώστε:

$$||Af_n-\lambda f_n||\to 0$$

Άρα $(f_n , Af_n)-\lambda=(Af_n , f_n)-\lambda(f_n , f_n)=(Af_n-\lambda f_n , f_n) \Rightarrow$

$$|(f_n , Af_n)-\lambda|=|(Af_n-\lambda f_n , f_n)|\leq ||Af_n -\lambda f_n||.||f_n|| = ||Af_n-\lambda f_n|| \to 0$$

Ώστε εάν το λ ανήκει στο συνεχές φάσμα του A, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ακολουθία καταστάσεων $||f_n||=1$, έτσι ώστε η μέση τιμή του A στις καταστάσεις αυτές τείνει προς το λ. Με αλλά λόγια:

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists f_\varepsilon \text{ με } ||f_\varepsilon||=1)\left[\, |(f_\varepsilon , Af_\varepsilon)-\lambda|<\varepsilon \,\right]$$

δηλ. μπορούμε να βρούμε μια κατάσταση f_ε που η μέση τιμή $(f_\varepsilon , Af_\varepsilon)$ να προσεγγίζει την τιμή λ όσο θέλουμε.

5.7. Κατάσταση ελαχίστης αβεβαιότητας

Εκτός από την μέση τιμή λ ενός φυσικού μεγέθους A, μας ενδιαφέρει να ξέρουμε και το πόσο συγκεντρωμένες είναι οι πιθανές τιμές του γύρω απ' αυτήν. Η ποσότητα που χαρακτηρίζει τον βαθμό συγκέντρωσης ή διασποράς των τιμών του φυσικού μεγέθους A ονομάζεται **διασπορά** ή **τυπική απόκλιση** και συμβολίζεται με ΔA. Ένας τύπος, που εκφράζει τη διασπορά είναι:

[35] Στην παράγραφο αυτή με <A> θα συμβολίζουμε την μέση τιμή, το δε εσωτερικό γινόμενο δυο διανυσμάτων x και y θα το συμβολίζουμε με (x,y)

$$(\Delta A)^2 = \Big\rangle \{A - \langle A\rangle I\}^2 \Big\langle$$

ο οποίος μας λέει ότι το τετράγωνο της διασποράς ορίζεται από την μέση τετραγωνική απόκλιση από την μέση τιμή. Πιο αναλυτικά το τετράγωνο της διασποράς μπορεί να γραφεί

$$(\Delta A)^2 = <\{A-<A>I\}^2> = (f,\{A-<A>I\}^2 f) = (f,\{A^2-2<A>AI+<A>^2 I\}f) =$$
$$= (f,A^2 f) - 2<A>(f,Af) + <A>^2(f,f) = <A^2> - 2<A>^2 + <A>^2 = <A^2> - <A>^2$$

αλλά εάν $A_0=A-<A>I$ τότε

$$\|A_0 f\|^2 = (A_0 f, A_0 f) = ([Af-<A>f],[Af-<A>f]) = (Af,Af) - <A>^2 =$$
$$= (f,A^2 f) - <A>^2 = <A^2> - <A>^2 \geq 0$$

Επομένως

$$(\Delta A)^2 = <A^2> - <A>^2 \geq 0$$

Έστω B ένας άλλος αυτοσυζυγής τελεστής που παριστάνει ένα άλλο φυσικό μέγεθος και έστω ότι:

$$AB - BA = iC \quad \text{με } C \neq 0 \tag{1}$$

Υποθέτουμε ότι ο μεταθέτης iC ορίζεται στην κατάσταση f, δηλ.

$\|Cf\| < \infty$ και ότι $\|A_0 f\| \neq 0$ και $\|B_0 f\| \neq 0$.

Θεώρημα 5.7.1: (**Αρχή της Αβεβαιότητας**) Ισχύει:

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{|\langle C\rangle|}{2} \tag{2}$$

Απόδειξη: Εξ ορισμού έχουμε:

$$\Delta A = \|A_0 f\| \ , \ \Delta B = \|B_0 f\| \tag{3}$$

Από τις σχέσεις (3) και με τη βοήθεια της ανισότητας του Schwarz έχουμε:

$$|(A_0 f, B_0 f)| \leq \|A_0 f\| \|B_0 f\| = \Delta A \Delta B$$

Θέτουμε $\mu = (A_0 f, B_0 f) = (f, A_0 B_0 f)$ όποτε

$\mu^* = (A_0 f, B_0 f)^* = (B_0 f, A_0 f) = (f, B_0 A_0 f)$ και

$\mu - \mu^* = (f, A_0 B_0 f) - (f, B_0 A_0 f) = (f, [A_0 B_0 - B_0 A_0] f)$

ή λόγω της (1)

$$\mu - \mu^* = (f,[AB-BA]f) = (f,iCf) = -i(f,Cf) = -i<C>$$

ή $\quad 2i\mathrm{Im}\mu = -i<C> \;\Rightarrow\; \mathrm{Im}\mu = -\dfrac{\langle C\rangle}{2}$

αλλά $\quad |\mathrm{Im}\mu| = \dfrac{|\langle C\rangle|}{2} \leq |\mu| = |(A_0 f, B_0 f)| \leq \|A_0 f\| \|B_0 f\| = \Delta A \Delta B \;\Rightarrow\; \Delta A \Delta B \geq \dfrac{|\langle C\rangle|}{2}$

Για τους τελεστές θέσης Q=x και ορμής $P = i\dfrac{d}{dx}$ με PQ-QP=iI η παραπάνω σχέση γίνεται:

$\Delta Q \Delta P \geq 1/2$

Η τελευταία σχέση είναι η **αρχή της αβεβαιότητας του Heisemberg**, που όπως βλέπουμε αποτελεί ένα απλό θεώρημα.

Παρατήρηση 5.7.1: Ακριβής μέτρηση ενός μεγέθους A ή καλύτερα τέλεια μέτρηση σημαίνει ότι $\Delta A<\varepsilon\ \forall\varepsilon>0$. Αλλά τότε εάν $\Delta A\Delta B=\alpha^2>0$ συνεπάγεται ότι $\Delta B\to\infty$. Με αλλά λόγια εάν $\Delta A\Delta B=\alpha^2$, ακριβής μέτρηση του A συνεπάγεται ατελή μέτρηση για το B στην κατάσταση αυτή. Τα μεγέθη A και B μπορούν να μετρηθούν εξ ίσου καλά μόνο εάν $\Delta A=\Delta B=\alpha$ και η μέτρηση είναι τόσο περισσότερο ακριβής, όσο μικρότερο είναι το α. Γι' αυτό ένα ενδιαφέρον πρόβλημα, που εμφανίζεται εδώ, είναι η εύρεση **καταστάσεων ελάχιστης αβεβαιότητας**, δηλ. η εύρεση καταστάσεων στις οποίες ισχύει η ισότητα στην ανισότητα:

$$\Delta A\Delta B\geq\frac{|\langle C\rangle|}{2}\quad \text{με } AB-BA=iC$$

Δεύτερο ενδιαφέρον πρόβλημα είναι η εύρεση καταστάσεων στις οποίες $|\langle C\rangle|=|\langle f,Cf\rangle|$ γίνεται ελάχιστο. [Το τελευταίο πρόβλημα δεν έχει έννοια στην περίπτωση όπου $C=cI$ με c σταθερός αριθμός, διότι τότε $|\langle C\rangle|$=σταθερό]. Προφανώς εάν $AB=BA$, δηλ. εάν τα μεγέθη είναι μεταθετά, τότε $c=0$ και επομένως $\Delta A\Delta B=0$. Αυτό σημαίνει, από τα παραπάνω, ότι τα μεγέθη A και B μπορούν να μετρηθούν ακριβώς.

Μια περίπτωση όπου αποκλείεται η ακριβής μέτρηση των δυο μεγεθών A και B είναι η περίπτωση $AB-BA=iC$ με $C=cI$. Είναι επομένως ενδιαφέρον να γνωρίζουμε πότε δυο μεγέθη πληρούν την σχέση: $AB-BA=icI$, c=αριθμός.

Μια πληροφορία μας δίνει το επόμενο θεώρημα:

Θεώρημα 5.7.2: Εάν A και B είναι φραγμένοι, (όχι κατ' ανάγκη αυτοσυζυγείς), τότε η σχέση $AB-BA=icI\neq0$ αποκλείεται.

Απόδειξη: Έστω ότι ισχύει $AB-BA=icI$. Τότε

$$A^2B-ABA=icA \quad \text{και}$$

$$ABA-BA^2=icA$$

Προσθέτοντας έχουμε: $A^2B-BA^2=2icA$ (5)

Ομοίως από την σχέση $AB-BA=icI$ προκύπτει:

$$A^3B-A^2BA=icA^2$$

και από την (5) $A^2BA-BA^3=2icA^2$

Από τις δυο τελευταίες σχέσεις έχουμε:

$$A^3B-BA^3=3icA^2$$

Προχωρώντας κατά τον ίδιο τρόπο έχουμε:

$$A^{n+1}B-B\alpha^{n+1}=nicA^n \quad n=1,2,\cdots \tag{6}$$

Από την (6) έχουμε:

$$n|c|\|A^n\|=\|A^{n+1}B-B\alpha^{n+1}\|\leq\|A^{n+1}B\|+\|BA^{n+1}\|=\|A^n\|\|AB\|+\|BA\|\|A^n\|=2\|A^n\|\|A\|\|B\| \Rightarrow$$

$$n|c|\leq2\|A\|\|B\| \tag{7}$$

Από την σχέση (7) βλέπουμε ότι εάν οι τελεστές A και B είναι φραγμένοι, τότε υπάρχουν θετικοί αριθμοί k_A και k_B με $\|A\|=k_A$ και $\|B\|=k_B$, και η σχέση $n|c|\leq k_Ak_B$ είναι αδύνατη για αρκετά μεγάλο n.

6. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ ή ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

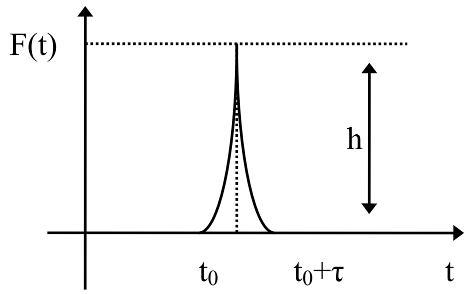
6.1 Συναρτήσεις αιχμής και η συνάρτηση δέλτα δ(x) του Dirac.

Στη Φυσική συχνά συναντάμε συστήματα, τα οποία διαταράσσονται από κάποια εξωτερική δύναμη, που είναι συνάρτηση του χρόνου και έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

α) Η χρονική διάρκεια, κατά την οποία επενεργεί, είναι πολύ μικρή.

β) Το μέτρο της είναι πολύ μεγάλο.

Η γραφική παράσταση μιας τέτοιας δύναμης είναι της μορφής:



όπου το h είναι πολύ μεγάλο και το τ πολύ μικρό. Συναρτήσεις, που έχουν παρόμοιες γραφικές παραστάσεις, λέγονται **συναρτήσεις αιχμής**[36] .

Σαν παράδειγμα μπορούμε να φανταστούμε ένα σώμα σε ηρεμία που τίθεται σε κίνηση τη χρονική στιγμή t_0 από ένα ξαφνικό "κτύπημα". Το "κτύπημα" αυτό προσδίδει στο σώμα μια ορμή:

$$P=mv=\int_{t_0}^{t_0+\tau} F(t)dt$$

όπου τ η χρονική διάρκεια του "κτυπήματος".

Σε πολλές περιπτώσεις, (αν όχι σε όλες), ο συναρτησιακός τύπος της F(t) ή η γραφική της παράσταση δεν είναι γνωστά και η ανάλυση του προβλήματος από μαθηματικής και ακόμα από φυσικής πλευράς είναι δύσκολη. Παρ' όλα αυτά δεν αποτελεί εμπόδιο το γεγονός ότι δεν γνωρίζουμε την συνάρτηση F(t), διότι αυτό που μας ενδιαφέρει είναι η ώθηση, δηλαδή το ολοκλήρωμα:

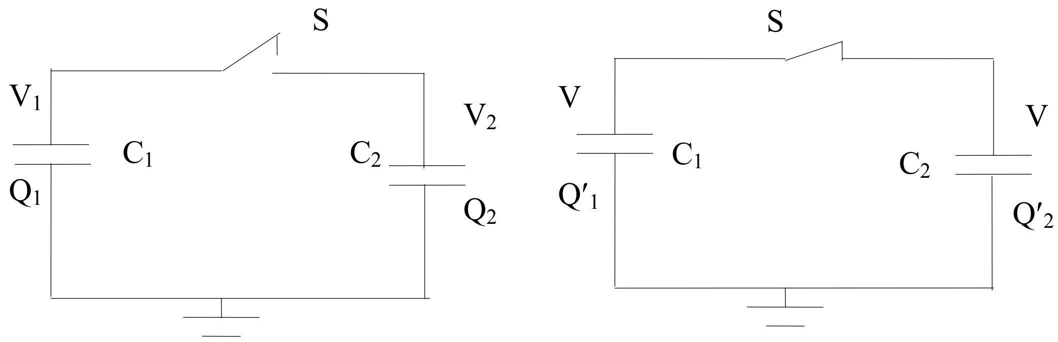
$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} F(t)dt$$

Άλλο παράδειγμα, στο οποίο εμφανίζεται κάποιο φυσικό μέγεθος με τα παραπάνω χαρακτηριστικά, είναι το ηλεκτρικό ρεύμα που θα δημιουργηθεί, όταν κλείσουμε τον διακόπτη S:

Τότε τα φορτία Q_1 και Q_2 ανακατανέμονται, (υποθέτουμε ότι $V_1 \neq V_2$), σε:

---

[36] Στα επόμενα θα δούμε ότι οι συναρτήσεις αιχμής ανήκουν στο σύνολο των κατανομών.



$$Q'_1=\frac{C_1(Q_1+Q_2)}{C_1+C_2} \qquad Q'_2=\frac{C_2(Q_1+Q_2)}{C_1+C_2}$$

Εάν η αντίσταση των αγωγών είναι αμελητέα, τότε το ρεύμα έχει πολύ μικρή διάρκεια και πολύ μεγάλη ένταση.

Για να αντιμετωπισθούν αυτά τα προβλήματα ο Dirac εισήγαγε την δέλτα συνάρτηση δ(x) που "συμβολικά" δίνεται από τον τύπο:

$$\delta(x)=\begin{cases}0 & x\neq 0\\ \\ \infty & x=0\end{cases}$$

με την ιδιότητα: $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)dx=1$

Τότε για μια <u>συνεχή</u> συνάρτηση f(x) το ολοκλήρωμα:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)f(x)dx$$

μπορεί να υπολογισθεί ως εξής: Αφού η δ(x) είναι μηδέν για $x\neq0$ μπορούμε να περιορίσουμε το διάστημα $(-\infty,+\infty)$ σε $(-\varepsilon,+\varepsilon)$ με $\varepsilon>0$ και αρκετά μικρό. Ακόμα επειδή η συνάρτηση f(x) είναι συνεχής στο σημείο x=0, οι τιμές της μέσα στο διάστημα $(-\varepsilon,\varepsilon)$ δεν θα διαφέρουν πολύ από την τιμή f(0). Έτσι έχουμε:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)f(x)dx=\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\delta(x)f(x)dx\approx f(0)\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\delta(x)dx=f(0)$$

επειδή $\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\delta(x)dx=1$ για κάθε $\varepsilon>0$. Έτσι έχουμε:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)f(x)dx=f(0)$$

Η παραπάνω σχέση λέγεται **ιδιότητα της μετατόπισης**.

6.2. Ακολουθίες πραγματικών συναρτήσεων που προσεγγίζουν την δ συνάρτηση

Η σχέση: $\delta(x)=\begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases}$

δεν μπορεί να ορίζει μια συνάρτηση και μάλιστα ολοκληρώσιμη μέσα στα πλαίσια της συναρτησιακής ανάλυσης. Μια άλλη απόπειρα για τον ορισμό της δέλτα συνάρτησης είναι να ισχύει η σχέση:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0)$$

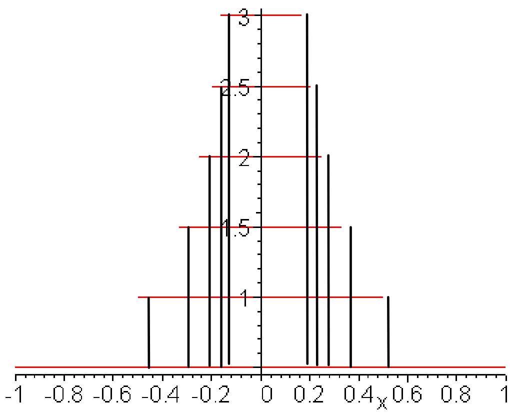
για κάθε συνεχή συνάρτηση f(x).

Όμως και αυτή η απόπειρα αποτυγχάνει διότι μπορούμε να δείξουμε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση που ικανοποιεί αυτή τη σχέση. Μπορούμε όμως να βρούμε ακολουθίες συναρτήσεων αιχμής, οι οποίες προσεγγίζουν την ιδιότητα της μετατόπισης, δηλ. ισχύει η σχέση:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x) f(x) dx = f(0)$$

Ακολουθίες με αυτή την ιδιότητα θα ονομάζονται **δέλτα ακολουθίες**. Για παράδειγμα οι συναρτήσεις:

$$\varphi_n(x)=\begin{cases} 0 & \text{για} |x| \geq 1/n \\ n/2 & \text{για} |x| < 1/n \end{cases} \qquad n=1,2,3,\ldots$$



σχηματίζουν μια δέλτα ακολουθία, διότι για κάθε συνεχή συνάρτηση f(x) έχουμε:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x) f(x) dx = \int_{-1/n}^{1/n} f(x) \frac{n}{2} dx = \frac{n}{2} \int_{-1/n}^{1/n} f(x) dx$$

και από το θεώρημα της μέσης τιμής προκύπτει:

$$\frac{n}{2} \int_{-1/n}^{1/n} f(x) dx = \frac{n}{2} \frac{2}{n} f(\xi) = f(\xi) \qquad -1/n \leq \xi \leq 1/n$$

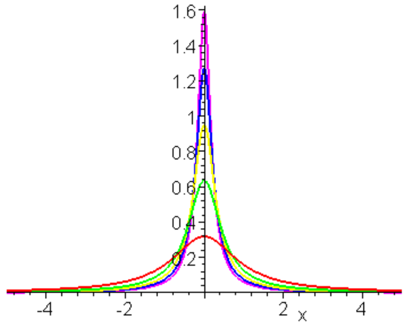
Όταν $n \to \infty$ τότε $\xi \to 0$ και από τη συνέχεια της συνάρτησης f(x) έχουμε ότι $f(\xi) \to f(0)$ και επομένως:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x) f(x) dx = f(0)$$

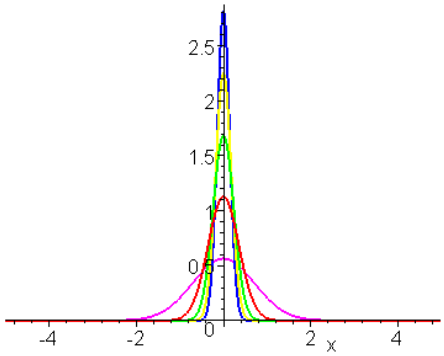
Για πολλούς λόγους θέλουμε να κατασκευάσουμε δέλτα ακολουθίες από συναρτήσεις, οι οποίες είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες, (στο παραπάνω παράδειγμα οι συναρτήσεις $\varphi_n(x)$ δεν είναι παραγωγίσιμες).

Παραδείγματα τέτοιων ακολουθιών είναι:

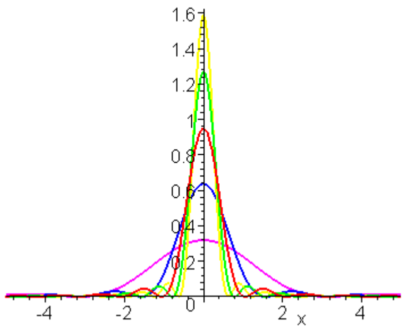
α) $\varphi_n(x)=\dfrac{n}{\pi}\dfrac{1}{1+n^2x^2}$



β) $\varphi_n(x)=\dfrac{n}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-n^2x^2\right)$



γ) $\varphi_n(x)=\dfrac{1}{n\pi}\dfrac{\sin^2 nx}{x^2}$



Οι συναρτήσεις αυτών των ακολουθιών είναι κανονικοποιημένες στη μονάδα:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_n(x)dx=1$$

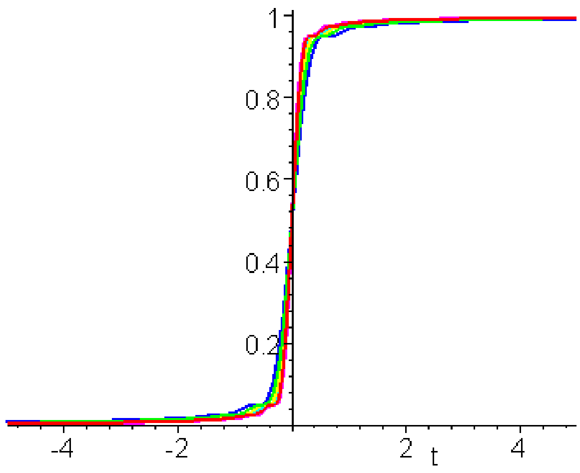
και κάθε ακολουθία ικανοποιεί τη σχέση:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_n(x)f(x)dx=f(0)$$

Αλλά και πάλι δεν είναι σωστό να λέμε ότι αυτές οι ακολουθίες συγκλίνουν στη δέλτα συνάρτηση: Τα όρια αυτών των ακολουθιών δεν υπάρχουν με την συνήθη έννοια της σύγκλισης και η πράξη της ολοκλήρωσης γενικά δεν αντιστρέφεται με την διαδικασία του ορίου.

Άσκηση: Δείξτε ότι το $\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)$ δεν υπάρχει για τις παραπάνω τρεις ακολουθίες.

Είναι ενδιαφέρον να βρούμε τα αόριστα ολοκληρώματα των συναρτήσεων $\varphi_n(x)$ δηλ. τις συναρτήσεις: $\Phi_n(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi_n(\xi)d\xi$ Π.χ. για την ακολουθία (α), οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $\Phi_n(x)$, για αρκετά μεγάλες τιμές του n, έχουν την μορφή του διπλανού σχήματος.



Επίσης εύκολα μπορούμε να δούμε ότι: $\lim_{n\to\infty}\Phi_n(x)=u(x)$ όπου u(x) η **συνάρτηση βήματος**, (ή **συνάρτηση του Heaviside** ή **step function**), που ορίζεται από τη σχέση:

$$u(x)=\begin{cases}1 & \text{για } x\geq 0\\ 0 & \text{για } x\langle 0\end{cases}$$

Έτσι μπορούμε να παρασυρθούμε και να πούμε ότι η δέλτα συνάρτηση δ(x) είναι η παράγωγος της συνάρτησης βήματος u(x), της οποίας η παράγωγος $du(x)/dx=0\ \forall x\neq 0$ και δεν ορίζεται για x=0, στο σημείο ακριβώς που περιμένουμε να βρίσκεται η αιχμή, (peak), της δέλτα συνάρτησης.

6.3 Ιδιότητες της δ-συνάρτησης

1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta'(x)f(x)dx=-f'(0)$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d^m\delta(x)}{dx^m}f(x)dx=(-1)^m\frac{d^m f(0)}{dx^m}$

3) $x\delta(x)=0$

4) $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-\alpha)f(x)dx=f(\alpha)$

5) $\delta(\alpha x)=\frac{\delta(x)}{|\alpha|}$ $\quad \alpha\neq 0$

6) $\delta(x^2-\alpha^2)=\frac{1}{2\alpha}\left[\delta(x+\alpha)+\delta(x-\alpha)\right]$ $\quad \alpha>0$

<u>Αποδείξεις</u>: Στα επόμενα θεωρούμε μια δ-ακολουθία $\varphi_n(x)$

1) Έστω ότι $\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_n(x)f(x)dx=f(0)$ τότε

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_n'(x)f(x)dx=\varphi_n(x)f(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_n(x)f'(x)dx$$

Αυτό συνήθως συμβαίνει αφού οι συναρτήσεις $\varphi_n(x)$ είναι τέτοιες ώστε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_n(x)f(x)dx$$

να συγκλίνει. Εάν $n\to\infty$ έχουμε:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_n'(x)f(x)dx = -\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_n(x)f'(x)dx = -f'(0)$$

Από τη παραπάνω σχέση προκύπτει ότι η ακολουθία των παραγώγων $\varphi'_n(x)$ ικανοποιεί την ιδιότητα της μετατόπισης, η οποία με τη σειρά της δικαιολογεί το σύμβολο $\delta'(x)$ σαν παράγωγος της δέλτα συνάρτησης έτσι ώστε:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta'(x)f(x)dx = -f'(0)$$

2) Με όμοια τεχνική μπορούμε να δείξουμε την δεύτερη ιδιότητα.

3) Θεωρούμε το ολοκλήρωμα:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x\delta(x)f(x)dx$$

όπου f(x) συνεχής για x=0. Θέτουμε xf(x)=g(x) με g(0)=0 και εχουμε:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x\delta(x)f(x)dx = 0$$

Επομένως $\qquad x\delta(x)=0$

4) Στο ολοκλήρωμα: $\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-\alpha)f(x)dx$

θέτουμε x-α=t και γράφουμε: f(t+α)=g(t), τότε

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-\alpha)f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)g(t)dt = g(0) = f(\alpha)$$

5) Εαν α>0 θέτουμε $\alpha x=t \Rightarrow dx=dt/\alpha$ τότε

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\alpha x)f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f\left(t/\alpha\right)\frac{dt}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}f(0)$$

Εαν α<0 θέτουμε πάλι $\alpha x=t \Rightarrow dx=dt/\alpha$. Όμως τα όρια της ολοκλήρωσης εναλλάσονται και επομένως:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\alpha x)f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f\left(t/\alpha\right)\frac{dt}{\alpha} = -\frac{1}{\alpha}f(0)$$

και στις δύο περιπτώσεις είναι f(0)/|α|. Επομένως δ(αx)=δ(x)/|α|

6) Επειδή $\delta(x^2-\alpha^2)=\delta[(x+\alpha)(x-\alpha)]$ και δ(t)=0 εκτός από t=0, έπεται ότι $\delta(x^2-\alpha^2)=0$ εκτός από x=±α. Επομένως

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x^2-\alpha^2)f(x)dx = \int_{-\alpha-\varepsilon}^{-\alpha+\varepsilon}\delta\left[\left(x+\alpha\right)\left(x-\alpha\right)\right]f(x)dx + \int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon}\delta\left[\left(x+\alpha\right)\left(x-\alpha\right)\right]f(x)dx$$

με α>0 και 0<ε<2α με ε οσοδήποτε μικρό. Στη γειτονιά του x=-α ο παράγοντας x-α μπορεί να αντικατασταθεί με -2α. Επομένως:

$$\int_{-\alpha-\varepsilon}^{-\alpha+\varepsilon}\delta\left[\left(x+\alpha\right)\left(x-\alpha\right)\right]f(x)dx = \int_{-\alpha-\varepsilon}^{-\alpha+\varepsilon}\delta\left[\left(-2\alpha\right)\left(x+\alpha\right)\right]f(x)dx =$$

$$\int_{-\alpha-\varepsilon}^{-\alpha+\varepsilon}\frac{1}{|-2\alpha|}\delta\left[\left(x+\alpha\right)\left(x-\alpha\right)\right]f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\alpha}\delta\left(x+\alpha\right)f(x)dx$$

Τα όρια στο άπειρο μπορούν πάλι να χρησιμοποιηθούν διότι $\delta(x+\alpha)=0$ εκτός από $x=-\alpha$. Με όμοιο τρόπο έχουμε:

$$\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon}\delta\left[(x+\alpha)(x-\alpha)\right]f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\alpha}\delta(x+\alpha)f(x)dx$$

Τελικά προκύπτει:

$$\delta(x^2-\alpha^2)=\frac{1}{2\alpha}\left[\delta(x+\alpha)+\delta(x-\alpha)\right]$$

Η παραπάνω σχέση δεν ισχύει για $\alpha=0$ και δυστυχώς δεν υπάρχει τρόπος για να ερμηνεύσουμε την έκφραση $\delta(x^2)$

6.4 Ασθενής σύγκλισης - Θεωρία Κατανομών

Οι ιδέες, που περιέχονται στα προβλήματα που οδήγησαν στη δέλτα συνάρτηση, μπορούν να συστηματικοποιηθούν και να μας οδηγήσουν σ' αυτό που είναι σήμερα γνωστό σαν **Θεωρία Κατανομών** ή **Γενικευμένες Συναρτήσεις**.

Όπως υποδηλώνει η ονομασία, η θεωρία αναφέρεται στο πρόβλημα της επέκτασης του ορισμού μιας συνάρτησης, έτσι ώστε έννοιες, όπως της $\delta(x)$, να μπορούν να τεθούν σε μια αυστηρή μαθηματική βάση. Υπάρχουν πολλοί τρόποι για να γίνει αυτό. Ο πιο γενικός τρόπος είναι να δούμε τις συναρτήσεις, που συμπεριφέρονται σαν την δέλτα συνάρτηση, σαν στοιχεία ενός δυικού χώρου V^* ενός καταλλήλου συναρτησιακού χώρου V [(37]. Ένας άλλος τρόπος πιο απλός και πρακτικός είναι να προσεγγίσουμε τις κατανομές μέσα από ολοκληρώματα ακολουθιών συναρτήσεων της μορφής:

$$\int f_n(x)g(x)dx \qquad n=1,2,3,\ \dots$$

Μια ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x)$, (όπως μια δέλτα ακολουθία), οδηγεί σε μια νέα μαθηματική έννοια, (όπως η δέλτα συνάρτηση), με την προϋπόθεση ότι μια τέτοια ακολουθία συγκλίνει για κάθε συνάρτηση $g(x)$ κατάλληλα επιλεγμένη. Σαν συνάρτηση $g(x)$ συνήθως θεωρούμε μια απείρως διαφορίσιμη συνάρτηση. Επίσης θα δεχθούμε σαν όρια ολοκλήρωσης τα $-\infty$ και $+\infty$, (εκτός εάν διαφορετικά δηλωθεί). Επομένως η συνάρτηση $g(x)$ πρέπει να έχει "καλή συμπεριφορά" στο άπειρο. Αυτό εξασφαλίζεται απαιτώντας η $g(x)$ να μηδενίζεται έξω από κάποιο πεπερασμένο διάστημα (α,β), (διαφορετικό για διαφορετική $g(x)$), ή τουλάχιστον η $g(x)$ να τείνει στο μηδέν "αρκετά γρήγορα" όταν το $x\to\pm\infty$.

Τέτοιου είδους συναρτήσεις $g(x)$, που ικανοποιούν αυτές τις απαιτήσεις ονομάζονται **δοκιμαστικές συναρτήσεις**, (**test functions**). Η ονομασία δοκιμαστική συνάρτηση οφείλεται στο γεγονός ότι με αυτές τις συναρτήσεις δοκιμάζεται, (ελέγχεται), η ιδιότητα της μετατόπισης για τις δέλτα ακολουθίες.

Έχοντας ορίσει τις δοκιμαστικές συναρτήσεις, μπορούμε τώρα να συνεχίσουμε και να ορίσουμε την κλάση των **επιδεκτών**, ή **συγκεντρωτικών συναρτήσεων**, (**admissible** ή **core functions**), από τις οποίες θα επιλεγούν οι συναρτήσεις $f_n(x)$. Υπάρχει μια ποικιλία επιλογών[(38] . Στα επόμενα θα θεωρούμε τις συγκεντρωτικές συναρτήσεις απείρως

[(37] Τον τρόπο αυτό θα τον δούμε στην επόμενη παράγραφο

[(38] Δεν υπάρχει μια μοναδική θεωρία κατανομών, αλλά αρκετές, που βασίζονται βέβαια στις ίδιες αρχές αλλά διαφέρουν σε λεπτομέρειες.

διαφορίσιμες στο πλήρες διάστημα (-∞,+∞), η δε συμπεριφορά τους στο άπειρο μπορεί να είναι τυχαία. Ο όρος συγκεντρωτικές συναρτήσεις σχετίζεται με το γεγονός ότι αυτή είναι η κλάση των συναρτήσεων, η οποία εκτείνεται για να περιβάλλει άλλες, (όχι απείρως δοαφορίσιμες), συναρτήσεις όπως κατανομές σαν τη δέλτα συνάρτηση.

Ας θεωρήσουμε τώρα μια ακολουθία συγκεντρωτικών συναρτήσεων $f_n(x)$. Η ακολουθία αυτή θα λέγεται **ασθενώς συγκλίνουσα ακολουθία** εάν το όριο:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)g(x)dx$$

υπάρχει για όλες τις δοκιμαστικές συναρτήσεις g(x). Μια ασθενώς συγκλίνουσα ακολουθία μπορεί να συγκλίνει ή όχι με τις συνήθεις έννοιες, όπως την κατά σημείο σύγκλιση, την ομοιόμορφη σύγκλιση κ.λ.π. Η έννοια της ασθενούς σύγκλισης διετυπώθη για να επεκτείνει την τάξη των συγκεντρωτικών συναρτήσεων κατά ένα ασυνήθιστο τρόπο. Τέτοιες επεκτάσεις είναι δυνατές με τη βοήθεια άλλων ειδών σύγκλισης, αλλά η επέκταση με την ασθενή σύγκλιση είναι πιο ισχυρή. Π.χ. ας θεωρήσουμε την ακολουθία των συγκεντρωτικών συναρτήσεων:

$$f_n(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan(nx)$$

Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι η ακολουθία αυτή συγκλίνει, (κατά σημείο), στη συνάρτηση βήματος u(x). Όμως οι συνκεντρωτικές συναρτήσεις είναι απείρως διαφορίσιμες στο διάστημα (-∞,+∞) αλλά η u(x) δεν είναι μια συγκεντρωτική συνάρτηση. Άρα η ακολουθία $f_n(x)$ δεν συγκλίνει μέσα στο σύνολο των συγκεντρωτικών συναρτήσεων και επομένως συγκλίνει ασθενώς.

Μπορεί κανείς να δείξει ότι

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)g(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{u(x)g(x)dx}=\int_{0}^{+\infty}\mathrm{g(x)dx}$$

για όλες τις δοκιμαστικές συναρτήσεις g(x).

Μπορούμε τώρα να ορίσουμε τεχνηκά την ασυνεχή συνάρτηση S(x) προσθέτοντας το "όριο" της ακολουθίας $f_n(x)$ οριζόμενο μέσα από το ολοκλήρωμα:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan\left(nx\right)\right]g(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}u(x)g(x)dx$$

Γιατί προσπαθούμε να ορίσουμε τη συνάρτηση βήματος u(x) κατ' αυτό τον πολύπλοκο τρόπο; Δεν είναι πιο εύκολο να την ορίσουμε κατά σημείο ως εξής:

$$S(x)=\begin{cases}0 & x\langle 0\\ 1/2 & x=0\\ 1 & x\rangle 0\end{cases}$$

και επομένως να επεκτείνουμε το σύνολο των συγκεντρωτικών συναρτήσεων με την κατά σημείο σύγκλιση. Η απάντηση είναι προφανής διότι κατά τον ίδιο ακριβώς τρόπο μπορούμε να ορίσουμε την δέλτα συνάρτηση, η οποία δεν δέχεται τον κατά σημείο ορισμό. Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα την ακολουθία των συγκεντρωτικών συναρτήσεων:

$$f_n(x)=\frac{n}{\pi}\frac{1}{1+n^2x^2}$$

Για n→∞ η ακολουθία αυτή δεν συγκλίνει σε καμμιά συνάρτηση, (μέσα στο σύνολο των συγκεντρωτικών συναρτήσεων ή αλλού). Επομένως συγκλίνει ασθενώς και

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)g(x)dx = g(0)$$

για οποιαδήποτε δοκιμαστική συνάρτηση g(x). Η απόδειξη έχει ως εξής

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{n}{\pi}\frac{1}{1+n^2x^2}g(x)dx = \int_{-\infty}^{-1/\sqrt{n}}\frac{1}{1+n^2x^2}g(x)dx+\int_{-1/\sqrt{n}}^{+1/\sqrt{n}}\frac{1}{1+n^2x^2}g(x)dx+\int_{+1/\sqrt{n}}^{+\infty}\frac{1}{1+n^2x^2}g(x)dx$$

Έστω B το φράγμα της g(x), δηλ. |g(x)|≤B ∀x. Τότε:

$$\left|\int_{+1/\sqrt{n}}^{+\infty}\frac{n}{\pi}\frac{1}{1+n^2x^2}g(x)dx\right| \le B\int_{+1/\sqrt{n}}^{+\infty}\frac{n}{\pi}\frac{1}{1+n^2x^2}dx = B\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\arctan\sqrt{n}\right)$$

Επειδή $\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\arctan\sqrt{n}\right)=0$

έπεται ότι $\quad \lim_{n\to\infty}\int_{+1/n}^{+\infty}\frac{n}{\pi}\frac{1}{1+n^2x^2}g(x)dx=0$

Όμοια $\quad \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{-1/\sqrt{n}}\frac{n}{\pi}\frac{1}{1+n^2x^2}g(x)dx=0$

Τελικά, χρησιμοποιώντας το θεώρημα της μέσης τιμής (f (x)≥0), έχουμε:

$$\int_{-1/\sqrt{n}}^{+1/\sqrt{n}}\frac{n}{\pi}\frac{1}{1+n^2x^2}g(x)dx = g(\xi)\int_{-1/\sqrt{n}}^{+1/\sqrt{n}}\frac{n}{\pi}\frac{1}{1+n^2x^2}dx = g(\xi)\frac{2}{\pi}\arctan\sqrt{n} \quad -1/\sqrt{n}\le\xi\le 1/\sqrt{n}$$

έτσι ώστε $\quad \lim_{n\to\infty}\int_{-1/\sqrt{n}}^{+1/\sqrt{n}}\frac{n}{\pi}\frac{1}{1+n^2x^2}g(x)dx = g(0)$

Μπορούμε τώρα να δώσουμε έναν αυστηρό ορισμό της έννοιας της κατανομής.

Μια **κατανομή** φ(x) είναι μια μαθηματική έννοια σχετιζόμενη με μια ασθενώς συγκλίνουσα ακολουθία συγκεντρωτικών συναρτήσεων για τις οποίες το συμβολικό ολοκλήρωμα: $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)g(x)dx$

ορίζεται από τη σχέση: $\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)g(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)g(x)dx$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

α) Κάθε συγκεντρωτική συνάρτηση αντιστοιχεί σε κάποια κατανομή αφού μπορούμε να κατασκευάσουμε μια ακολουθία αποτελούμενη από μια μόνο συγκεντρωτική συνάρτηση f(x).

β) Μια μεγάλη ποικιλία διαφορετικών ασθενώς συγκλινουσών ακολουθιών δίνουν την ίδια τιμή στο όριο: $\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)g(x)dx$

για όλες τις δοκιμαστικές συναρτήσεις g(x), (δηλ. για διάφορα είδη δέλτα συναρτήσεων). Τέτοιες "ισοδύναμες" ακολουθίες αντιστοιχούν στην ίδια κατανομή.

Παράδειγμα 3.3.1: Οι παρακάτω τρεις ακολουθίες είναι ισοδύναμες και αντιστοιχούν στην ίδια κατανομή, που συμβολίζεται με θ(x):

α) $f_n(x)=\frac{1}{2}\,erfc(-nx)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi x}^{+\infty}\exp(-u)du$

β) $f_n(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}Si(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\pi x}\frac{\sin u}{u}du$

γ) $f_n(x)=\exp(-e^{-\pi x})$

Οι ακολουθίες (α) και (β) συγκλίνουν επίσης κατά σημείο στην συνήθη συνάρτηση βήματος u(x), όπως ορίσθηκε στη σελίδα 84 Η ακολουθία (γ) συγκλίνει κατά σημείο στη συνάρτηση: $\bar{u}(x)=\begin{cases}0 & x\langle 0\\ 1/e & x=0\\ 1 & x\rangle 0\end{cases}$

Από την άποψη της κλασσικής θεωρίας των συναρτήσεων οι u(x) και $\bar{u}(x)$ είναι διαφορετικές συναρτήσεις. Από την άποψη της θεωρίας των κατανομών οι u(x) και $\bar{u}(x)$ αντιστοιχούν στην ίδια κατανομή θ(x), η οποία δεν μπορεί να ορισθεί από ένα τύπο, όπως οι συναρτήσεις u(x) και $\bar{u}(x)$, αλλά από μια οριακή διαδικασία περιγραφόμενη από την ασθενή σύγκλιση.

Παράδειγμα 3.3.2: Οι ακολουθίες

α) $f_n(x)=\frac{n}{\pi}\frac{1}{1+n^2x^2}$ β) $f_n(x)=\frac{n}{\sqrt{\pi}}\exp(-n^2x^2)$

γ) $f_n(x)=\frac{1-\cos(nx)}{n\pi x^2}$ δ) $f_n(x)=\frac{1}{n\pi}\frac{\sin^2(nx)}{x^2}$

είναι ισοδύναμες, παρέχοντας το αποτέλεσμα:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)g(x)dx = g(0) \qquad \text{για κάθε } g(x)$$

Η κατανομή, που ορίζεται από μια από αυτές τις ακολουθίες, ονομάζεται **δέλτα συνάρτηση**[(39] και συμβολίζεται με δ(x).

[(39] Φυσικά θα έπρεπε να ονομασθεί **δέλτα κατανομή** αλλά η ονομασία **δέλτα συνάρτηση** αποτελεί μέρος μιας μακράς παράδοσης.

Οι ακολουθίες (α) και (β) συγκλίνουν επίσης κατά σημείο στην συνήθη συνάρτηση βήματος S(x), όπως ορίσθηκε στη σελίδα 200 Η ακολουθία (γ) συγκλίνει κατά σημείο στη

συνάρτηση: $\bar{u}(x) = \begin{cases} 0 & x \langle 0 \\ 1/e & x=0 \\ 1 & x \rangle 0 \end{cases}$

Από την άποψη της κλασικής θεωρίας των συναρτήσεων οι u(x) και $\bar{u}(x)$ είναι διαφορετικές συναρτήσεις. Από την άποψη της θεωρίας των κατανομών οι u(x) και $\bar{u}(x)$ αντιστοιχούν στην ίδια κατανομή θ(x), η οποία δεν μπορεί να ορισθεί από ένα τύπο, όπως οι συναρτήσεις u(x) και $\bar{u}(x)$, αλλά από μια οριακή διαδικασία περιγραφόμενη από την ασθενή σύγκλιση.

Παράδειγμα 3.3.2: Οι ακολουθίες

α) $f_n(x)=\dfrac{n}{\pi}\dfrac{1}{1+n^2x^2}$ β) $f_n(x)=\dfrac{n}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-n^2x^2\right)$

γ) $f_n(x)=\dfrac{1-\cos(nx)}{n\pi x^2}$ δ) $f_n(x)=\dfrac{1}{n\pi}\dfrac{\sin^2(nx)}{x^2}$

είναι ισοδύναμες, παρέχοντας το αποτέλεσμα:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)g(x)dx = g(0) \qquad \text{για κάθε } g(x)$$

Η κατανομή, που ορίζεται από μια από αυτές τις ακολουθίες, ονομάζεται **δέλτα συνάρτηση**[40] και συμβολίζεται με δ(x).

6.5 Μια άλλη προσέγγιση στη θεωρία των κατανομών ή γενικευμένων συναρτήσεων

Έστω L ένας τοπολογικός διανυσματικός χώρος πάνω στο σώμα C των μιγαδικών αριθμών, αποτελούμενος από το σύνολο {…φ…} των μιγαδικών συναρτήσεων πραγματικής μεταβλητής:

$$\varphi: R \to C$$

Έστω L^* ο δυϊκός χώρος του L, δηλ. ο χώρος ο αποτελούμενος από το σύνολο {…F…} όλων των συνεχών γραμμικών συναρτησοειδών πάνω στον L:

$$F: L \to C$$

Εάν ο χώρος L δεν είναι ούτε "αρκετά μεγάλος" ούτε "αρκετά μικρός" και εάν η τοπολογία πάνω στον L δεν είναι ούτε "μεγάλη" ούτε "μικρή", τότε μπορεί κανείς να περιμένει ότι ο L^* αποτελείται από ένα λογικά μεγάλο σύνολο στοιχείων και ακόμα ότι τα στοιχεία αυτά του συνόλου μπορεί να έχουν πολλές ενδιαφέρουσες ιδιότητες, (πέρα από το γεγονός ότι

[40] Φυσικά θα έπρεπε να ονομασθεί **δέλτα κατανομή** αλλά η ονομασία **δέλτα συνάρτηση** αποτελεί μέρος μιας μακράς παράδοσης.

είναι όλα συνεχείς απεικονίσεις στο σώμα των μιγαδικών αριθμών). Ας δούμε ένα παράδειγμα:

Ας θεωρήσουμε ότι ο χώρος L είναι ο χώρος L^2 $(-\infty,+\infty)$ δηλ. ο χώρος Hilbert των κατά Lebesgue τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων πραγματικής μεταβλητής. Ο χώρος αυτός είναι αρκετά "μικρός" με την έννοια ότι αποτελείται μόνο από τις τετραγωνικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Αλλά και ο αντίστοιχος δυϊκός χώρος L^* είναι επίσης μικρός. Επίσης έχει τις ίδιες ιδιότητες με τον L. Πράγματι από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz ξέρουμε ότι ο δυϊκός χώρος L^* είναι "ουσιαστικά" ο ίδιος με τον L με την έννοια ενός ισομετρικού ισομορφισμού. Έτσι στοιχεία του L^* μπορούν βασικά να ταυτισθούν με στοιχεία του L.

Ας σχηματίσουμε τώρα ένα χώρο L, αποτελούμενο από ένα άλλο σύνολο συναρτήσεων πραγματικής μεταβλητής και από μια άλλη τοπολογία που ίσως δεν προέρχεται από norm. Η παραπάνω κατασκευή του L μπορεί να γίνει έτσι ώστε ο δυϊκός χώρος L^* να αποτελείται από ένα μεγάλο σύνολο συνεχών γραμμικών συναρτησοειδών με αρκετά καλές ιδιότητες.

Από τι περιμένουμε, στη γενική περίπτωση, να αποτελείται ο δυϊκός χώρος L^*;

Μερικά στοιχεία του L^* θα γεννούνται από στοιχεία του L. Πράγματι είναι πιθανό να υπάρχουν ορισμένα στοιχεία $f\in L$ τέτοια ώστε το ολοκλήρωμα:

$$\int f(x)\varphi(x)dx \tag{1}$$

να υπάρχει για κάθε $\varphi\in L$ και

$$F_f(\varphi)=\int f(x)\varphi(x)dx \quad \forall\varphi\in L \tag{2}$$

να είναι ένα συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές πάνω στον L. Τότε σ' αυτή την περίπτωση μπορούμε να ταυτίσουμε το $F_f\in L^*$ με το $f\in L$. Αλλά προφανώς θα έχουμε περισσότερα στοιχεία στον δυϊκό χώρο L^* . Πιθανόν να υπάρχουν ορισμένες συναρτήσεις h που δεν ανήκουν στον L, αλλά για τις οποίες υπάρχει το ολοκλήρωμα

$$\int h(x)\varphi(x)dx \quad \forall\varphi\in L \tag{3}$$

και το F_h που ορίζεται από

$$F_h(\varphi)=\int h(x)\varphi(x)dx \quad \forall\varphi\in L \tag{4}$$

να είναι ένα συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές. Τελικά είναι πιθανό ένα υποσύνολο του L^* να μη μπορεί να γεννηθεί από κάποιες συναρτήσεις h με τη μορφή του ολοκληρώματος (3).

Έτσι ο δυϊκός χώρος L^* θα είναι κατά κάποια έννοια μια γενίκευση του συνόλου των συναρτήσεων που μπορούν να γεννήσουν στοιχεία του L^* . Επομένως δεν είναι παράλογο να θεωρήσουμε τον δυϊκό χώρο L^* σαν ένα σύνολο "**γενικευμένων συναρτήσεων**". Φυσικά πρέπει να γίνει κατανοητό ότι τα στοιχεία του L^* , (δηλ. οι γενικευμένες συναρτήσεις), <u>δεν είναι συναρτήσεις που ορίζονται στους πραγματικούς αριθμούς R, αλλά απεικονίσεις που ορίζονται πάνω στον L</u>. (Από την άλλη μεριά το πεδίο τιμών των γενικευμένων συναρτήσεων F και των συναρτήσεων φ είναι το ίδιο: οι μιγαδικοί αριθμοί). Μπορεί κανείς να περιμένει, με μια έξυπνη εκλογή του L, ότι ο δυϊκός χώρος L^* των γενικευμένων συναρτήσεων να μπορεί να "κληρονομήσει" κάποιες καλές ιδιότητες του L και ίσως να είναι ένας χώρος όπου πολλά πράγματα μπορούν να γίνουν τα οποία δεν επιτρέπονται για τις συναρτήσεις που μπορούν να γεννήσουν στοιχεία του L^* . (Π.χ. μπορεί κανείς να ορίσει διαφορισιμότητα στον L^* ή μετασχηματισμούς Fourier στον L^* πιο ελευθέρα απ' ότι στο σύνολο των συναρτήσεων).

Οι χώροι των γενικευμένων συναρτήσεων εμφανίζονται σε πολλούς κλάδους της μαθηματικής φυσικής, δίνοντας λύσεις σε προβλήματα διαφορικών ή ολοκληρωτικών εξισώσεων, αντικαθιστώντας ιδιάζουσες συναρτήσεις {…f…} με αντίστοιχες συνεχείς και καλώς συμπεριφερόμενες γενικευμένες συναρτήσεις {…F_f…} και δίνοντας αυστηρή ερμηνεία σε πολλά τυπικά τεχνάσματα της φυσικής, τα οποία με την συνήθη έννοια δεν δικαιολογούνται, (π.χ. η δ συνάρτηση του Dirac). Επίσης παίζουν σπουδαίο ρόλο στις αναπτύξεις των γενικευμένων ιδιοσυναρτήσεων και κατ' επέκταση στη θεωρία των ομάδων αναπαραστάσεων σε χώρους Hilbert.

Έστω L ένας τοπολογικός γραμμικός χώρος, ο οποίος αποτελείται από μιγαδικές, (ή πραγματικές), συναρτήσεις φ πραγματικής μεταβλητής. Θα αναφερόμαστε στον L σαν ο **χώρος των δοκιμαστικών**, (**test**), **συναρτήσεων** και στα στοιχεία του φ σαν **δοκιμαστικές συναρτήσεις**. Το **στήριγμα**, (**support**), μιας δοκιμαστικής συνάρτησης, (ή μιας οποιασδήποτε συνάρτησης), είναι το **κλείσιμο**, (**closure**), του συνόλου των στοιχείων x του πεδίου ορισμού της φ για τα οποία έχουμε $\varphi(x)\neq 0$. (Μ' αλλά λόγια, το στήριγμα της φ είναι το συμπλήρωμα του μεγαλύτερου ανοικτού συνόλου του R πάνω στο οποίο η φ μηδενίζεται). Μια συνάρτηση φ λέμε ότι έχει **συμπαγές**, (**compact**), υποστήριγμα εάν η φ μηδενίζεται έξω από ένα φραγμένο και κλειστό υποσύνολο του R.

Κάθε συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές πάνω σ' ένα χώρο L δοκιμαστικών συναρτήσεων ονομάζεται **γενικευμένη συνάρτηση**, (η οποία ανήκει στο χώρο L^*). Μια γενικευμένη συνάρτηση F, που γεννάται από κάποιο στοιχείο f του χώρου των δοκιμαστικών συναρτήσεων, με την έννοια ότι:

$$F(\varphi)=\int f(x)\varphi(x)dx \quad \forall\varphi\in L$$

θα ταυτίζεται με τον γεννήτορα του f. Πρέπει όμως να σημειώσουμε ότι σ' αυτή την ταυτοποίηση όλες οι συναρτήσεις f που διαφέρουν μόνο σ' ένα σύνολο μέτρου μηδέν ταυτίζονται με την F.

Μια γενικευμένη συνάρτηση F, που μπορεί να παρασταθεί από κάποια συνάρτηση h, (που δεν ανήκει αναγκαστικά στον L), από τον τύπο:

$$F(\varphi)=\int h(x)\varphi(x)dx \quad \forall\varphi\in L$$

ονομάζεται **κανονική**, (**regular**), γενικευμένη συνάρτηση. Κάθε άλλη γενικευμένη συνάρτηση ονομάζεται **ιδιάζουσα**, (**singular**).

Η απλούστερη γενικευμένη συνάρτηση, (για κάθε χώρο δοκιμαστικών συναρτήσεων), είναι η σταθερή C, οριζόμενη από την σχέση

$$C(\varphi)=\int C\varphi(x)dx=C\int\varphi(x)dx$$

και προφανώς είναι κανονική.

Το άθροισμα δυο γενικευμένων συναρτήσεων F και G και το γινόμενο μιας γενικευμένης συνάρτησης F μ' ένα μιγαδικό αριθμό α ορίζονται απλά ως εξής:

$$(F+G)(\varphi) = F(\varphi)+G(\varphi)$$

$$(\alpha F)\varphi = F(\alpha\varphi)$$

Το μιγαδικό συζυγές μιας γενικευμένης συνάρτησης ορίζεται:

$$F^*(\varphi)= [F(\varphi^*)]^*$$

Για να μπορέσουμε να σχηματίσουμε, με την περιορισμένη έννοια, γινόμενα μεταξύ των γενικευμένων συναρτήσεων, πρέπει να εισάγουμε την βοηθητική έννοια του πολλαπλασιαστή. Μια τυχαία συνάρτηση α(x) ονομάζεται **πολλαπλασιαστής**, εάν:

1) $(\forall\varphi\in L)[\ \alpha\varphi\in L\ ]$ και

2) $\varphi_n \to 0 \Rightarrow \alpha\varphi_n \to 0$, (όπου η σύγκλιση εννοείται ως προς την τοπολογία του L).

Κάθε πολλαπλασιαστής α ορίζει μια κανονική γενικευμένη συνάρτηση A, διότι το $A(\varphi)=\int\alpha(x)\varphi(x)dx$ είναι ένα συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές. Ονομάζουμε το A, θεωρούμενο σαν γενικευμένη συνάρτηση, επίσης πολλαπλασιαστή. Έστω τώρα F μια τυχαία γενικευμένη συνάρτηση και A ένας πολλαπλασιαστής. Μπορούμε τώρα να ορίσουμε ένα νέο συναρτησοειδές AF από τη σχέση:

$$(AF)(\varphi) = F(\alpha\varphi)$$

Πράγματι, το AF είναι ένα συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές, διότι εάν $\varphi_n \to 0$ τότε $\alpha\varphi_n \to 0$ και επομένως αφού το F είναι συνεχές το $Af(\varphi_n) \to 0$. Επί πλέον εάν η F είναι κανονική, κανονική είναι και η AF. Πρέπει να προσέξουμε ότι σ' αντίθεση με τις συνήθεις συναρτήσεις, οι γενικευμένες συναρτήσεις δεν μπορούν να πολλαπλασιάζονται ελεύθερα. Συγκεκριμένα το γινόμενο δυο ιδιαζουσών γενικευμένων συναρτήσεων δεν ορίζεται.

Επειδή μια γενικευμένη συνάρτηση δεν είναι απεικόνιση που να ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς, δεν έχει νόημα να ρωτάμε: "ποια είναι η τιμή της F στο $x_0\in R$;" Παρ' όλα αυτά είναι δυνατό να μιλάμε για την "τιμή της F στην γειτονία $N(x_0)$ του x_0 " Συγκεκριμένα λέμε ότι η F ισούται με το μηδέν στην γειτονία $N(x_0)$ του x_0 , εάν και μόνο εάν, για κάθε συνάρτηση $\varphi\in L$, η οποία έχει το στήριγμα της στη γειτονία $N(x_0)$, (και επομένως μηδενίζεται παντού έξω από την $N(x_0)$), $F(\varphi)=0$. Συγκεκριμένα, εάν F είναι κανονική και γεννάται από μια, (κατά τμήματα) συνεχή συνάρτηση h και εάν F=0 στη $N(x_0)$, τότε η γεννήτρια συνάρτηση h της F μηδενίζεται στη $N(x_0)$.

Μπορούμε να προχωρήσουμε πάρα πέρα και να πούμε ότι μια γενικευμένη συνάρτηση μηδενίζεται σ' ένα ανοικτό σύνολο V του R εάν, σύμφωνα με τα παραπάνω, μηδενίζεται σε κάποια γειτονία κάθε σημείου x του V. Αυτό μας δίνει την δυνατότητα να μιλάμε για το στήριγμα μιας γενικευμένης συνάρτησης:

Το στήριγμα της F είναι το κλείσιμο του ανοικτού συνόλου $V\subset R$ στο οποίο το F δεν μηδενίζεται, (ή αλλιώς, είναι το μικρότερο κλειστό σύνολο εκτός του οποίου η F μηδενίζεται). Εύκολο είναι να δούμε ότι εάν η F είναι κανονική και γεννάται από κάποια, (κατά τμήματα), συνεχή συνάρτηση h, τότε το στήριγμα της F είναι ακριβώς το στήριγμα της h, (κατά την συνήθη έννοια).

Δυο γενικευμένες συναρτήσεις F και G λέμε ότι είναι **ίσες** σ' ένα ανοικτό σύνολο $V\subset R$ εάν και μόνο εάν η F-G μηδενίζεται στο V. Αυτό που πρέπει να προσέξουμε είναι ότι εάν οι F και G είναι ίσες σε κάποια γειτονία κάθε σημείου $x\in R$, τότε είναι ίσες σαν συναρτησοειδή, δηλ. $f(\varphi)=G(\varphi)$ για κάθε φL. Πράγματι αποδεικνύεται ότι σε πολλές περιπτώσεις, η τοπική γνώση ενός συνεχούς γραμμικού συναρτησοειδούς στη γειτονιά κάθε σημείου ορίζει πλήρως μια F σαν ένα συναρτησοειδές στον L. Αυτό δείχνει ότι οι γενικευμένες συναρτήσεις έχουν μια συμπεριφορά, που θυμίζει πολύ τις ιδιότητες των αναλυτικών συναρτήσεων. Η ιδιότητα αυτή των γενικευμένων συναρτήσεων είναι πολύ αξιοσημείωτη.

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε, με συντομία, δυο χώρους δοκιμαστικών συναρτήσεων και τους αντιστοίχους γενικευμένους συναρτησιακούς χώρους, που συναντάμε αρκετά συχνά.

Έστω Δ ο γραμμικός χώρος που αποτελείται από όλες τις μιγαδικές συναρτήσεις φ πραγματικής μεταβλητής, που έχουν τις ιδιότητες:

α) οι φ έχει παραγώγους κάθε τάξης

β) οι φ, (και όλες οι παράγωγοι), έχουν συμπαγές υποστήριγμα.

Ας σημειώσουμε ότι το υποστήριγμα για κάθε φ μπορεί να είναι ένα διαφορετικό συμπαγές σύνολο. Επίσης από τον ορισμό προκύπτει ότι η φ και όλες οι παράγωγοι της είναι συνεχείς και μηδενίζονται όταν $|x|\to\infty$ όπως επίσης ότι είναι ολοκληρώσιμες κατά Lebesgue σ' όλη την ευθεία των πραγματικών αριθμών.

Ο γραμμικός αυτός χώρος εφοδιάζεται τότε με μια τοπολογία, η οποία μπορεί διατυπωθεί συναρτήσει μιας ανοικτής βάσης στη μηδενική συνάρτηση 0.

Μια ακολουθία $\varphi_n\in\Delta$ συγκλίνει εάν και μόνο εάν:

α) Κάθε φ μηδενίζεται έξω από κάποιο συμπαγές σύνολο C του R,

β) οι φ_n και όλες οι παράγωγοι τους συγκλίνουν ομοιόμορφα σε κάποια συνάρτηση $\varphi\in\Delta$ και στις αντίστοιχες παραγώγους της φ δηλ.

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists n_0\in N)(\forall n\geq n_0)(\forall x\in C)\left[\left|\frac{d^p}{dx^p}\big(\varphi_n(x)-\varphi(x)\big)\right|\langle\varepsilon\right]\quad p=0,1,2,\ldots$$

Ένα παράδειγμα δοκιμαστικής συνάρτησης, που ανήκει στον χώρο Δ είναι το εξής: Έστω ένας θετικός αριθμός α>0 και έστω

$$\varphi(x)=\begin{cases}\exp\left(-\dfrac{\alpha^2}{\alpha^2-x^2}\right) & |x|\langle\alpha\\ 0 & |x|\geq\alpha\end{cases}$$

Θεωρούμε τώρα την ακολουθία φ_n , που δίνεται από τον τύπο:

$$\varphi_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}\exp\left(-\dfrac{\alpha^2}{\alpha^2-x^2}\right) & |x|\langle\alpha\\ 0 & |x|\geq\alpha\end{cases}$$

Η ακολουθία αυτή συγκλίνει στη μηδενική συνάρτηση, $\varphi_n\to 0$, ως προς την τοπολογία του Δ. Από την άλλη πλευρά η ακολουθία φ_n , που δίνεται από τον τύπο:

$$\varphi_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}\exp\left(-\dfrac{n^2\alpha^2}{n^2\alpha^2-x^2}\right) & |x|\langle\alpha\\ 0 & |x|\geq\alpha\end{cases}$$

δεν συγκλίνει, διότι ακόμα και αν η φ_n και όλες οι παραγωγοί συγκλίνουν ομοιόμορφα στη μηδενική συνάρτηση, δεν υπάρχει κοινό συμπαγές σύνολο, έξω από το οποίο όλες οι φ_n να μηδενίζονται.

Οι γενικευμένες συναρτήσεις πάνω στον χώρο Δ, (δηλ. στοιχεία του Δ), συνήθως ονομάζονται **κατανομές**.

Παράδειγμα 6.5.1 Έστω f μια τοπικά ολοκληρώσιμη μιγαδική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής. (Αυτό σημαίνει ότι η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του R. Θέτουμε:

$$F(\varphi)=\int f(x)\varphi(x)dx\quad\forall\varphi\in\Delta$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα είναι καλώς ορισμένο διότι η φ έχει ένα συμπαγές υποστήριγμα στο οποίο είναι συνεχής, άρα φραγμένη, και επομένως η ολοκληρωτές ποσότητα ικανοποιεί τη σχέση:

$$|f(x)\varphi(x)| \leq (\max|\varphi(x)|)|f(x)| = k|f(x)|$$

η οποία συνεπάγεται την ολοκληρωσιμότητα. Η γραμμικότητα της F είναι προφανής και η συνεχεία προκύπτει εάν παρατηρήσουμε ότι

$$\left|F(\varphi_n) - F(\varphi)\right| = \left|\int_C f(x)\left[\varphi_n(x) - \varphi(x)\right]dx\right| \leq \int_C |f(x)||\varphi_n(x) - \varphi(x)|\,dx \leq$$

$$\leq \sup \varphi_n(x) - \varphi(x)| \int_C |f(x)|\,dx$$

και ομοιόμορφη σύγκλιση της $\varphi_n(x)$ συνεπάγεται ότι το δεξιό μέλος τείνει στο μηδέν όταν $n\to\infty$. Έτσι η F, όπως ορίσθηκε παραπάνω, είναι μια κατανομή και μάλιστα κανονική.

Το γεγονός ότι μόνο η τοπική ολοκληρωσιμότητα της f εγγυάται την ύπαρξη μιας αντίστοιχης γενικευμένης συνάρτησης F, είναι ένα ειδικό χαρακτηριστικό των κατανομών. Για γενικευμένες συναρτήσεις σε χώρους δοκιμαστικών συναρτήσεων άλλους από τον Δ, πρέπει να επιβάλλουμε στην f πρόσθετους περιορισμούς, που αφορούν την συμπεριφορά όταν το $x\to\pm\infty$, εάν θέλουμε να γεννά μια γενικευμένη συνάρτηση. Αντίστροφα, όλες οι κανονικές κατανομές F, (δηλ. όλες οι κανονικές γενικευμένες συναρτήσεις πάνω στον Δ), μπορεί να δειχθεί ότι αντιστοιχούν σε τοπικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις f. Ένα ειδικά απλό παράδειγμα μιας κανονικής κατανομής είναι η σταθερά C, όπως ορίσθηκε προηγούμενα.

Παράδειγμα 6.5.2 Η πιο γνωστή ιδιάζουσα κατανομή είναι η δ συνάρτηση, η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$\delta(\varphi) \equiv \varphi(0)$$

Είναι προφανές ότι είναι ένα γραμμικό συναρτησοειδές και είναι συνεχής διότι:

$$|\delta(\varphi_n) - \delta(\varphi)| = |\varphi_n(0) - \varphi(0)| \to 0$$

εάν η φ_n συγκλίνει. Αυτή η δ-κατανομή σχετίζεται στενά με την συμβολική δ-συνάρτηση των φυσικών, που ορίζεται από την εξίσωση

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0) \qquad (\alpha)$$

Είναι φανερό ότι η δ(x) σαν συνάρτηση δεν έχει νόημα: δεν υπάρχει συνάρτηση για την οποία η (α) να μπορεί να ισχύει. Έτσι το συναρτησοειδές δ είναι ιδιάζον. Ο τύπος (α) χρησιμοποιείται συνήθως σαν ορισμός του δ-συναρτησοειδούς, για να τονίσουμε ότι το δ δρα πάνω στο χώρο των δοκιμαστικών συναρτήσεων για να δώσει την τιμή φ(0) για κάθε φ.

Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι το υποστήριγμα του δ-συναρτησοειδούς είναι το μονοσύνολο {0} του R. Αυτό δικαιολογεί και δίνει κάποιο νόημα σ' αυτό που λένε οι φυσικοί ότι "η δ-συνάρτηση μηδενίζεται παντού εκτός από το σημείο x=0".

Υπάρχουν και άλλες δηλώσεις που αφορούν την δ-συνάρτηση του Dirac και που έχουν νόημα στη θεωρία των γενικευμένων συναρτήσεων. Π.χ η γνωστή εξίσωση:

$$x\delta(x) = 0$$

έχει το εξής νόημα: Παρατηρούμε πρώτα ότι στον χώρο Δ κάθε συνάρτηση α(x), που είναι συνεχής και έχει συνεχείς παραγώγους όλων των τάξεων, είναι ένας πολλαπλασιαστής. Τότε από τον ορισμό των γινόμενων, εάν το A αντιστοιχεί στο α(x), έχουμε:

$$A\delta(x) = \delta(\alpha\varphi) = \alpha(0)\varphi(0) = \alpha(0)\delta(\varphi)$$

Παίρνοντας συγκεκριμένα α(x)=x έχουμε

$$x\delta(\varphi) = 0\delta(\varphi) = 0$$

έτσι ώστε ο τυπικός γεννήτορας xδ(x) είναι πράγματι μηδέν για κάθε x.

6.6 Διαφόριση και ολοκλήρωση των γενικευμένων συναρτήσεων.

Όπως είναι γνωστό, υπάρχουν συνήθεις συναρτήσεις που δεν είναι διαφορίσιμες, (τουλάχιστον σ' ένα σημείο του πεδίου ορισμού τους). Αυτό δεν συμβαίνει στις γενικευμένες συναρτήσεις. Θα δούμε αμέσως παρακάτω ότι όλες οι γενικευμένες συναρτήσεις έχουν παραγώγους κάθε τάξης, που είναι και αυτές γενικευμένες συναρτήσεις. Προτού δώσουμε τον ορισμό της παραγώγου μιας γενικευμένης συνάρτησης, ας μελετήσουμε πρώτα μια συνήθη συνάρτηση f(x), η οποία είναι συνεχής με συνεχή την πρώτη παράγωγο f′(x) και ας θεωρήσουμε το συναρτησοειδές:

$$F'(\varphi(x))=\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx \qquad (1)$$

όπου φ(x) μια δοκιμαστική συνάρτηση, που μηδενίζεται έξω από κάποιο κλειστό διάστημα [α,β]. Τότε θα έχουμε:

$$F'(\varphi(x))=\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx = f(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx =$$

$$=-\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx = F((-\varphi'(x)) \qquad (2)$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση (2) μπορούμε τώρα να ορίσουμε την παράγωγο μιας γενικευμένης συνάρτησης.

Έστω F ένα συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές ορισμένο πάνω στον χώρο L των δοκιμαστικών συναρτήσεων φ(x). Το συναρτησοειδές F′, που ορίζεται από τη σχέση

$$F'(\varphi(x))\equiv F(-\varphi'(x)) \qquad (3)$$

ονομάζεται **παράγωγος της γενικευμένης συνάρτησης** F και συμβολίζεται με F′ ή $\frac{dF}{dx}$.

Εάν f(x) είναι ο γεννήτορας της F με την έννοια ότι:

$$F(\varphi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx \qquad (4)$$

τότε η σχέση (3) γράφεται:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx =-\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx \qquad (5)$$

Για να συμπληρώσουμε τον ορισμό της παραγωγού (3) μιας γενικευμένης συνάρτησης, πρέπει να δείξουμε ότι η F′ είναι επίσης ένα συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές. Πράγματι, ας θεωρήσουμε μια ακολουθία δοκιμαστικών συναρτήσεων $\varphi_n(x)$ που συγκλίνει στο μηδέν. Τότε και η ακολουθία $-\varphi'_n(x)$ συγκλίνει στο μηδέν. Επειδή όμως η γενικευμένη συνάρτηση F είναι συνεχής, θα έχουμε:

$$F'(\varphi_n(x))=F(-\varphi'_n(x)) \to 0 \quad \text{για } n\to\infty$$

Τελικά κάθε γενικευμένη συνάρτηση F έχει παράγωγο. Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι οι γνωστοί κανόνες παραγώγισης ισχύουν και για τις γενικευμένες συναρτήσεις.

Παρατήρηση 6.6.1: Μια συνήθης συνάρτηση που δεν είναι παραγωγίσιμη, (υπάρχει δηλ. τουλάχιστον ένα σημείο x_0 στο οποίο δεν υπάρχει η παράγωγος), είναι παραγωγίσιμη με την έννοια των γενικευμένων συναρτήσεων. Δηλαδή κάθε συνήθης μη παραγωγίσιμη συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη με την έννοια των γενικευμένων συναρτήσεων.

Άσκηση: Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=|x|$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε διάστημα, που περιέχει το μηδέν, με την έννοια των κατανομών.

Απόδειξη: Έστω F το γραμμικό συναρτησοειδές που αντιστοιχεί στην συνάρτηση $f(x)=|x|$. Θα έχουμε: $F(\varphi(x))=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\varphi(x)dx$ και η παράγωγος F′ του συναρτησοειδούς F δίνεται από τον τύπο: $F'(\varphi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\left(-\varphi'(x)\right)dx=-\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\varphi'(x)dx$ το δε τελευταίο ολοκλήρωμα πάντα υπάρχει.

Παρατήρηση 6.6.2 Μπορούμε επίσης να ορίσουμε την παράγωγο μιας γενικευμένης συνάρτησης σαν το όριο ενός πηλίκου διαφορών κατ' αναλογία με τον γνωστό ορισμό της παραγώγου μιας συνήθους συνάρτησης. Κατ' αρχήν παρατηρούμε ότι:

$$F_{x+\Delta x}(\varphi(x))=F(\varphi(x-\Delta x)) \tag{1}$$

δηλ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x+\Delta x\right)\varphi\left(x\right)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x\right)\varphi\left(x-\Delta x\right)dx \tag{2}$$

Στη συνεχεία θα δούμε ότι για οποιαδήποτε γενικευμένη συνάρτηση F, το όριο, (με την έννοια των κατανομών), του λόγου:

$$\frac{F_{x+\Delta x}-F_x}{\Delta x} \tag{3}$$

υπάρχει για $\Delta x \to 0$ και ότι αυτό το όριο είναι ακριβώς η παράγωγος F′, όπως ορίσθηκε παραπάνω. Εφαρμόζοντας την (1) στην (3) έχουμε:

$$\left(\frac{F_{x+\Delta x}-F_x}{\Delta x}\right)\left(\varphi\left(x\right)\right)=F\left(\frac{\varphi\left(x-\Delta x\right)-\varphi\left(x\right)}{\Delta x}\right)$$

Η έκφραση: $\dfrac{\varphi\left(x-\Delta x\right)-\varphi\left(x\right)}{\Delta x}$ συγκλίνει στο όριο $-\varphi'(x)$ όταν $\Delta x \to 0$, και επειδή η F είναι συνεχές συναρτησοειδές, έπεται ότι:

$$\left(\frac{F_{x+\Delta x}-F_x}{\Delta x}\right)\left(\varphi\left(x\right)\right)_{\Delta x\to 0}\to F\left(-\varphi'\left(x\right)\right)=F'\left(\varphi\left(x\right)\right)$$

Επομένως η έκφραση: $\dfrac{F_{x+\Delta x}-F_x}{\Delta x}$ συγκλίνει στο συναρτησοειδές F′

Παράδειγμα 6.6.1: Θεωρούμε την συνάρτηση βήματος:

$$u(x)=\begin{cases} 1 & x\rangle 0 \\ 0 & x\langle 0 \end{cases}$$

Με το ίδιο γράμμα θα συμβολίζουμε το αντίστοιχο συναρτησοειδές. Βάσει των παραπάνω, η παράγωγος της συνάρτησης βήματος υπολογίζεται ως εξής

$$u'(\varphi(x))=u(-\varphi'(x)) \Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u'(x)\varphi(x)dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\varphi'(x)dx = -\int_{0}^{+\infty} \varphi'(x)dx = -\varphi(x)\Big|_0^{\infty} = \varphi(0) \qquad \text{επειδή } \varphi(\infty)=0$$

δηλ. $$\int_{-\infty}^{+\infty} u'(x)\varphi(x)dx = \varphi(0)$$

Άρα η παράγωγος της συνάρτησης βήματος είναι η δέλτα συνάρτηση:

$$u'(x)=\delta(x)$$

Θεωρούμε στη συνεχεία δυο γενικευμένες συναρτήσεις F και G. Η γενικευμένη συνάρτηση G ονομάζεται **ολοκλήρωμα** της F εάν ισχύει:

$$G'(\varphi(x))=G(-\varphi'(x))\equiv F(\varphi(x))$$

6.7 Διαφορικές Εξισώσεις για γενικευμένες συναρτήσεις

Εφ' όσον οι γενικευμένες συναρτήσεις είναι διαφορίσιμες, μπορούν να είναι λύσεις Δ.Ε.. Επειδή η θεωρία των γενικευμένων συναρτήσεων είναι γραμμική, οι Δ.Ε., που θα ικανοποιούνται από γενικευμένες συναρτήσεις, θα είναι γραμμικές, δηλ. **L**y=f, όπου **L** ένας γραμμικός διαφορικός τελεστής.

Ας υποθέσουμε ότι η f είναι μια "καλώς συμπεριφερόμενη" συνάρτηση. Τότε η Δ.Ε. **L**y=f μπορεί να θεωρηθεί σαν μια "κλασική" Δ.Ε., (για συναρτήσεις), ή μια Δ.Ε. για γενικευμένες συναρτήσεις.

Εάν η Δ.Ε. δεν έχει ανώμαλα σημεία, τότε αποδεικνύεται ότι έχει μόνο "κλασικές" λύσεις. Π.χ. η Δ.Ε.:

$$\frac{dy}{dx}=0$$

έχει την λύση y=c=σταθ., η οποία μπορεί να θεωρηθεί και σαν γενικευμένη συνάρτηση.

Η παρουσία όμως ανωμάλων σημείων στη Δ.Ε. μπορεί να δώσει κάποιες "ιδιόμορφες" λύσεις. Π.χ. η Δ.Ε.:

$$x\frac{dy}{dx}=0$$

για x<0 έχει λύση την $y(x)=c_1$=σταθ. και για x>0 την $y(x)=c_2$=σταθ. όπου εν γένει $c_1 \neq c_2$. Επίσης παρατηρούμε ότι η συνάρτηση βήματος S(x), (θεωρώντας την σαν γενικευμένη συνάρτηση), ικανοποιεί την Δ.Ε., διότι $u'(x)=\delta(x)$ και ξέρουμε ότι $x\delta(x)=0$ Έτσι από πλευράς κατανομών η Δ.Ε. έχει δυο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις, έστω την $y_1(x)=1$ και $y_2(x)=u(x)$ με γενική λύση:

$$y(x)=c_1+c_2u(x)$$

Η u(x) σαν "κλασική συνάρτηση" προφανώς δεν αποτελεί λύση της Δ.Ε. επειδή δεν έχει παράγωγο για x=0.

Η επόμενη Δ.Ε.: $$x^2\frac{dy}{dx}=-y$$

έχει μια κλασική λύση y=0, η οποία μπορεί να θεωρηθεί και σαν γενικευμένη συνάρτηση, όπως έχει και την κλασική λύση: $y=ce^{1/x}$. Η λύση όμως αυτή δεν μπορεί να θεωρηθεί και σαν γενικευμένη συνάρτηση, διότι δεν υπάρχει ακολουθία test συναρτήσεων ισοδύναμη προς την $ce^{1/x}$ και που να συγκλίνει ασθενώς. Και αυτό οφείλεται στο ότι το ολοκλήρωμα:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{1/x} g(x)dx$$

αποκλίνει έντονα.

Υπάρχουν Δ.Ε., που ικανοποιούνται μόνο από γενικευμένες συναρτήσεις χωρίς να έχουν καμία κλασική λύση. Οι πιο κοινές και πιο ενδιαφέρουσες από αυτές τις Δ.Ε. είναι του τύπου:

$$\mathbf{L}y=\delta(x-\xi)$$

από τις οποίες προέρχονται οι Green συναρτήσεις.

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ

Σ

Τ

Υ

Χ

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΘΕΩΡΙΑ ΟΜΑΔΩΝ

1. Group Theory in Physics Vol. I, II, III
   J. F. Cornwell. Academic Press 1984
2. Theory of Groups Representations and Applications
   A. O. Barut , R. Raczka.
   PWN - Polish Scientific Publishers Warszawa 1977
3. Lie Groups, Lie Algebras and some of their Applications
   R. Gilmore. A Wiley-Interscience Publication 1974
4. Elements of Group Theory for Physicists.
   A. W. Joshi. Wilwy Eastern Limited 1978
5. Group theory in Physics. Wu-Ki Tung. Word Scientific 1985
6. Θεωρία Ομάδων. Ι. Βέργαδος 1991

ΘΕΩΡΙΑ ΤΕΛΕΣΤΩΝ

1. Some modern Mathematics for Physicist and other outsiders Vol. I, II
   P. Roman. Pergamon Press Inc. 1975
2. Mathematics of Classical and Quantum Physics Vol. I, II
   F. Byron, R. Fuller. Addison-Wesley Publishing Company1969
3. Hilbert Space methods in Science and Engineering
   Laszlo Mate. Adam Hilger, Bristol and New York 1989
4. Finite-dimensional Vector spaces
   P. Halmos. Van Nostrand Reinhold Company 1958
5. Generalized Functions.
   R. Hoskins. Ellis Horwood Limited 1979
6. Generalized Functions Vol I, II, III
   M. Gel'fand, G. Shilov
   Academic Press 1964