Μηχανική - Ρευστομηχανική

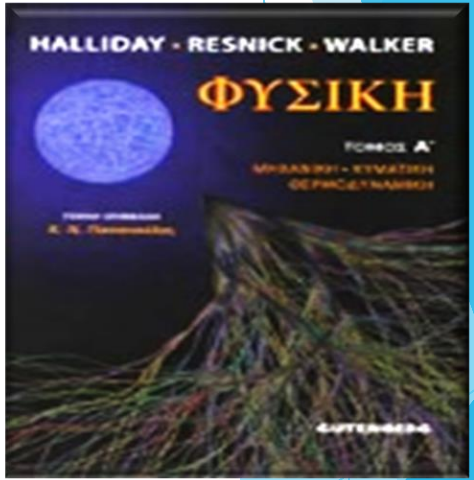
Διδάσκοντες
Παναγιώτα Καραχάλιου
Επίκουρη Καθηγήτρια, pkara@upatras.gr

Χριστόφορος Κροντηράς
Καθηγητής, krontira@physics.upatras.gr

Προτεινόμενη Βιβλιογραφία

ΦΥΣΙΚΗ ΓΙΑ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΕΣ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ, R. Serway, J. Jewett (Μετάφραση Χ. Βάρβογλης), ΚΛΕΙΔΑΡΙΘΜΟΣ ΕΠΕ

Πανεπιστημιακή Φυσική Τόμος Α΄ Μηχανική Θερμοδυναμική, Young-Freedman, Εκδόσεις Παπαζήση



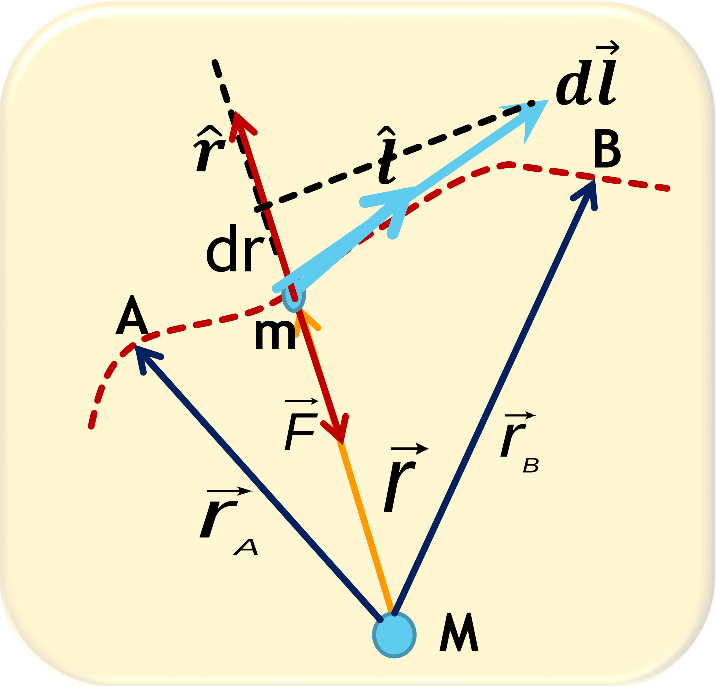
ΦΥΣΙΚΗ (Τόμος 1 Εκδ.4η), Halliday, Resnick, Walker, Εκδόσεις Gutenberg

Η έννοια του Συντηρητικού Πεδίου

Έργο βαρυτικής δύναμης

Βαρυτικό Πεδίο

Υπολογίζουμε το έργο της βαρυτικής δύναμης κατά μήκος μιας τυχαίας διαδρομής από το σημείο A στο B



$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_A^B \left(-G\frac{Mm}{r^2}\right)\hat{r}\cdot dl\hat{l} =$$

$$-GMm\int_A^B \left(\frac{dl}{r^2}\right)\hat{r}\cdot\hat{l} = -GMm\int_A^B \frac{dl}{r^2}\cos\theta$$

Αλλά $\quad dl\cos\theta = dr \quad$ Οπότε:

$$-GMm\int_A^B \frac{dl}{r^2}\cos\theta = -GMm\int_{r_A}^{r_B}\frac{dr}{r^2}$$

Τελικά:

$$W_{A\to B} = -\frac{GMm}{r_A} - \left(-\frac{GMm}{r_B}\right) = U_A - U_B$$

Συντηρητική Δύναμη

Το έργο της βαρυτικής δύναμης είναι ανεξάρτητο της διαδρομής και εξαρτάται μόνο από την αρχική και τελική θέση

Η έννοια του συντηρητικού πεδίου

- **Συντηρητικό πεδίο** ονομάζεται το πεδίο εκείνο στο οποίο το έργο που παράγεται από τη δύναμη του πεδίου εξαρτάται μόνο από την αρχική και την τελική θέση και όχι από τη διαδρομή που ακολουθείται.

- **Συντηρητικό πεδίο** ονομάζεται το πεδίο εκείνο στο οποίο το έργο της δύναμης του πεδίου κατά μήκος μιας κλειστής διαδρομής είναι μηδέν.

- Υπάρχουν άπειρες διαδρομές που ενώνουν δύο σημεία του πεδίου. Το έργο της δύναμης του πεδίου κατά μήκος όλων αυτών των διαδρομών είναι το ίδιο.

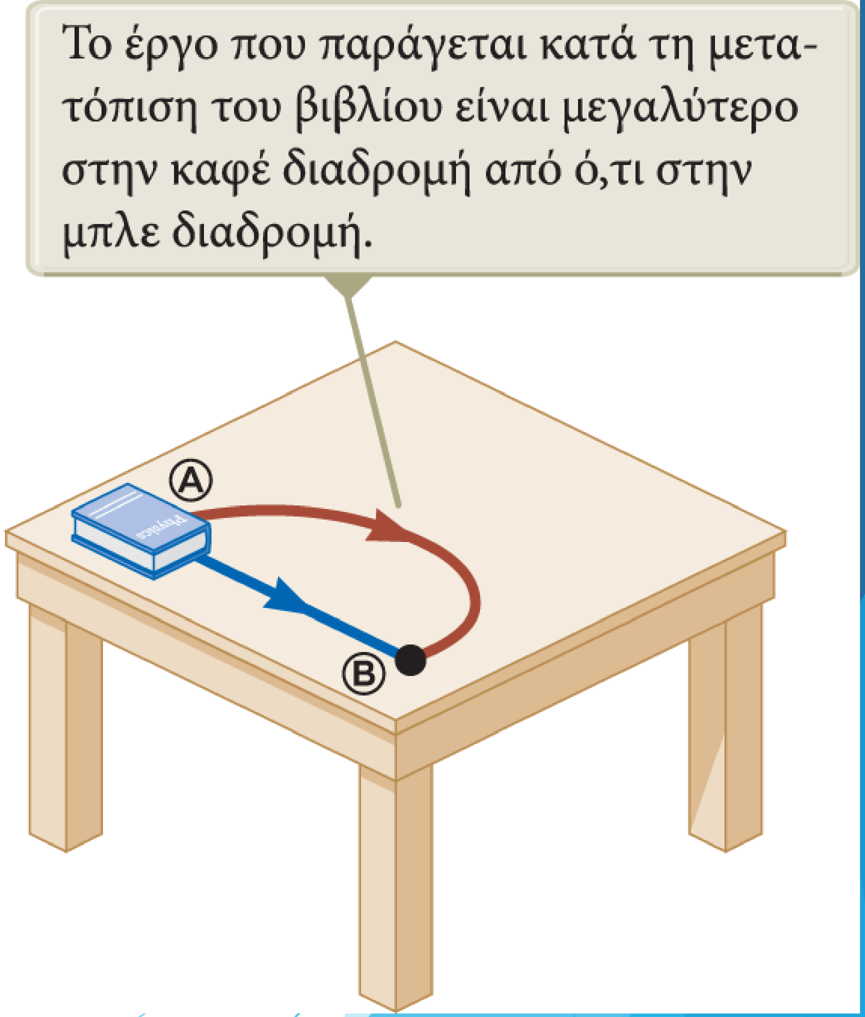
- **ΤΟ ΒΑΡΥΤΙΚΟ ΚΑΙ ΤΟ ΗΛΕΚΤΡΟΣΤΑΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ ΕΙΝΑΙ ΣΥΝΤΗΡΗΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ.**

Συντηρητικές και μη Συντηρητικές δυνάμεις

- Το έργο που παράγει μια συντηρητική δύναμη σε ένα σωματίδιο, το οποίο κινείται μεταξύ δύο οποιωνδήποτε σημείων, (i) είναι ανεξάρτητο από την τροχιά που ακολουθεί το σωματίδιο και (ii) μηδενικό όταν η τροχιά είναι κλειστή. (Βαρύτητα, δύναμη ελατηρίου, ηλεκτροστατική δύναμη).

- Οι μη συντηρητικές δυνάμεις **(τριβή)** δεν ικανοποιούν τις ιδιότητες αυτές.

- Επειδή το έργο που παράγεται στο βιβλίο εξαρτάται από τη διαδρομή, **η τριβή** είναι μια **μη συντηρητική δύναμη**.



Η έννοια του συντηρητικού πεδίου - Δυναμική Ενέργεια

- **ΤΟ ΒΑΡΥΤΙΚΟ ΕΙΝΑΙ ΣΥΝΤΗΡΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ.**

Το έργο της δύναμης του πεδίου ισούται με τη ΔΙΑΦΟΡΑ ΤΩΝ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΕΝΕΡΓΕΙΩΝ $U_A - U_B$ στα σημεία Α και Β του πεδίου.

$$W_{A\to B} = -GMm\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

$$W_{A\to B} = U_A - U_B = -GMm\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

Εάν r_B στο άπειρο τότε:

$$U_A = -\frac{GMm}{r_A}$$

Η έννοια του συντηρητικού πεδίου - Αρχή διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας

Έχουμε ήδη αποδείξει ότι: $W_{A\to B} = K_B - K_A$

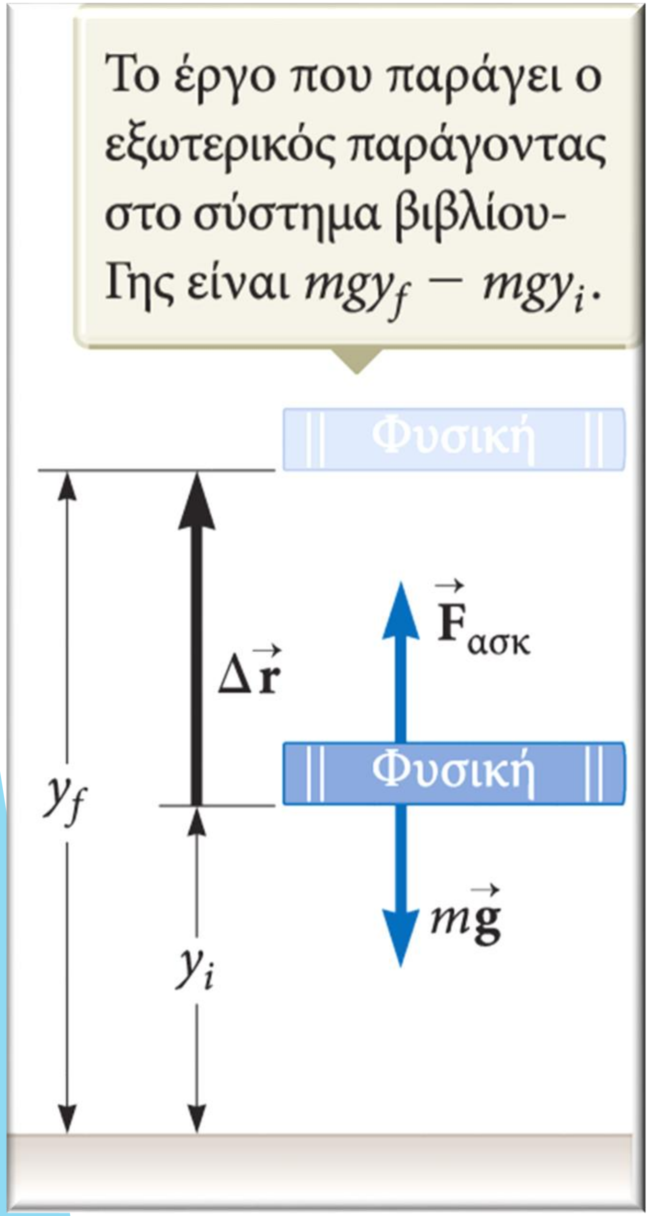
$$W_{A\to B} = U_A - U_B$$

$$W_{A\to B} = U_{\alpha\rho\chi.} - U_{\tau\varepsilon\lambda.} = K_{\tau\varepsilon\lambda.} - K_{\alpha\rho\chi.} \Rightarrow$$

$$\boxed{U_{\alpha\rho\chi.} + K_{\alpha\rho\chi.} = U_{\tau\varepsilon\lambda.} + K_{\tau\varepsilon\lambda.}}$$

ΑΡΧΗ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Βαρυτική δυναμική ενέργεια



Παράγουμε έργο στο σύστημα ανυψώνοντας κατακόρυφα το βιβλίο.

Η μετατόπιση του βιβλίου είναι: $\Delta\vec{\mathbf{r}} = (y_f - y_i)\hat{\mathbf{j}}$

Το έργο που παράγεται στο σύστημα εκδηλώνεται ως αύξηση της ενέργειας του συστήματος.

$$W_{εξωτ.} = (\vec{\mathbf{F}}_{ασκ.}) \cdot \Delta\vec{\mathbf{r}}$$

$$W_{εξωτ.} = (mg\,\hat{\mathbf{j}}) \cdot [(y_f - y_i)\hat{\mathbf{j}}]$$

$$W_{εξωτ.} = mgy_f - mgy_i$$

Η ***βαρυτική δυναμική ενέργεια*** είναι η ενέργεια που έχει ένα σώμα σε μια δεδομένη θέση πάνω από την επιφάνεια της Γης.

$$U_g = mgy \ (\mathrm{J}),$$ βαθμωτό μέγεθος

Η έννοια της Βαθμίδας Δυναμικής Ενέργειας

Η έννοια της Βαθμίδας Δυναμικής Ενέργειας

Βαρυτικό Πεδίο

$$U_A - U_B = \int_A^B \vec{F}\bullet d\vec{\ell} \Rightarrow \int_B^A dU = \int_A^B \vec{F}\bullet d\vec{\ell} \Rightarrow \int_B^A dU = -\int_B^A \vec{F}\bullet d\vec{\ell} \Rightarrow dU = -\vec{F}\bullet d\vec{\ell}$$

$$dU = -F_x dx$$

$$F_x = -\frac{dU}{dx}, \quad F_y = -\frac{dU}{dy}, \quad F_z = -\frac{dU}{dz}$$

$$\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}\right)$$

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)U$$

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U$$

ΒΑΘΜΙΔΑ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Η έννοια της Βαθμίδας Δυναμικής Ενέργειας

Βαρυτικό Πεδίο

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U$$

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k} \right)$$

Σε μία διάσταση

$$F_x = -\frac{dU}{dx} \quad F_y = -\frac{dU}{dy} \quad F_z = -\frac{dU}{dz}$$

$$F_r = -\frac{dU}{dr}$$

Δίδεται η συνάρτηση Δυναμικής Ενέργειας ενός σωματίου:

$$U(x,y) = 3x^3y - 7x$$

Να υπολογίσετε τη δύναμη F σε ένα τυχαίο σημείο (x,y) που δέχεται το σωμάτιο.

Λύση

Υπολογίσουμε κάθε παράγωγο ξεχωριστά

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx}(3x^3y - 7x) = -(9x^2y - 7)$$

$$F_y = -\frac{dU}{dy} = -\frac{d}{dy}(3x^3y - 7x) = -(3x^3 - 0) = -3x^3$$

$$\vec{F} = -(9x^2y - 7)\hat{\imath} - 3x^3\hat{\jmath}$$

Η έννοια της Βαθμίδας Δυναμικής Ενέργειας

Βαρυτικό Πεδίο

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U$$

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k} \right)$$

Σε μία διάσταση

$$F_x = -\frac{dU}{dx} \quad F_y = -\frac{dU}{dy} \quad F_z = -\frac{dU}{dz}$$

$$F_r = -\frac{dU}{dr}$$

Δίδεται η συνάρτηση Δυναμικής Ενέργειας μιας μάζας Μ μέσα σε ένα βαρυτικό πεδίο.

$$U(x, y, z) = 3x^2y + 2xz - xyz^2$$

Να υπολογίσετε τη δύναμη F που ασκείται στη μάζα Μ από το βαρυτικό πεδίο.

Λύση

Υπολογίσουμε κάθε παράγωγο ξεχωριστά

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx}(3x^2y + 2xz - xyz^2) = -(6xy + 2z - yz^2)$$

$$F_y = -\frac{dU}{dy} = -\frac{d}{dy}(3x^2y + 2xz - xyz^2) = -(3x^2 - xz^2)$$

$$F_z = -\frac{dU}{dz} = -\frac{d}{dz}(3x^2y + 2xz - xyz^2) = -(2x - 2xyz)$$

$$\vec{F} = -(6xy+2z-yz^2)\hat{\imath} - (3x^2-xz^2)\hat{\jmath} - (2x-2xyz)\hat{k}$$

Η έννοια της Βαθμίδας Δυναμικής Ενέργειας

Βαρυτικό Πεδίο

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U$$

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k} \right)$$

Σε μία διάσταση

$$F_x = -\frac{dU}{dx} \quad F_y = -\frac{dU}{dy} \quad F_z = -\frac{dU}{dz}$$

$$F_r = -\frac{dU}{dr}$$

Δίδεται η συνάρτηση Δυναμικής Ενέργειας μιας μάζας Μ που βρίσκεται σε μια τυχαία θέση στο γήινο βαρυτικό πεδίο.

$$U = -\frac{GMm}{r}$$

Να υπολογίσετε τη δύναμη F που ασκείται στη μάζα m από το γήινο βαρυτικό πεδίο.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι:

$$F_r = -\frac{dU}{dr} \Rightarrow F_r = -\frac{d}{dr}\left(-\frac{GMm}{r}\right) \Rightarrow$$

$$F_r = GMm\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right) \Rightarrow F_r = -GMm\frac{1}{r^2} \Rightarrow$$

$$F_r = -\frac{GMm}{r^2} \qquad \vec{F}_r = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$$

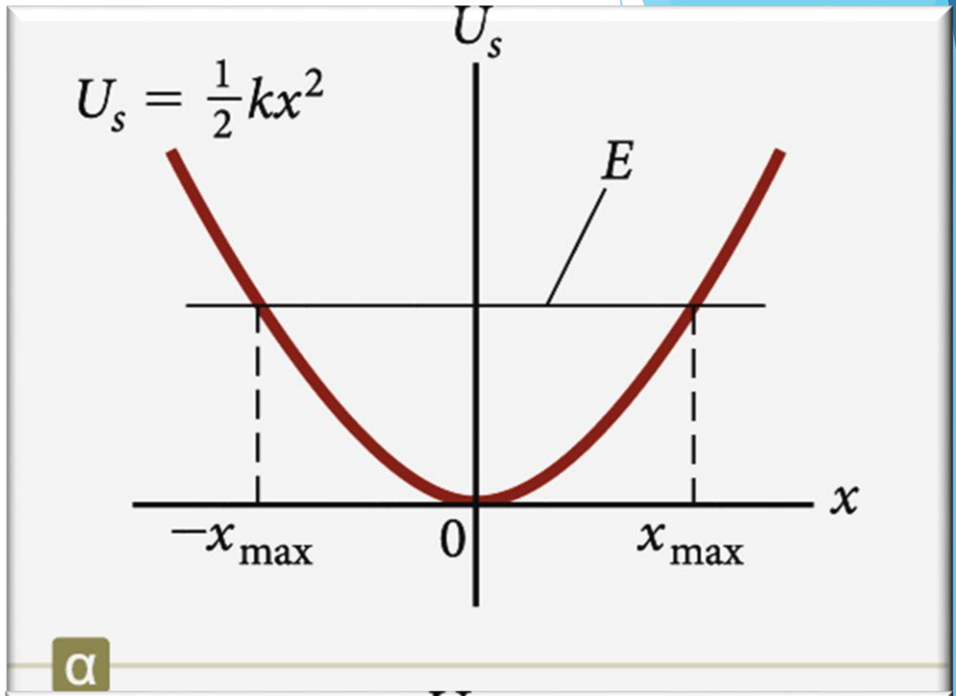
Νόμος της Παγκόσμιας έλξης

Διαγράμματα Δυναμικής Ενέργειας

Διαγράμματα ενέργειας και ευσταθούς και ασταθούς ισορροπίας-1

- Η θέση $x = 0$ είναι θέση ***ευσταθούς ισορροπίας***.
  - Οποιαδήποτε μετατόπιση μακριά από τη συγκεκριμένη θέση προκαλεί μια δύναμη με κατεύθυνση προς τη θέση $x = 0$.
- Οι διατάξεις ευσταθούς ισορροπίας αντιστοιχούν στις θέσεις εκείνες για τις οποίες η $U(x)$ έχει ελάχιστη τιμή.

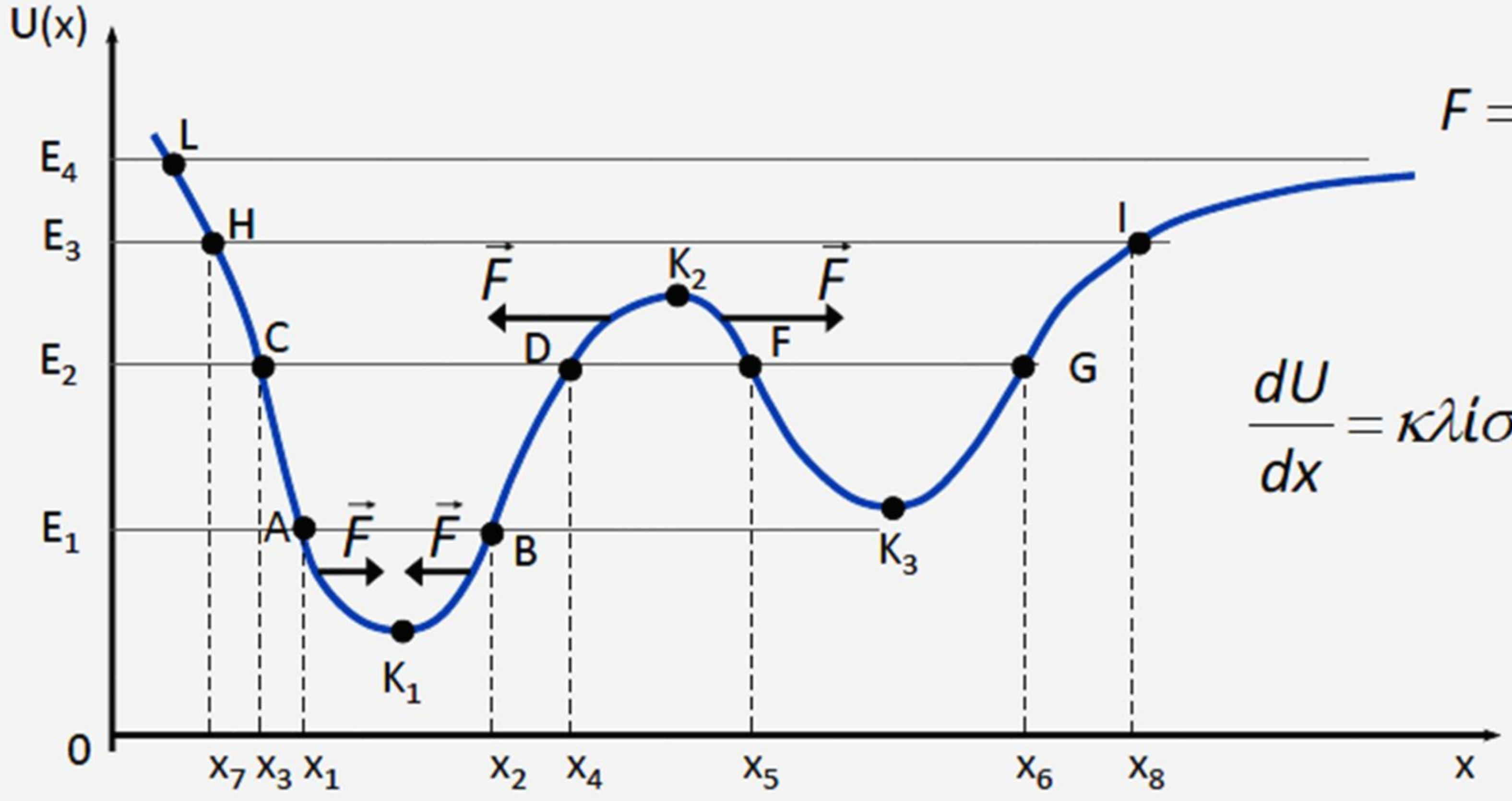
$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U$$



- Στη θέση $x = 0$, $F_x = 0$, άρα το σωματίδιο βρίσκεται σε ισορροπία.
- Για οποιαδήποτε άλλη τιμή του x, το σωματίδιο απομακρύνεται από τη θέση ισορροπίας.
- Αυτό είναι ένα παράδειγμα ***ασταθούς ισορροπίας***.
- Οι διατάξεις ασταθούς ισορροπίας αντιστοιχούν σε εκείνες τις θέσεις για τις οποίες η $U(x)$ έχει μέγιστη τιμή.

Διαγράμματα ενέργειας και ευσταθούς και ασταθούς ισορροπίας-2

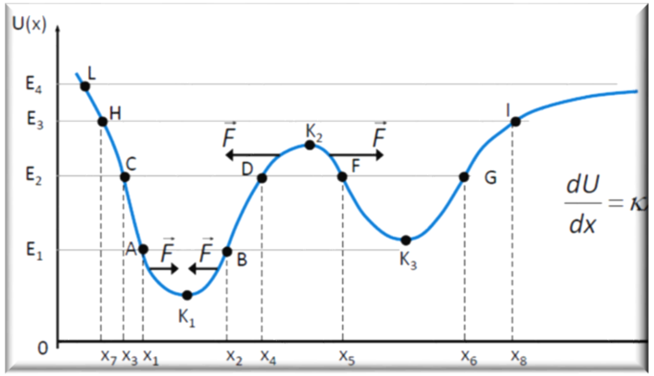
- Με τη βοήθειά τους κατανοούμε την κίνηση των σωματιδίων χωρίς να χρειάζεται να λύσουμε την εξίσωση κίνησής τους



$$F = -\frac{dU}{dx}$$

$$\frac{dU}{dx} = \kappa\lambda\acute{\iota}\sigma\eta\ \tau\eta\varsigma\ \kappa\alpha\mu\pi\acute{\upsilon}\lambda\eta\varsigma$$

Διαγράμματα ενέργειας και ευσταθούς και ασταθούς ισορροπίας-3



$$F_x = -\frac{dU}{dx}$$

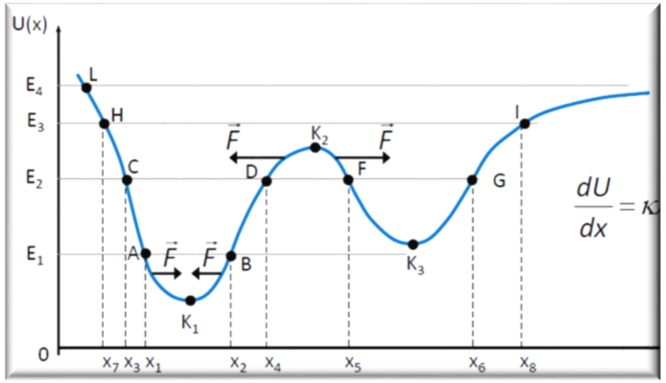
- Αυξανομένου του x, όταν η δυναμική ενέργεια αυξάνεται, η κλίση είναι θετική κι επομένως $F = -\dfrac{dU}{dx} < 0 \quad (\vec{F} \to -x)$

  Ενώ αν η δυναμική ενέργεια μειώνεται η κλίση είναι αρνητική και επομένως

  $$F = -\frac{dU}{dx} > 0 \quad \left(\vec{F} \to +x\right)$$

- Στα σημεία K_1, K_2, K_3 : $\dfrac{dU}{dx} = 0 \Rightarrow F = 0$ και αποτελούν θέσεις ισορροπίας.
- Στα K_1, K_3: η καμπύλη έχει ελάχιστο και τα K_1, K_3 είναι θέσεις **ευσταθούς ισορροπίας**
- Δηλαδή αν το σωματίδιο που βρίσκεται στις αντίστοιχες θέσεις στον άξονα x, απομακρυνθεί κατά λίγο απ' αυτές, οι δυνάμεις F δρουν σαν δυνάμεις επαναφοράς και το επαναφέρουν στη θέση ισορροπίας

Διαγράμματα ενέργειας και ευσταθούς και ασταθούς ισορροπίας-4



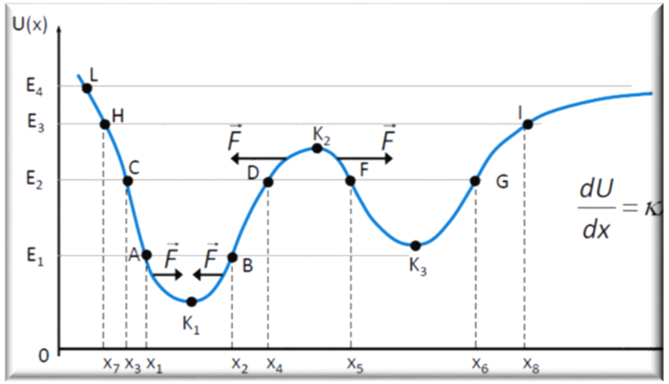
$$F_x = -\frac{dU}{dx}$$

- Στο K_2 η καμπύλη έχει μέγιστο. Το K_2 είναι θέση **ασταθούς ισορροπίας**. Δηλαδή αν κατά λίγο το σωματίδιο απομακρυνθεί απ' αυτή, οι ασκούμενες δυνάμεις το απομακρύνουν οριστικά.

- Έστω ότι δίνεται η ολική μηχανική ενέργεια E_1, όπως στο σχήμα. Αυτή τέμνει την καμπύλη στα A και B. Επειδή είναι $K_1=E_1-U_1>0$, το σωματίδιο **δε μπορεί να κινηθεί αριστερά του A**. Επομένως πρέπει $x>x_1$. Όμως **δεν μπορεί να κινηθεί και δεξιά του B** γιατί τότε θα ήταν $K<0$. Επομένως $x<x_2$ και το σώμα θα κάνει ταλάντωση μεταξύ των δύο αυτών των θέσεων

- Τα A και B λέγονται σημεία **αναστροφής**. Όταν το σωματίδιο φτάσει στις αντίστοιχες θέσεις x_1, x_2 η κινητική του ενέργεια μηδενίζεται και το σωματίδιο αντιστρέφει την κίνησή του

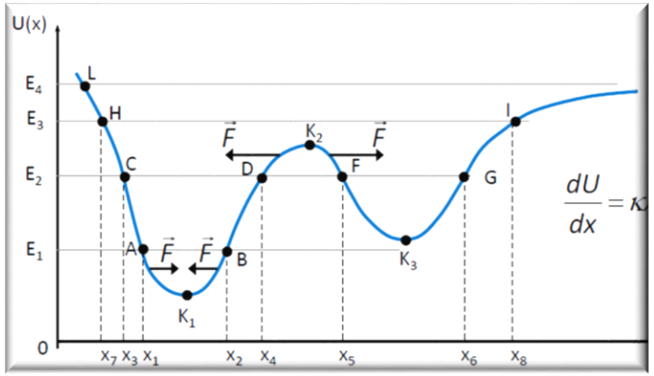
Διαγράμματα ενέργειας και ευσταθούς και ασταθούς ισορροπίας-5



$$F_x = -\frac{dU}{dx}$$

- Αν η ολική μηχανική ενέργεια είναι E_2, το σωματίδιο **δεν μπορεί να κινηθεί αριστερά του C και δεξιά του G** γιατί η κινητική του ενέργεια θα ήταν $K_2=E_2-U_2<0$. Ομοίως **δεν μπορεί να κινηθεί μεταξύ των D και F**. Δηλαδή πρέπει $x_3<x<x_4$ και $x_5<x<x_6$. Όταν το σωματίδιο βρίσκεται σε μια απ' αυτές της περιοχές δεν μπορεί να μεταπηδήσει στην άλλη. Επομένως οι δυο επιτρεπόμενες περιοχές χωρίζονται από ένα **φράγμα δυναμικού.**
- Αν $E_{ολ}=E_3$, το σωματίδιο εκτελεί ταλάντωση μεταξύ των θέσεων x_7 και x_8.
- Αν $E_{ολ}=E_4$, το σωματίδιο δεν κάνει ταλάντωση. Μπορεί να κινείται μόνο δεξιά του L απομακρυνόμενο προς το ∞ . Αν κινείτο προς τα αριστερά, μόλις φτάσει στο L αναπηδά απομακρυνόμενο προς τα δεξιά.

Διαγράμματα ενέργειας και ευσταθούς και ασταθούς ισορροπίας-6



$$F_x = -\frac{dU}{dx}$$

- **Όταν δίνεται η συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας U(r) μπορούν να υπολογιστούν οι θέσεις και το είδος ισορροπίας**

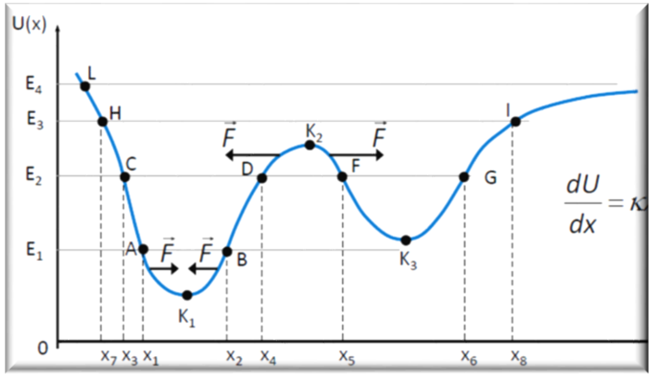
Τα βήματα που ακολουθούνται είναι:

1. Υπολογίζεται η παράγωγος $\dfrac{dU}{dr}$

2. Η δύναμη είναι $F = -\dfrac{dU}{dr}$

3. Οι θέσεις ισορροπίας υπολογίζονται θέτοντας F=0 και έστω ότι είναι η r_1, r_2 και r_3

Διαγράμματα ενέργειας και ευσταθούς και ασταθούς ισορροπίας-7



$$F_x = -\frac{dU}{dx}$$

4. Το είδος ισορροπίας προσδιορίζεται ως εξής:

α) Υπολογίζεται η $\dfrac{d^2U}{dr^2}$

β) Υπολογίζεται η τιμή της $\dfrac{d^2U}{dr^2}$ στις θέσεις ισορροπίας r_1, r_2 και r_3

γ) Αν π.χ. $\left.\dfrac{d^2U}{dr^2}\right|_{r=r_1} > 0$ η καμπύλη εμφανίζει ελάχιστο και το r_1 είναι θέση **ευσταθούς** ισορροπίας.

Αν π.χ. $\left.\dfrac{d^2U}{dr^2}\right|_{r=r_2} < 0$ η καμπύλη εμφανίζει μέγιστο και το r_2 είναι θέση **ασταθούς** ισορροπίας

Αν π.χ. $\left.\dfrac{d^2U}{dr^2}\right|_{r=r_3} = 0$ στο r_3 η ισορροπία είναι **αδιάφορη**.

Διαγράμματα ενέργειας και ευσταθούς και ασταθούς ισορροπίας-8

Βαρυτικό Πεδίο

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U$$

$$F_x = -\frac{dU}{dx}$$

$$F_y = -\frac{dU}{dy}$$

$$F_z = -\frac{dU}{dz}$$

Έστω ότι η δυναμική ενέργεια αλληλοεπίδρασης μεταξύ δύο σωματίων είναι:

$$U(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x$$

Να υπολογίσετε: i) τη δύναμη F αλληλοεπίδρασης, ii) Τις θέσεις ισορροπίας και iii) Το είδος ισορροπίας.

Λύση

i) Υπολογίσουμε την F(x)

$$\frac{dU}{dx} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x\right) = (-x^2 + x + 2)$$

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x\right) = -(-x^2 + x + 2)$$

$$\vec{F} = -(-x^2 + x + 2)\hat{\imath} = (x^2 - x - 2)\hat{\imath}$$

ii) Οι θέσεις ισορροπίας προσδιορίζονται από $\frac{dU}{dx} = 0.$

Οπότε:

$$-x^2 + x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

Στις θέσεις αυτές η συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας παρουσιάζει **ακρότατα**.

Διαγράμματα ενέργειας και ευσταθούς και ασταθούς ισορροπίας-9

Βαρυτικό Πεδίο

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U$$

$$F_x = -\frac{dU}{dx}$$

$$F_y = -\frac{dU}{dy}$$

$$F_z = -\frac{dU}{dz}$$

Έστω ότι η δυναμική ενέργεια αλληλοεπίδρασης μεταξύ δύο σωματίων είναι:

$$U(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x$$

Να υπολογίσετε: i) τη δύναμη F αλληλοεπίδρασης, ii) Τις θέσεις ισορροπίας και iii) Το είδος ισορροπίας.

Λύση - Συνέχεια…

iii) Πρέπει να ελέγξουμε εάν τα ακρότατα αυτά είναι μέγιστα ή ελάχιστα. Επομένως υπολογίζουμε την τιμή της 2ης παραγώγου της δυναμικής ενέργειας στις θέσεις που μηδενίζεται η 1η παράγωγος.

$$\frac{dU}{dx} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x\right) = (-x^2 + x + 2)$$

$$\frac{d^2U}{dx^2} = \frac{d}{dx}(-x^2 + x + 2) = (-2x + 1)$$

Επομένως για x=2 έχουμε: $\frac{d^2U}{dx^2}$ ==(-2$*$ 2+1)= $-3 < 0$ **ΜΕΓΙΣΤΟ**

για x=-1 έχουμε: $\frac{d^2U}{dx^2}$=(-2$*$ (-1)+1)= $3 > 0$ **ΕΛΑΧΙΣΤΟ**

ΜΕΓΙΣΤΟ:ΘΕΣΗ ΑΣΤΑΘΟΥΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ ΕΛΑΧΙΣΤΟ:ΘΕΣΗ ΕΥΣΤΑΘΟΥΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

Διαγράμματα ενέργειας και ευσταθούς και ασταθούς ισορροπίας-10

Έστω ότι η δυναμική ενέργεια αλληλοεπίδρασης μεταξύ δύο σωματίων δίδεται από τη σχέση:

$$\mathrm{U}(r) = re^{-ar}$$

Όπου α>0 μία σταθερά και r η απόσταση μεταξύ τους. Να υπολογίσετε: i) τη δύναμη F αλληλοεπίδρασης, ii) τις θέσεις ισορροπίας και iii) το είδος ισορροπίας.

Λύση

i) $\frac{dU}{dr} = \frac{d}{dx}(re^{-ar})=(1-ar)e^{-ar}$ $\quad \vec{F_r}=-\frac{dU}{dr}\hat{r} = -(1-ar)e^{-ar}\hat{r} = (ar-1)e^{-ar}\hat{r}$

ii) Οι θέσεις ισορροπίας προσδιορίζονται από $\frac{dU}{dr} = 0.$

Οπότε:

$$(1-ar)e^{-ar} = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = \infty \\ r = \frac{1}{a} \end{cases}$$

Στις θέσεις αυτές η συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας παρουσιάζει **ακρότατα**.

iii) **Πρέπει να ελέγξουμε εάν τα ακρότατα αυτά είναι μέγιστα ή ελάχιστα. Επομένως υπολογίζουμε την τιμή της 2ης παραγώγου της δυναμικής ενέργειας στις θέσεις που μηδενίζεται η 1η παράγωγος.**

$$\frac{d^2U}{dr^2} = \frac{d}{dr}\left((1-ar)e^{-ar}\right) = \frac{d}{dr}(e^{-ar}) - \frac{d}{dr}(are^{-ar}) = -ae^{-ar} - ae^{-ar} + a^2re^{-ar} = -2ae^{-ar} + a^2re^{-ar}$$

Επομένως για $r = \frac{1}{a}$ έχουμε: $\frac{d^2U}{dr^2} = \left(-2ae^{-\frac{1}{a}a} + a^2\frac{1}{a}e^{-a\frac{1}{a}}\right) = \frac{-2a}{e} + \frac{a}{e} = -\frac{a}{e} < 0$ **ΜΕΓΙΣΤΟ**

ΘΕΣΗ ΑΣΤΑΘΟΥΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

Διαγράμματα ενέργειας και ευσταθούς και ασταθούς ισορροπίας-11

$F_r = -\frac{dU}{dr}$

Δίνεται η συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας $U(r) = 2r^3 - 18r$

α) Να υπολογίσετε τη δύναμη F

β) Να βρείτε τις θέσεις ισορροπίας

γ) Να βρείτε το είδος ισορροπίας

δ) Να σχεδιάσετε την $U(r)$

Λύση

α) $\frac{dU}{dr} = 6r^2 - 18$, $F = -\frac{dU}{dr} = -6r^2 + 18$

β) $F = 0 \Rightarrow -6r^2 + 18 = 0 \Rightarrow r_1 = +\sqrt{3} = 1.73$, $r_2 = -\sqrt{3} = -1.73$

Διαγράμματα ενέργειας και ευσταθούς και ασταθούς ισορροπίας-12

$F_r = -\frac{dU}{dr}$

γ) είδος ισορροπίας $\frac{d^2U}{dr^2} = 12r$

$$\left.\frac{d^2U}{dr^2}\right|_{r=\sqrt{3}} = 12\sqrt{3} > 0 \quad \text{ευσταθής ισορροπία.}$$

$$\left.\frac{d^2U}{dr^2}\right|_{r=-\sqrt{3}} = -12\sqrt{3} < 0 \quad \text{ασταθής ισορροπία}$$

δ) Πότε $U(r) = 0$;

$$2r^3 - 18r = 0 \Rightarrow 2r(r^2 - 9) = 0 \Rightarrow r = 0, \quad r = +3, \quad r = -3$$

Διαγράμματα ενέργειας και ευσταθούς και ασταθούς ισορροπίας-13

$F_r = -\frac{dU}{dr}$

- Ποιες οι τιμές της $U(r)$ στις θέσεις ισορροπίας;

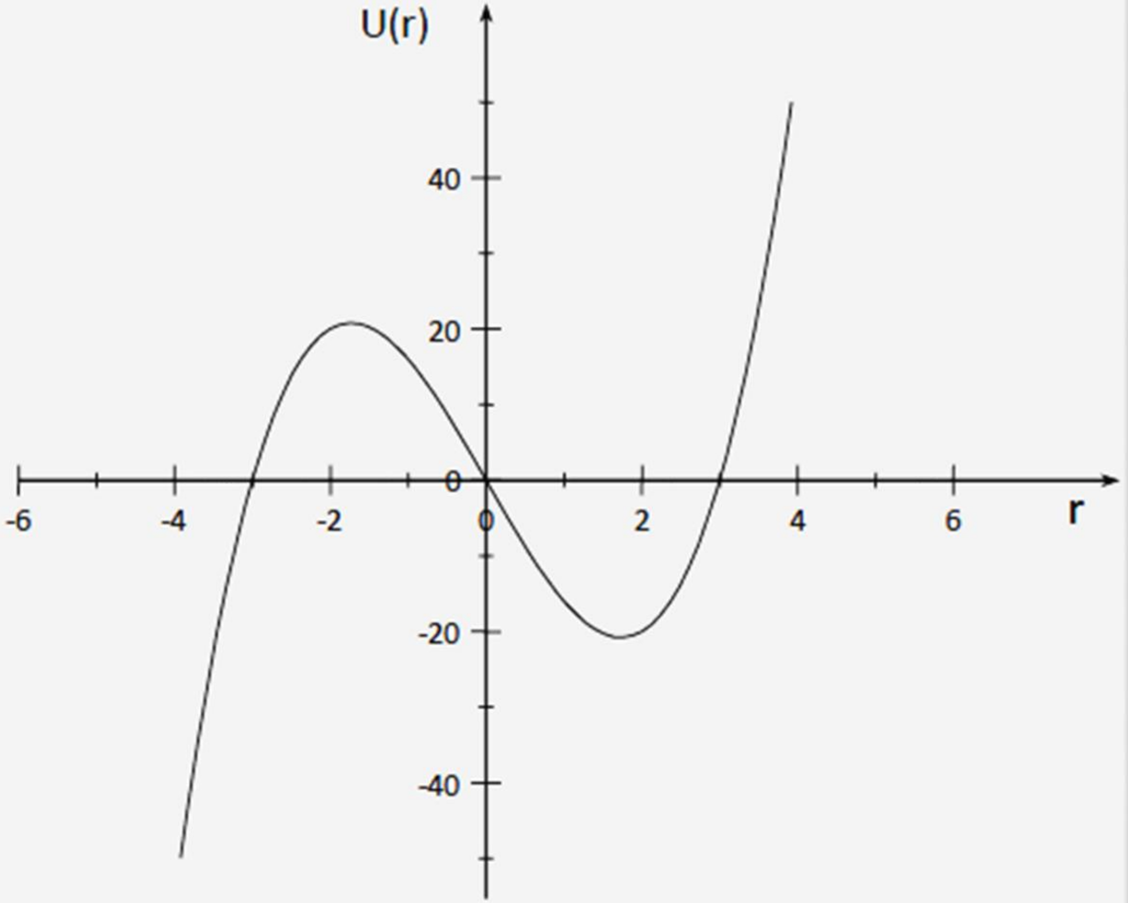
$U(r=0)=0$

$U(r=\sqrt{3})=-12\sqrt{3}=-20.78$

$U(r=-\sqrt{3})=12\sqrt{3}=20.78$

Όταν $r \to +\infty \quad U(r) \to +\infty$

Όταν $r \to -\infty \quad U(r) \to -\infty$



Διαγράμματα ενέργειας και ευσταθούς και ασταθούς ισορροπίας-14

$F_r = -\frac{dU}{dr}$

- **Αν** $U(r) = 2r^4 - 4r^2$ **να υπολογιστούν τα ζητούμενα του προηγούμενου παραδείγματος**

  Λύση

α) $\frac{dU}{dr} = 8r^3 - 8r \quad F = -\frac{dU}{dr} = -8r^3 + 8r$

β) $F = 0 \Rightarrow -8r^3 + 8r = 0 \Rightarrow r = 0 \;, r = +1 \;, \; r = -1$

γ) είδος ισορροπίας

$$\frac{d^2U}{dr^2} = 24r^2 - 8$$

Διαγράμματα ενέργειας και ευσταθούς και ασταθούς ισορροπίας-15

$$F_r = -\frac{dU}{dr}$$

$$\left.\frac{d^2U}{dr^2}\right|_{r=0} = -8 < 0 \quad \text{ασταθής ισορροπία, μέγιστο}$$

$$\left.\frac{d^2U}{dr^2}\right|_{r=+1} = +16 > 0 \quad \text{ευσταθής ισορροπία, ελάχιστο}$$

$$\left.\frac{d^2U}{dr^2}\right|_{r=-1} = +16 > 0 \quad \text{ευσταθής ισορροπία, ελάχιστο}$$

δ) Πότε $U(r) = 0$;

$$2r^4 - 4r^2 = 0 \Rightarrow r^2\left(r^2 - 2\right) = 0 \Rightarrow$$

$$r = 0, \quad r = +\sqrt{2} = 1.41, \quad r = -\sqrt{2} = -1.41$$

Διαγράμματα ενέργειας και ευσταθούς και ασταθούς ισορροπίας-16

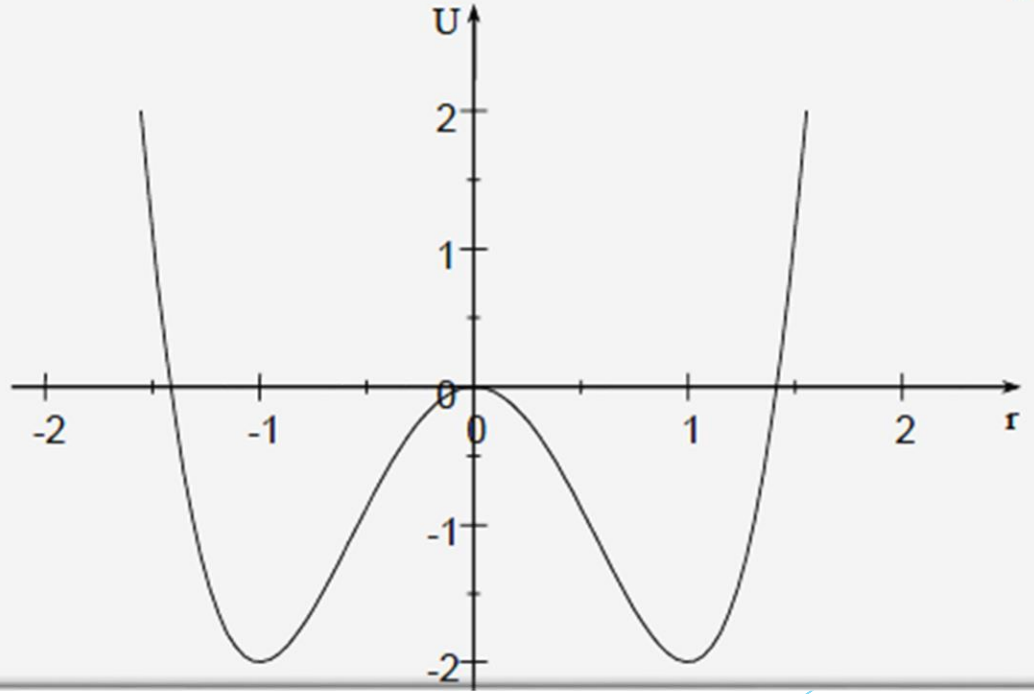
$$F_r = -\frac{dU}{dr}$$

- Ποιες οι τιμές της $U(r)$ στις θέσεις ισορροπίας;

- $U(r=0)=0$
- $U(r=+1)=-2$
- $U(r=-1)=-2$

Όταν $r \to +\infty$ $U(r) \to +\infty$

Όταν $r \to -\infty$ $U(r) \to +\infty$



Ασκήσεις για εξάσκηση

1) Η Δυναμική Ενέργεια που σχετίζεται με τη δύναμη μεταξύ δύο ουδέτερων ατόμων σε ένα μόριο δίδεται από τη σχέση:

$$U(x) = 4\varepsilon\left[\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{x}\right)^{6}\right]$$

Όπου ε και σ δύο σταθερές, μεγαλύτερες του μηδενός. Να υπολογίσετε: i) τη δύναμη F αλληλοεπίδρασης, ii) τις θέσεις ισορροπίας και iii) το είδος ισορροπίας.

2) Σε ένα σωμάτιο ασκείται συντηρητική δύναμη της μορφής: $\vec{\mathbf{F}} = \left(-Ax + Bx^2\right)\hat{\imath}$. i) Να υπολογίσετε τη δυναμική ενέργεια του σωματίου σε μια τυχαία θέση η οποία απέχει από την αρχή των αξόνων (x=0) απόσταση X. Δίδεται U=0 J για x=0m. ii) Να υπολογίσετε τη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας ΔU του σωματίου καθώς μετακινείται από την θέση x=2m στη θέση x=3m. iii) να υπολογίσετε επίσης τη μεταβολή της κινητικής του ενέργειας ΔΚ.

3) Ένα σωμάτιο μάζας m=4Kgr κινείται κατά τον άξονα x. Η θέση του περιγράφεται από την εξίσωση: $x = t + 2t^3$, όπου το x είναι μέτρα και το t σε sec. Να υπολογίσετε: i) Την κινητική του ενέργεια μια τυχαία χρονική στιγμή t. ii) Την επιτάχυνσή του α. iii) Τη δύναμη F που εξασκείται σε αυτό και iv) Το έργο που παράγει η δύναμη F κατά το χρονικό διάστημα t=0s έως t=2s.

Ευχαριστώ

Καλό διάβασμα…