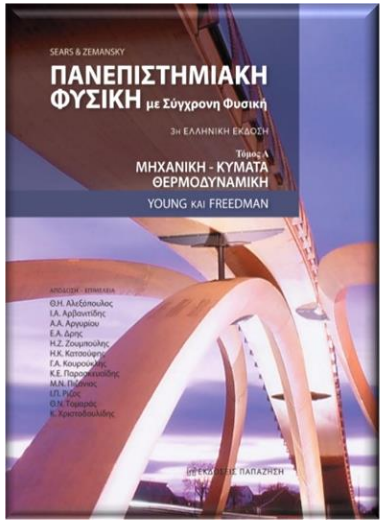
Μηχανική - Ρευστομηχανική

Διδάσκοντες
Παναγιώτα Καραχάλιου
Επίκουρη Καθηγήτρια, pkara@upatras.gr

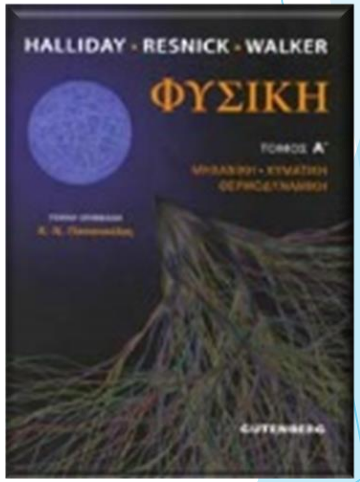
Χριστόφορος Κροντηράς
Καθηγητής, krontira@physics.upatras.gr

Προτεινόμενη Βιβλιογραφία

ΦΥΣΙΚΗ ΓΙΑ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΕΣ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ, R. Serway, J. Jewett (Μετάφραση Χ. Βάρβογλης), ΚΛΕΙΔΑΡΙΘΜΟΣ ΕΠΕ



Πανεπιστημιακή Φυσική Τόμος Α΄ Μηχανική Θερμοδυναμική, Young-Freedman, Εκδόσεις Παπαζήση

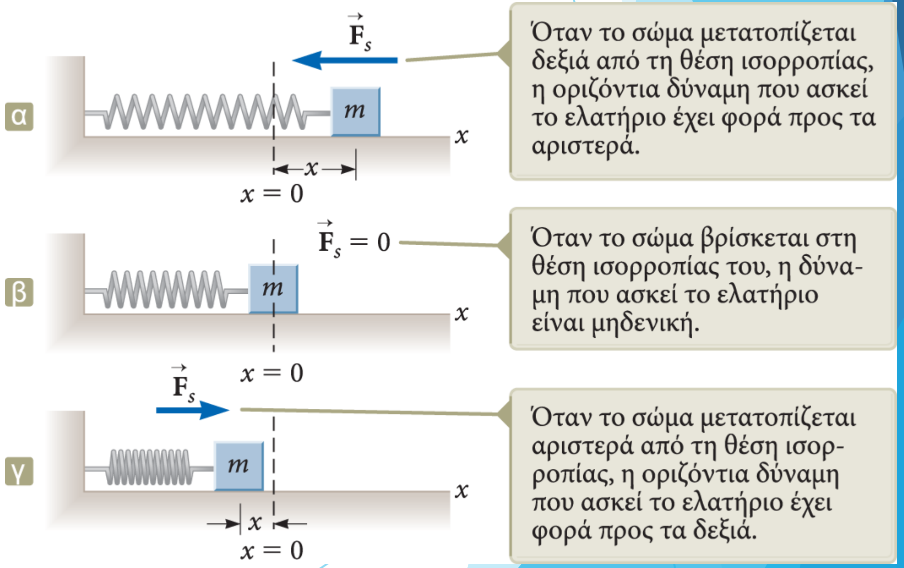


ΦΥΣΙΚΗ (Τόμος 1 Εκδ.4η), Halliday, Resnick, Walker, Εκδόσεις Gutenberg

Περιοδική κίνηση

- Η ***περιοδική κίνηση*** είναι η κίνηση που εκτελεί ένα σώμα όταν επιστρέφει ανά τακτά χρονικά διαστήματα σε μια συγκεκριμένη θέση.
- Στα μηχανικά συστήματα, όταν η δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα είναι ανάλογη της θέσης του σώματος ως προς τη θέση ισορροπίας του, παρατηρείται μια ειδική μορφή περιοδικής κίνησης.
- Αν η δύναμη αυτή έχει κατεύθυνση πάντα προς τη θέση ισορροπίας, τότε η κίνηση ονομάζεται ***απλή αρμονική κίνηση***.

- Ένας κύβος μάζας *m* είναι συνδεδεμένος στο άκρο ενός ελατηρίου και μπορεί και κινείται ελεύθερα επάνω σε μια οριζόντια επιφάνεια χωρίς τριβές.
- Όταν το ελατήριο δεν είναι ούτε εκτεταμένο ούτε συμπιεσμένο, ο κύβος βρίσκεται στη ***θέση ισορροπίας*** ($x = 0$).
- Αν ένα τέτοιο σύστημα απομακρυνθεί από τη θέση ισορροπίας του, θα αρχίσει να ταλαντώνεται.
- Ο νόμος του Hooke ορίζει ότι $F_s = -kx$
    - F_s είναι η δύναμη επαναφοράς, κατεύθυνση πάντα προς τη θέση ισορροπίας, αντίθετη με τη μετατόπιση του σώματος από τη θέση ισορροπίας.
    - k η σταθερά ελατηρίου.
    - x η μετατόπιση.

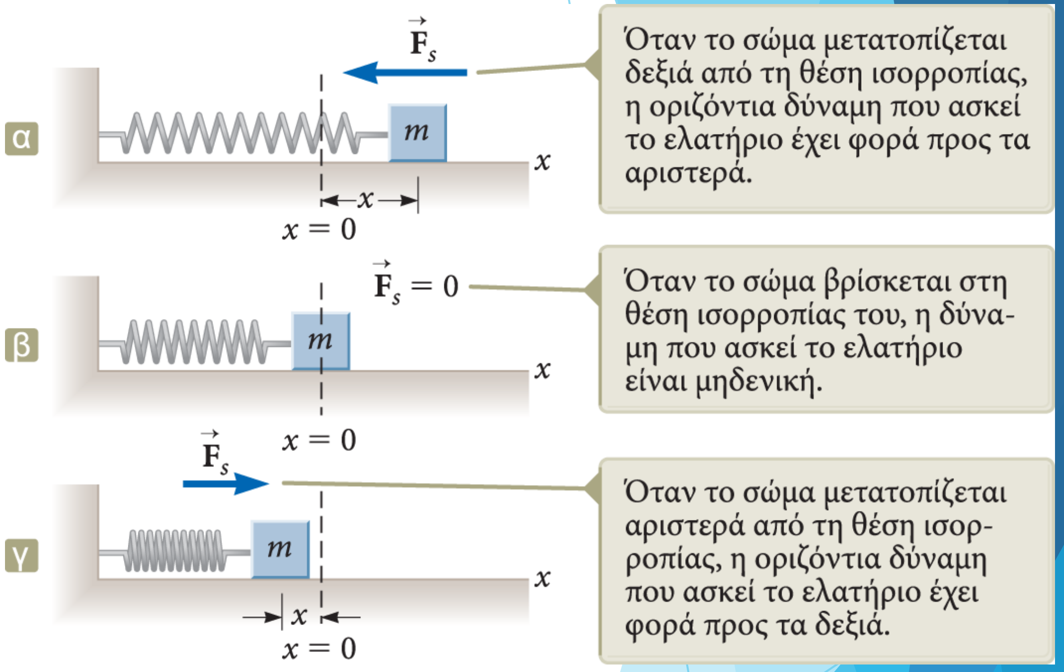


Κίνηση συστήματος σώματος-ελατηρίου

- (α): $x > 0$, δύναμη επαναφοράς με κατεύθυνση προς τα αριστερά.
- (β): $x = 0$, το ελατήριο δεν είναι ούτε εκτεταμένο ούτε συμπιεσμένο, δύναμη είναι ίση με 0.
- (γ): $x < 0$, δύναμη επαναφοράς με κατεύθυνση προς τα δεξιά.
- Η δύναμη που περιγράφει ο νόμος του Hooke είναι η συνισταμένη δύναμη.

$$-kx = ma_x \rightarrow a_x = -\frac{k}{m}x$$

- Η επιτάχυνση του κύβου είναι ανάλογη της μετατόπισής του.
- Η κατεύθυνση της επιτάχυνσης είναι αντίθετη από την κατεύθυνση της μετατόπισης του κύβου από τη θέση ισορροπίας του.
- ***Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική κίνηση όταν η επιτάχυνσή του είναι ανάλογη της θέσης του και έχει κατεύθυνση αντίθετη από αυτή της μετατόπισης από τη θέση ισορροπίας.***



*Η επιτάχυνση **δεν** είναι σταθερή.*

Στη θέση x = A, επιτάχυνσή -kA/m.
Στη θέση ισορροπίας, a = 0.
Στη θέση x = -A, επιτάχυνσή +kA/m
όπου A η μέγιστη απομάκρυνση (πλάτος).

Σωματίδιο που εκτελεί απλή αρμονική κίνηση

- **Μοντέλο του σωματιδίου που εκτελεί απλή αρμονική κίνηση**

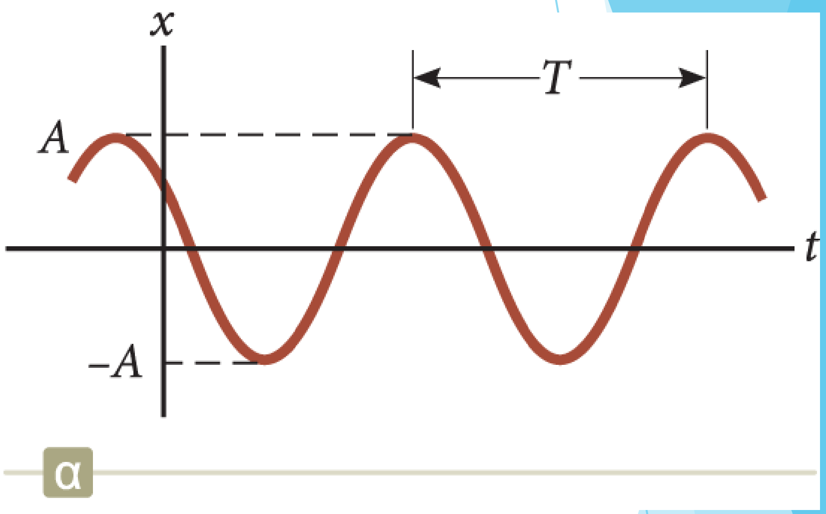
- Θεωρούμε ότι η ταλάντωση γίνεται στον άξονα *x*.
- Επιτάχυνση

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

- Θέτουμε

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

- οπότε $a = -\omega^2 x$



Μία λύση είναι η $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$.
Τα A, ω, ϕ είναι σταθερές.

Πρέπει να βρούμε μια συνάρτηση που να ικανοποιεί την εξίσωση.
Δηλαδή μια συνάρτηση $x(t)$ η οποία θα έχει δεύτερη παράγωγο ίδια με την αρχική συνάρτηση, αλλά με αρνητικό πρόσημο και πολλαπλασιασμένη με ω^2.
Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις του ημιτόνου (sine) και του συνημιτόνου (cosine) πληρούν αυτές τις προϋποθέσεις.

Απλή αρμονική κίνηση

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \phi) \qquad v_{max} = \omega A = \sqrt{\frac{k}{m}}A$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi) \qquad a_{max} = \omega^2 A = \frac{k}{m}A$$

Τα A, ω, ϕ είναι σταθερές

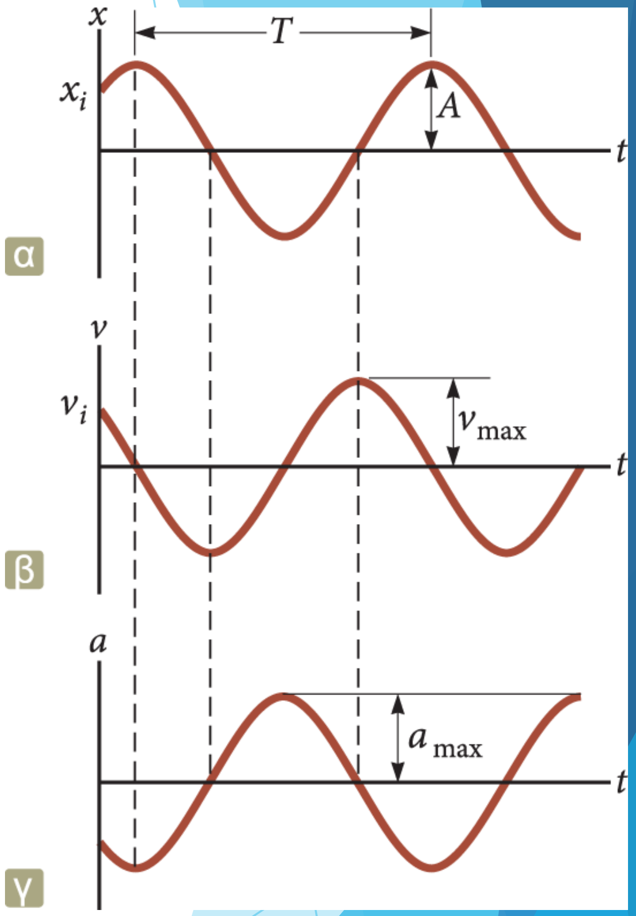
A: πλάτος, η μέγιστη τιμή της θέσης του σωματιδίου είτε προς τη θετική είτε προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα *x*.

ω: κυκλική συχνότητα ή γωνιακή συχνότητα.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

ϕ: σταθερά φάσης ή αρχική γωνία φάσης.

$(\omega t + \phi)$: φάση της κίνησης



T: περίοδος της κίνησης

f: συχνότητα

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Η συχνότητα και η περίοδος εξαρτώνται μόνο από τη μάζα του σωματιδίου και τη σταθερά του ελατηρίου.

Η συχνότητα είναι μεγάλη όταν το ελατήριο είναι σκληρό (έχει μεγάλη σταθερά *k*) και μειώνεται όσο αυξάνεται η μάζα του σωματιδίου.

Η ταχύτητα και η επιτάχυνση είναι εκτός φάσης από τη θέση κατά 90^o και 180^o, αντίστοιχα.

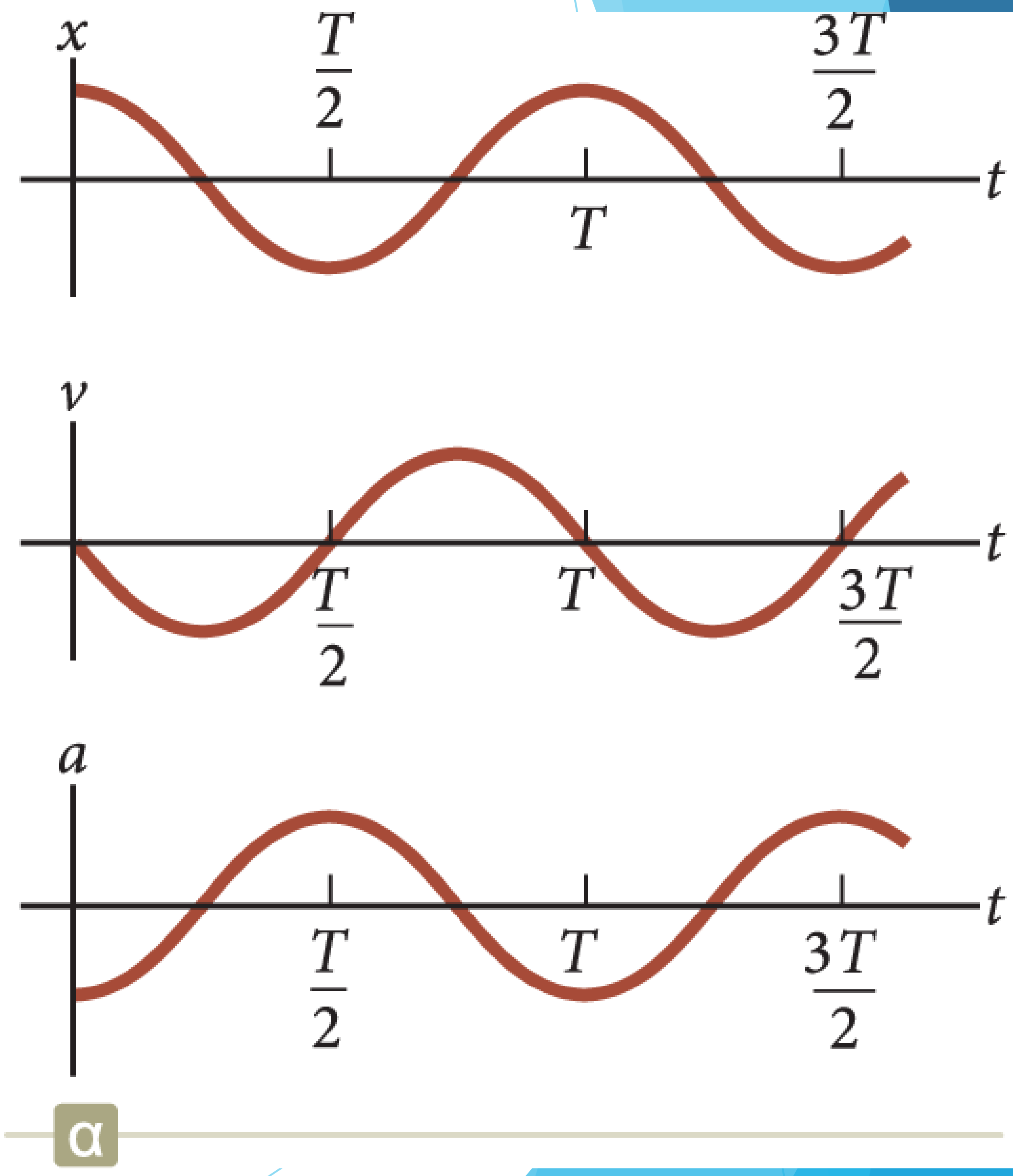
Απλή αρμονική κίνηση

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \phi)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi)$$

- Αρχικές συνθήκες τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι
  - $x(0) = A$
  - $v(0) = 0$
- Αυτό σημαίνει ότι $\phi = 0$.
- Οι ακραίες τιμές της επιτάχυνσης είναι $\pm\omega^2 A$ και προκύπτουν στις θέσεις $\pm A$.
- Οι ακραίες τιμές της ταχύτητας είναι $\pm\omega A$ και προκύπτουν στη θέση $x = 0$.



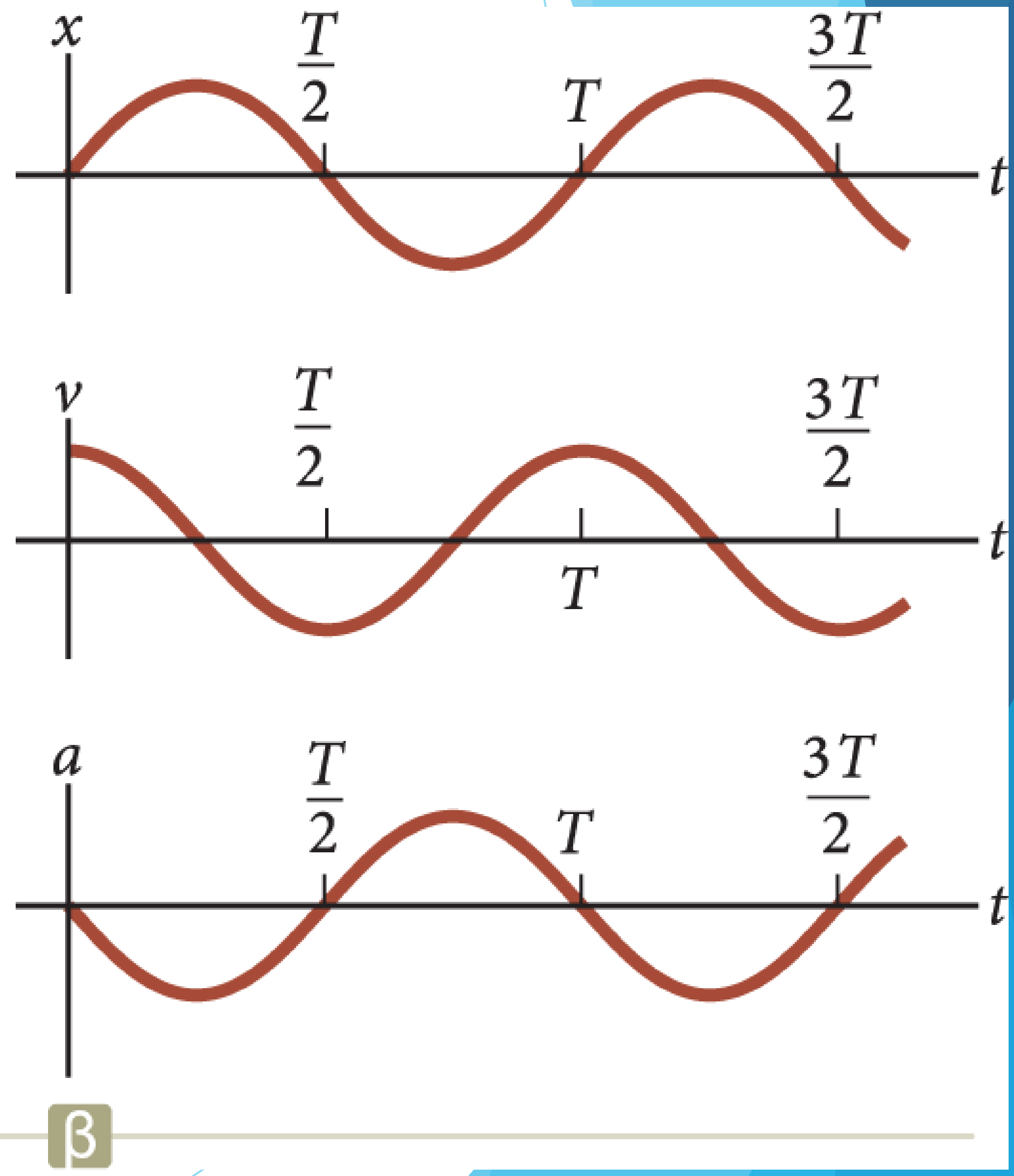
Απλή αρμονική κίνηση

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

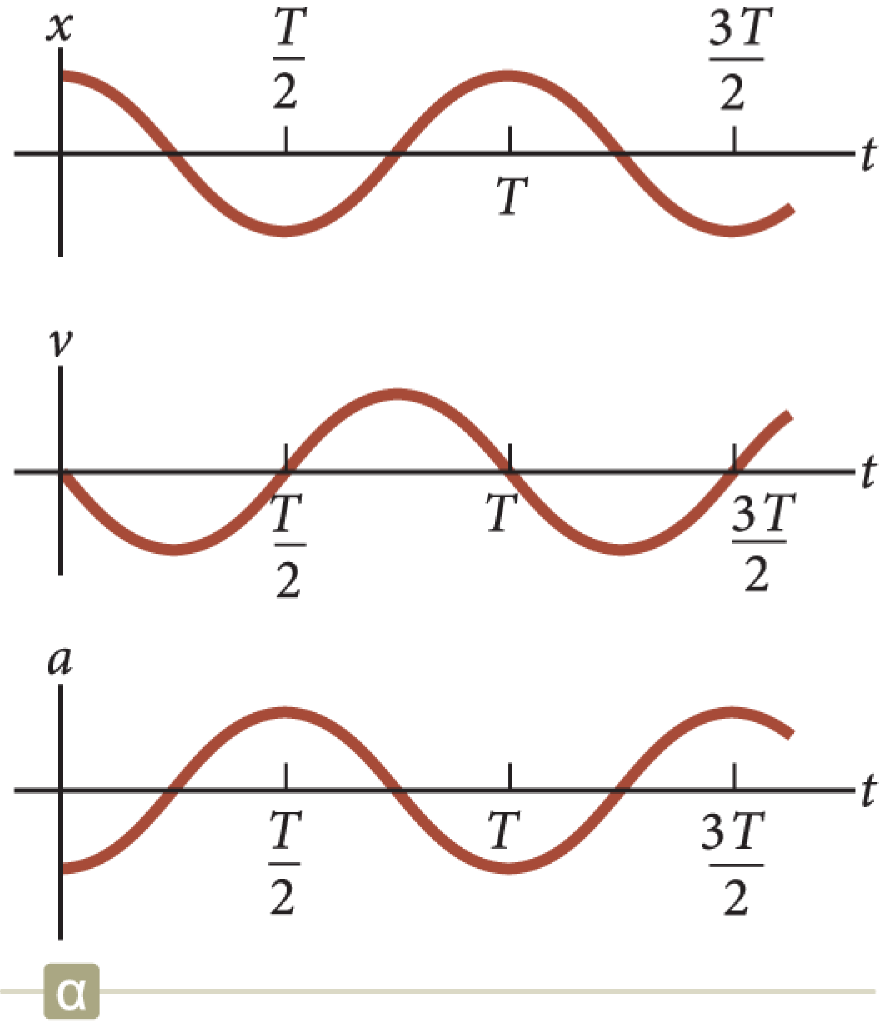
$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \phi)$$

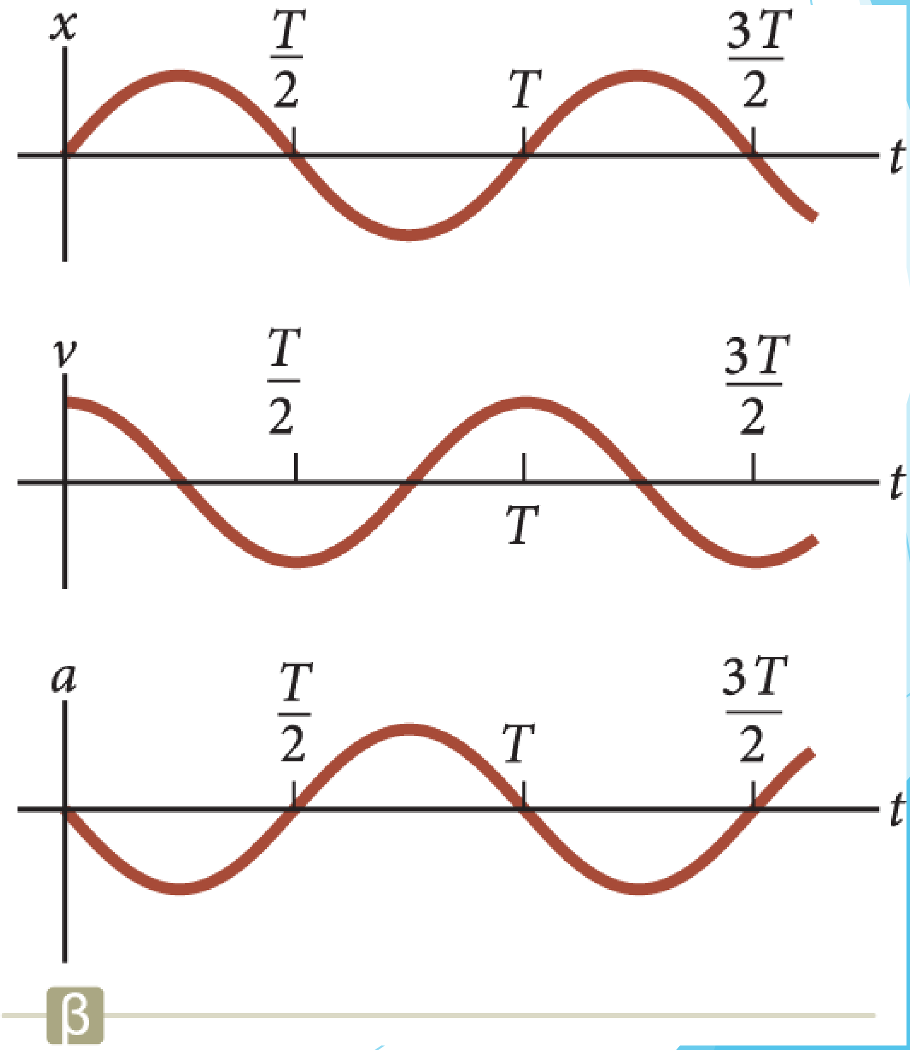
$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi)$$

- Οι αρχικές συνθήκες τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι
  - $x(0) = 0$
  - $v(0) = v_i$
- Αυτό σημαίνει ότι $\phi = -\pi/2$.
- Το γράφημα έχει μετατεθεί προς τα δεξιά κατά ένα τέταρτο του κύκλου ταλάντωσης ως προς το γράφημα $x(0) = A$.

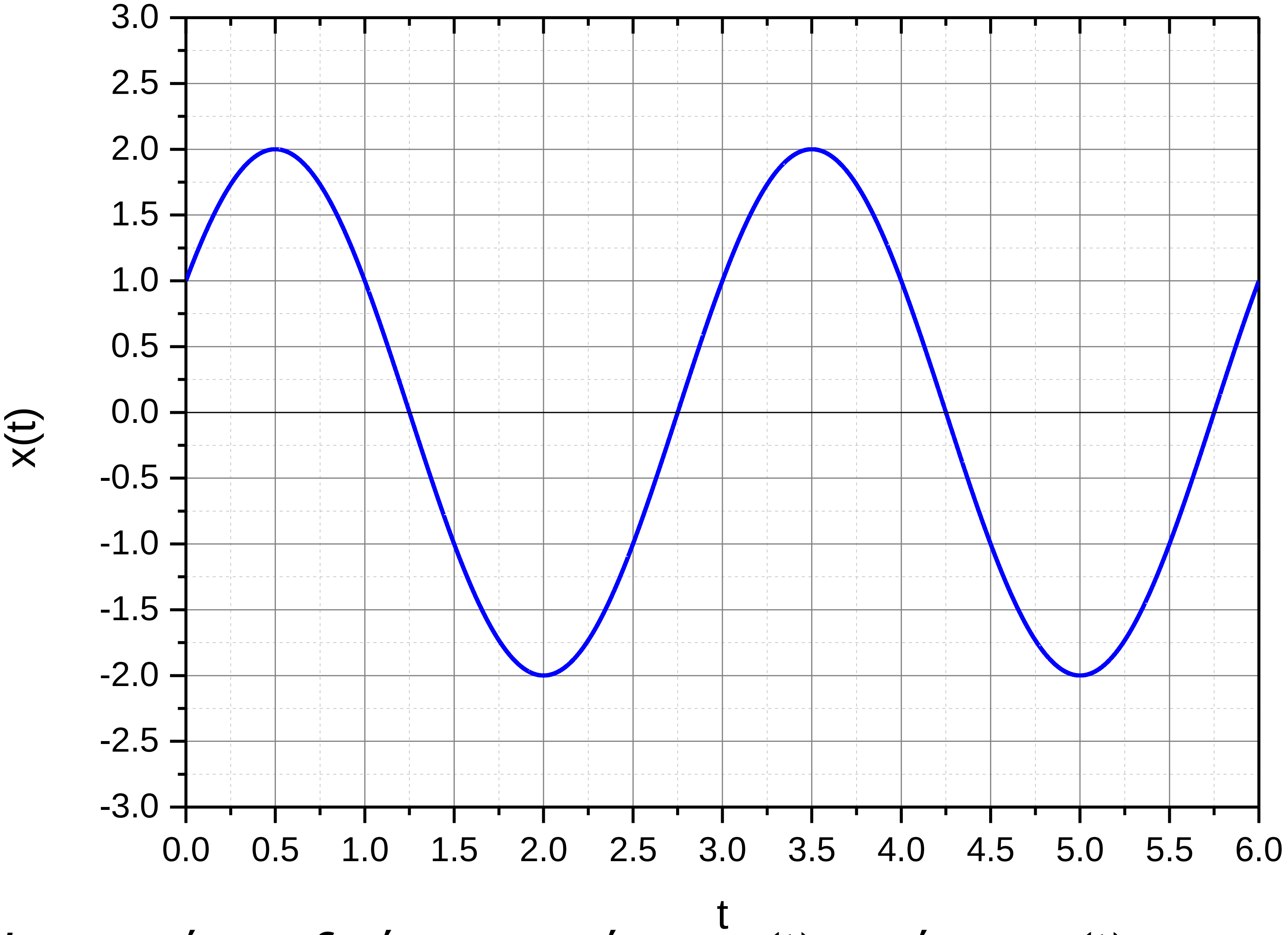


Το γράφημα έχει μετατεθεί προς τα δεξιά κατά ένα τέταρτο του κύκλου ταλάντωσης ως προς το γράφημα $x(0) = A$.





Απλή αρμονική κίνηση



1) Να γραφούν οι εξισώσεις μετατόπισης x(t), ταχύτητας v(t) και επιτάχυνσης a(t) για ένα σύστημα που εκτελεί Α.Α.Τ και για το οποίο η μετατόπιση ως συνάρτηση του χρόνου φαίνεται στο σχήμα. (x σε cm, t σε s)

2) Να γραφούν οι εξισώσεις μετατόπισης x(t), ταχύτητας v(t) και επιτάχυνσης a(t) για ένα σύστημα που εκτελεί Α.Α.Τ, όταν για t=0 η μετατόπιση είναι -8,5cm, η ταχύτητα είναι -0,92m/s και η επιτάχυνση 47m/s^2.

Ενέργεια του απλού αρμονικού ταλαντωτή

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$$

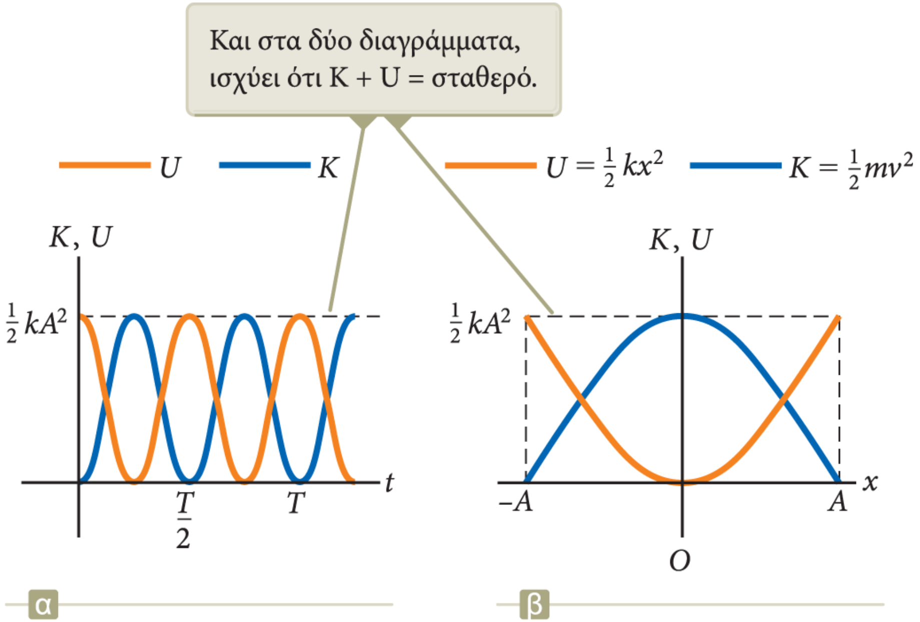
Κινητική ενέργειά: $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$

Υποθέτουμε ότι το ελατήριο δεν έχει μάζα, οπότε η μάζα του συστήματος είναι η μάζα του σώματος.

Ελαστική δυναμική ενέργεια: $U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi)$

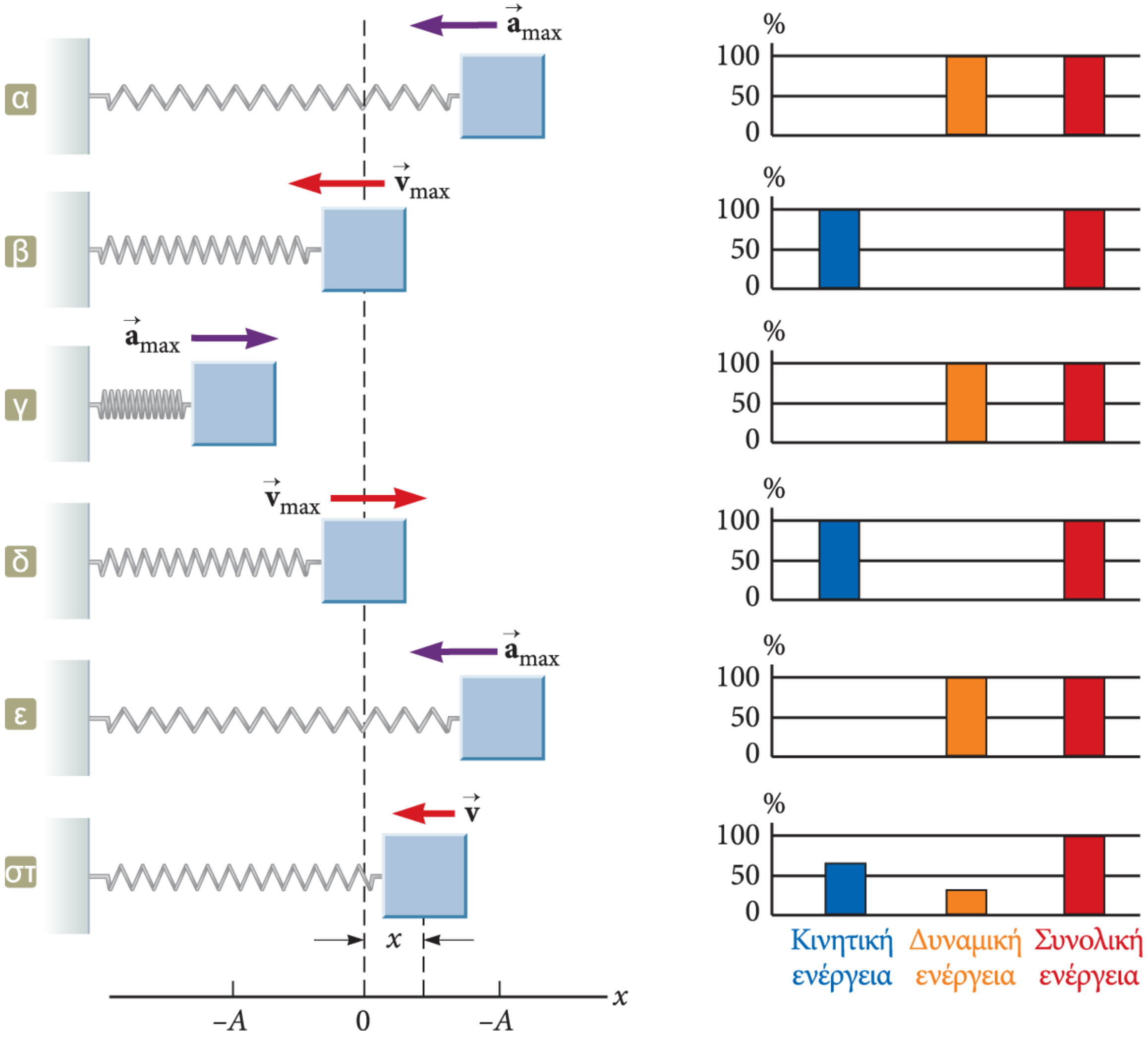
Συνολική ενέργεια: $E = K + U = \frac{1}{2}kA^2$

Εφόσον η επιφάνεια δεν έχει τριβές, το σύστημα είναι απομονωμένο η συνολική ενέργειά του είναι σταθερή



- Η συνολική μηχανική ενέργεια είναι σταθερή.
  - Σε κάθε χρονική στιγμή, η συνολική ενέργεια είναι $\frac{1}{2}kA^2$
- Η συνολική μηχανική ενέργεια είναι ανάλογη του τετραγώνου του πλάτους.
- Η αποθηκευμένη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου μετατρέπεται συνεχώς σε κινητική ενέργεια του σώματος και αντιστρόφως.
- Στο διάγραμμα, $\varphi = 0$.

Ενέργεια του απλού αρμονικού ταλαντωτή - Σύνοψη

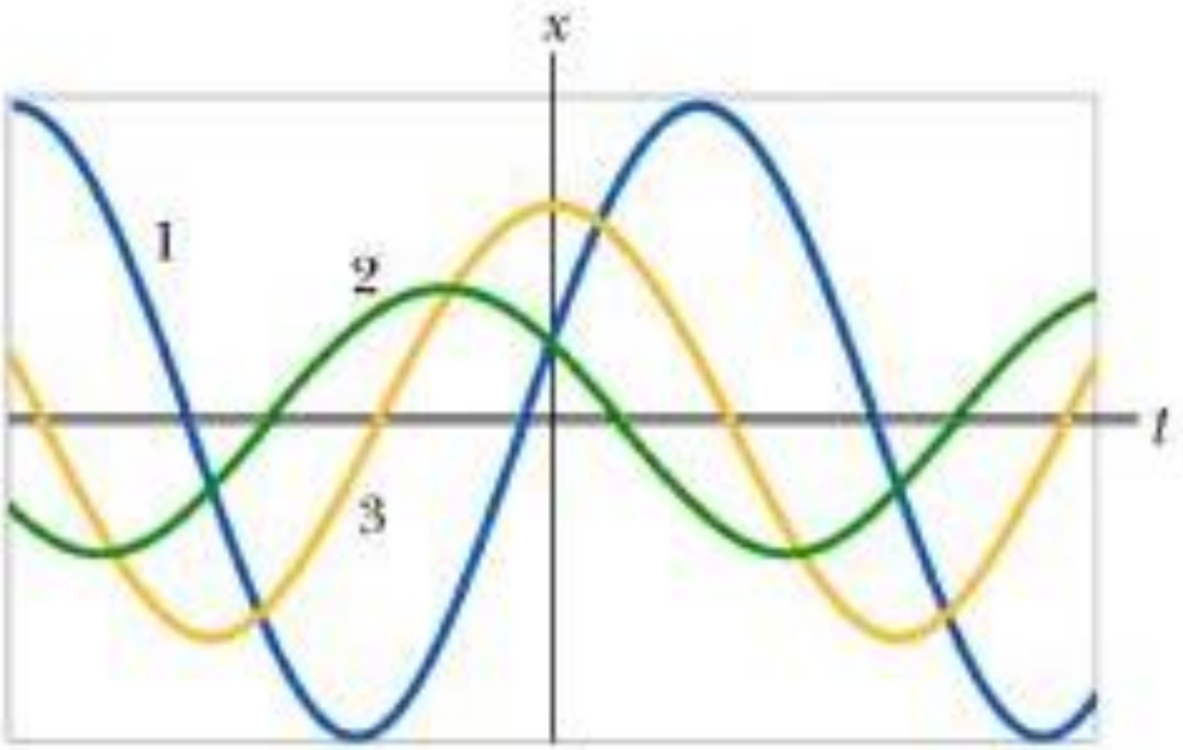


t	x	v	a	K	U
0	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$\frac{T}{4}$	0	$-\omega A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
$\frac{T}{2}$	$-A$	0	$\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$\frac{3T}{4}$	0	ωA	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
T	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
t	x	v	$-\omega^2 x$	$\frac{1}{2}mv^2$	$\frac{1}{2}kx^2$

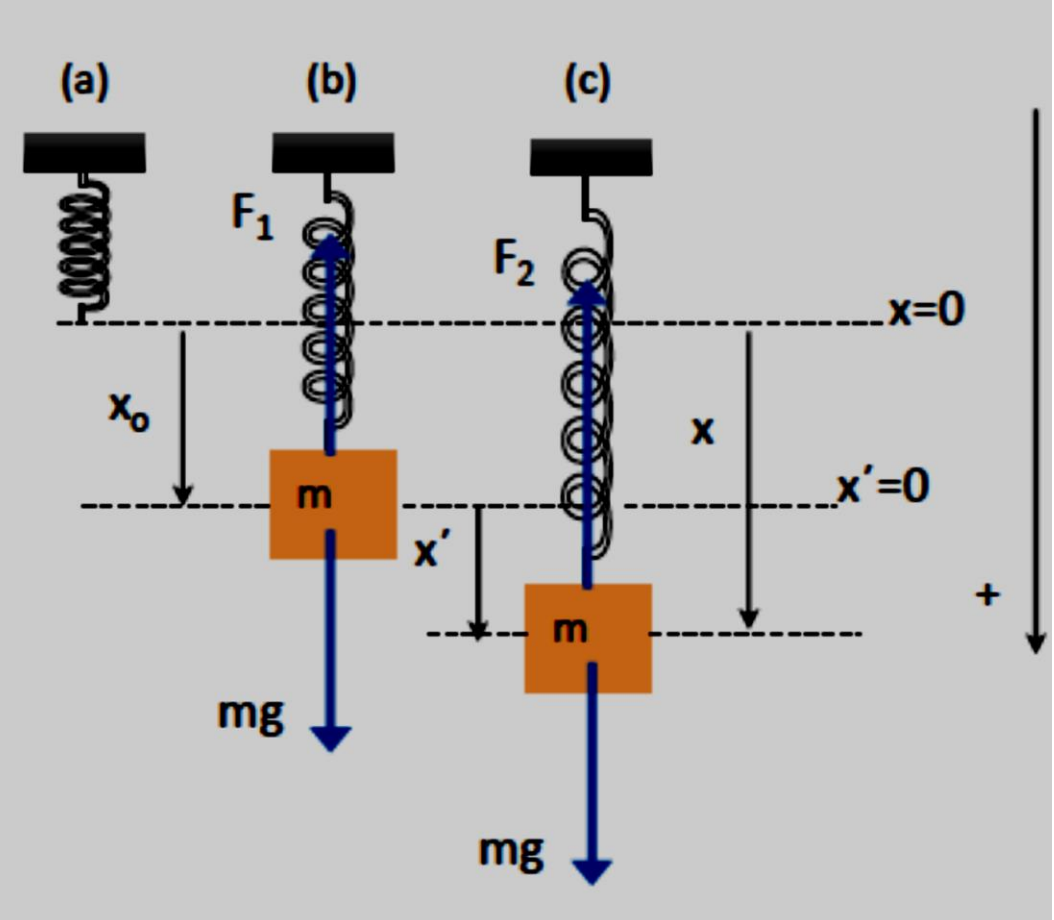
Ταχύτητα σε μια συγκεκριμένη θέση: $E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \rightarrow v = \pm\sqrt{\frac{k}{m}\left(A^2 - x^2\right)} = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$

Ενέργεια του απλού αρμονικού ταλαντωτή – Σύνοψη

Α) Στο σχήμα αποδίδεται η καμπύλη x(t) για τρία διαφορετικά πειράματα συγκεκριμένου συστήματος μάζας-ελατηρίου, το οποίο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Κατατάξτε τις καμπύλες σύμφωνα με την τιμή (i) της γωνιακής συχνότητας, (ii) της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου τη στιγμή t=0s, (iii) της κινητικής ενέργειας του σώματος τη στιγμή t=0s, (iv) της μέγιστης κινητικής ενέργειας του σώματος, με τη μεγαλύτερη τιμή πρώτη. Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



Απλή αρμονική κίνηση-Κατακόρυφο ελατήριο



Θέση Ισορροπίας (b): $kx_0 = mg$

Τυχαία θέση (c):

$$-kx + mg = m\frac{d^2x'}{dt^2} \rightarrow -k\left(x_0 + x'\right) + mg = m\frac{d^2x'}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x'}{dt^2} + \frac{k}{m}x' = 0$$

Λύση: $x'(t) = A\cos(\omega t + \phi)$

$$x(t) - x_0 = A\cos(\omega t + \phi) \rightarrow x(t) = x_0 + A\cos(\omega t + \phi)$$

Συστήματα που εκτελούν Α.Α.Τ-Απλό εκκρεμές

- Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σφαιρίδιο είναι η τάση και το βάρος.
- Η εφαπτομενική συνιστώσα της βαρυτικής δύναμης είναι μια δύναμη επαναφοράς.
- Στην εφαπτομενική διεύθυνση,

$$F_t = ma_t \rightarrow -mg\sin\theta = m\frac{d^2s}{dt^2} = m\frac{d^2(L\theta)}{dt^2}$$

- Η κυκλική συχνότητα είναι

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

- Η περίοδος είναι

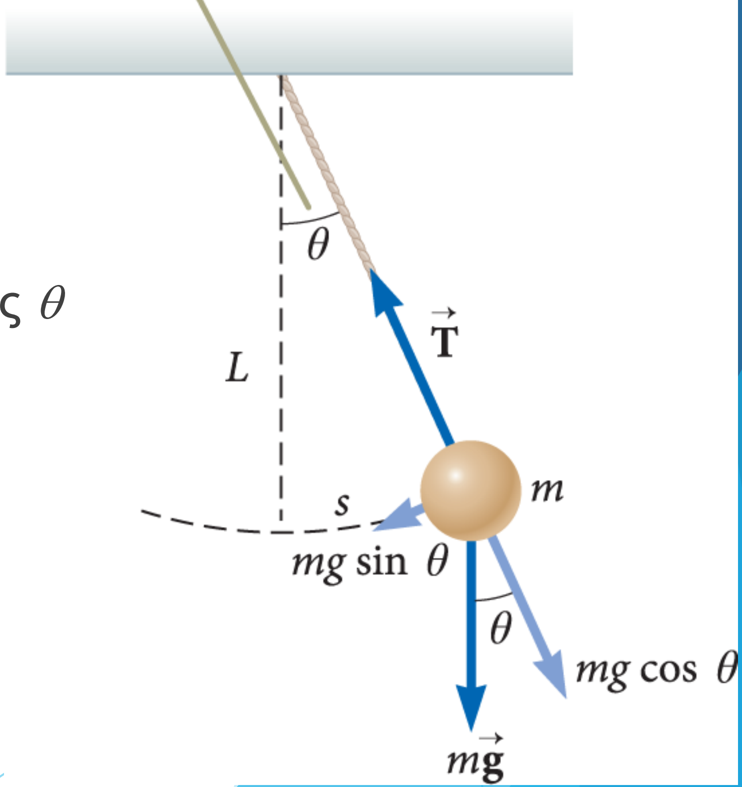
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

- Το μήκος L του εκκρεμούς είναι σταθερό, και για μικρές τιμές της γωνίας θ ισχύει

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta = -\frac{g}{L}\theta \rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

- Αυτό επιβεβαιώνει ότι η κίνηση του εκκρεμούς έχει την ίδια μαθηματική μορφή με την απλή αρμονική κίνηση.
- Λύση: $\boldsymbol{\theta = \theta_o \cos(\omega t + \varphi)}$

Όταν η γωνία θ είναι μικρή, η κίνηση του απλού εκκρεμούς μπορεί να μοντελοποιηθεί ως απλή αρμονική κίνηση γύρω από τη θέση ισορροπίας $\theta = 0$.



Συστήματα που εκτελούν Α.Α.Τ-Φυσικό εκκρεμές

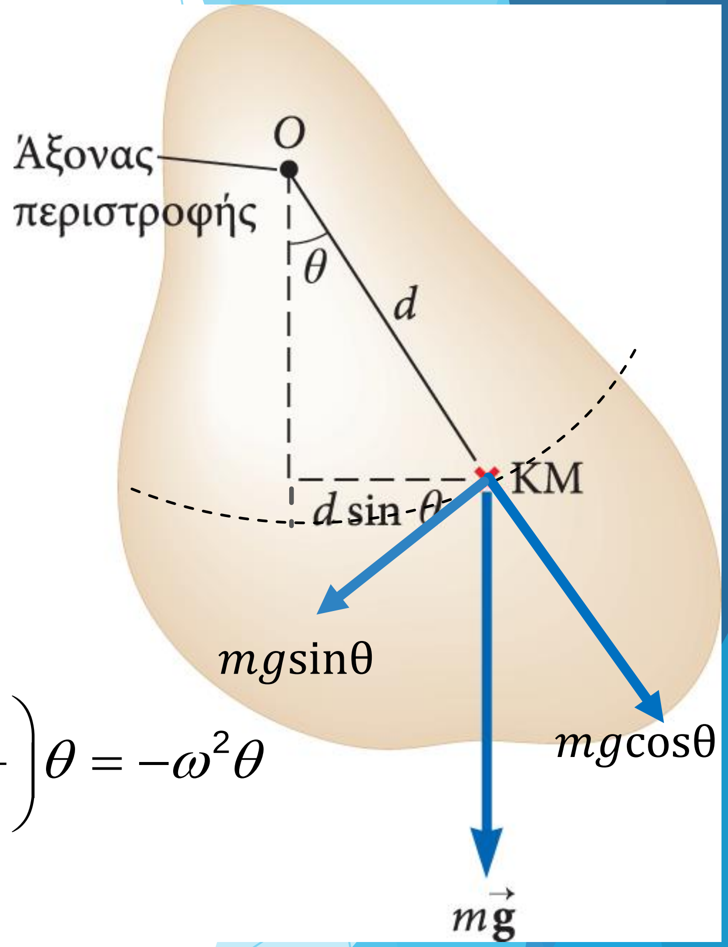
- ***Φυσικό εκκρεμές*** ονομάζεται ένα σύστημα το οποίο αποτελείται από ένα αναρτημένο σώμα, που δεν μπορεί να μοντελοποιηθεί ως σημειακή μάζα, και το οποίο ταλαντώνεται γύρω από έναν σταθερό άξονα που δεν διέρχεται από το κέντρο μάζας του.
- Η βαρυτική δύναμη προκαλεί ροπή ως προς έναν άξονα που διέρχεται από το σημείο *O*.
- Το μέτρο της ροπής είναι: $mgd \sin\theta$
- Σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα,

$$-mgd\sin\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

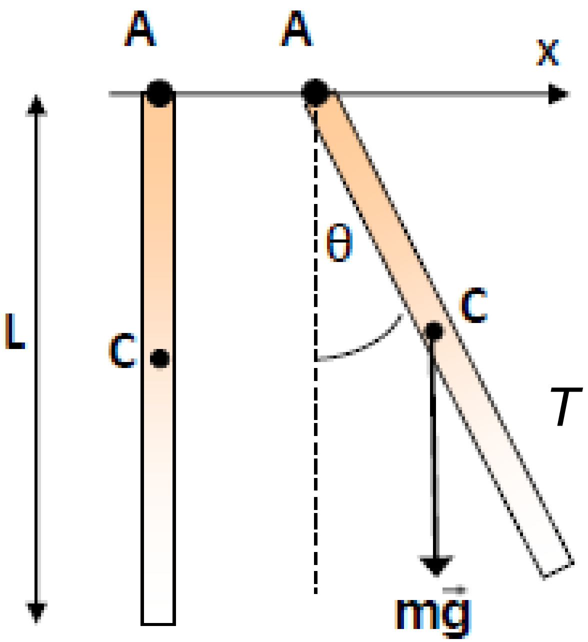
- Η βαρυτική δύναμη προκαλεί μια ροπή επαναφοράς.
- Αν υποθέσουμε ότι η γωνία θ είναι μικρή, η εξίσωση γίνεται

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{mgd}{I}\right)\theta = -\omega^2\theta$$

- Η παραπάνω εξίσωση έχει την ίδια μαθηματική μορφή με την εξίσωση που περιγράφει ένα σώμα το οποίο εκτελεί απλή αρμονική κίνηση.
- Η λύση της είναι η λύση του απλού αρμονικού ταλαντωτή.
- Η κυκλική συχνότητα είναι: $\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$, η περίοδος είναι: $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$



Συστήματα που εκτελούν Α.Α.Τ-Φυσικό εκκρεμές



$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{2\ell}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2\ell}{3g}}$$

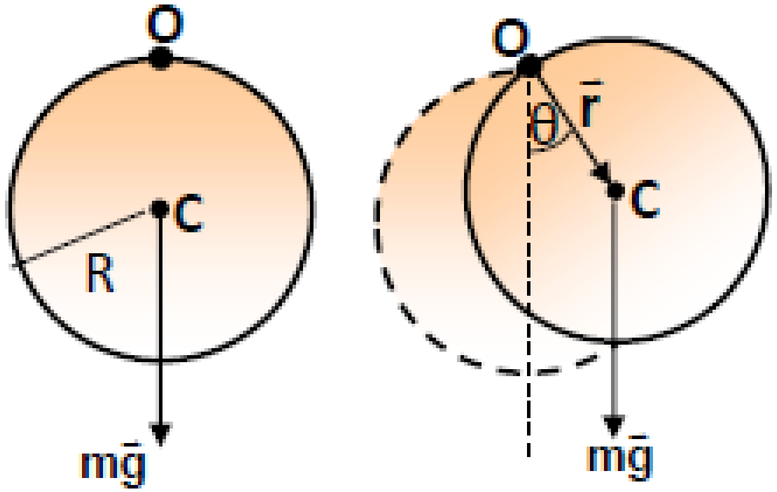
Σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα

$$-mg\sin\theta\frac{\ell}{2} = I\frac{d^2\theta}{dt^2} \rightarrow -mg\sin\theta\frac{\ell}{2} = \frac{1}{3}m\ell^2\frac{d^2\theta}{dt^2} \rightarrow$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{3g}{2\ell}\sin\theta = 0 \rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{3g}{2\ell}\theta = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{3R}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3R}{2g}}$$



Σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα

$$-mgR\sin\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2} \rightarrow -mgR\sin\theta = \frac{3}{2}mR^2\frac{d^2\theta}{dt^2} \rightarrow$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2g}{3R}\sin\theta = 0 \rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2g}{3R}\theta = 0$$

Στροφικό εκκρεμές

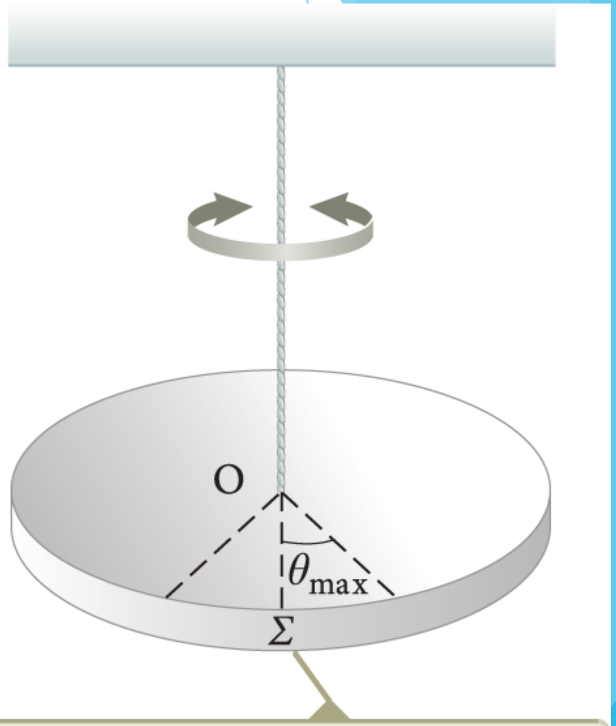
- Έστω ότι ένα άκαμπτο σώμα είναι αναρτημένο από ένα σύρμα η πάνω άκρη του οποίου είναι στερεωμένη σε ένα σταθερό στήριγμα.
- Το συστραμμένο σύρμα ασκεί μια ροπή επαναφοράς στο σώμα, η οποία είναι ανάλογη της γωνιακής θέσης του.
- Η ροπή επαναφοράς είναι $\tau = -\kappa\theta$.
  - Το κ είναι η *σταθερά στρέψης* του σύρματος.
- Σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα

$$\tau = I\alpha \rightarrow -\kappa\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{\kappa}{I}\theta$$

- Η κυκλική συχνότητα είναι: $\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I}}$

- Η περίοδος είναι: $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}}$

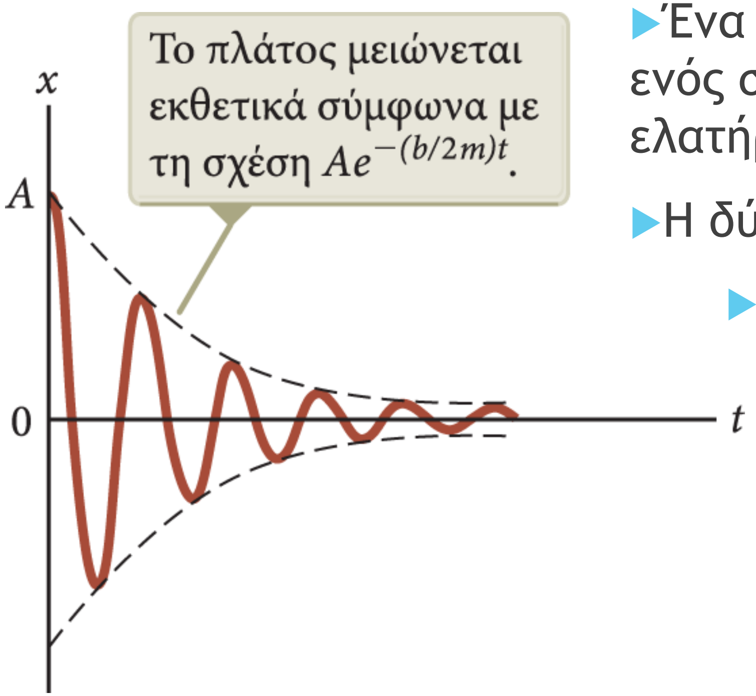


Το σώμα ταλαντώνεται γύρω από το ευθύγραμμο τμήμα ΟΣ με πλάτος θ_{max}.

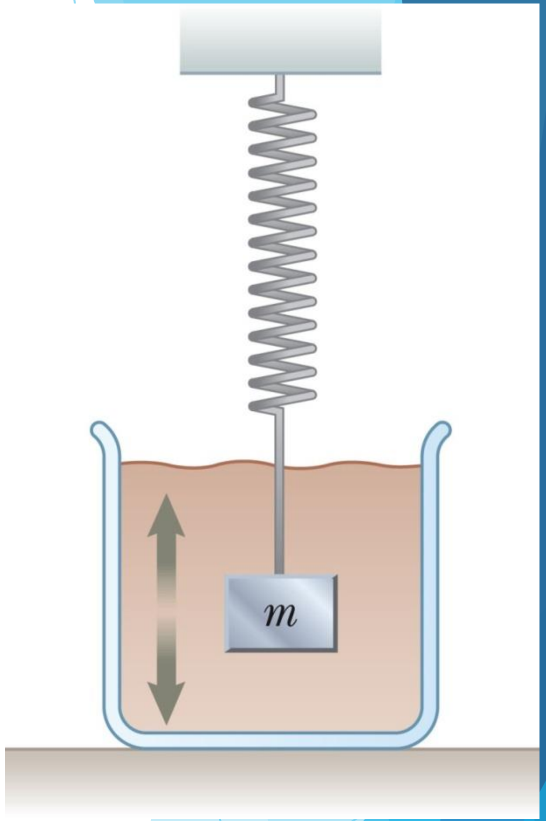
-Δεν υπάρχει ο περιορισμός της μικρής γωνίας
-Υποθέτουμε ότι δεν υπερβαίνουμε το όριο ελαστικότητας του σύρματος

Φθίνουσες ταλαντώσεις

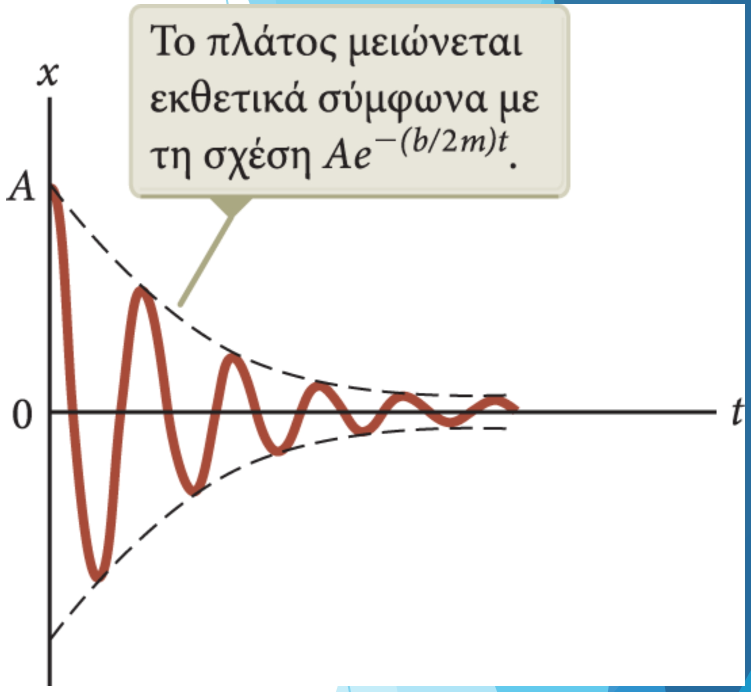
- Σε πολλά πραγματικά συστήματα, δρουν μη συντηρητικές δυνάμεις.
  - Αυτά τα συστήματα δεν είναι ιδανικά (όπως τα συστήματα που μελετήσαμε μέχρι τώρα).
  - Η τριβή και η αντίσταση του αέρα είναι μη συντηρητικές δυνάμεις.
- Σε αυτή την περίπτωση, η μηχανική ενέργεια του συστήματος μειώνεται συναρτήσει του χρόνου και η κίνηση είναι ***φθίνουσα ή υφίσταται απόσβεση***.



- Ένα παράδειγμα φθίνουσας κίνησης είναι η κίνηση ενός σώματος το οποίο είναι προσαρτημένο σε ένα ελατήριο και βυθισμένο σε ένα παχύρρευστο υγρό.
- Η δύναμη επιβράδυνσης εκφράζεται ως $\vec{\mathbf{R}} = -b\vec{\mathbf{v}}$
  - Η σταθερά b ονομάζεται ***συντελεστής απόσβεσης***.
- Το πλάτος μειώνεται ως προς τον χρόνο.
- Οι διακεκομμένες γραμμές ορίζουν την ***περιβάλλουσα*** της καμπύλης της κίνησης.
- Η δύναμη επαναφοράς ισούται με $-kx$.



Φθίνουσες ταλαντώσεις



- Από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα παίρνουμε

$$\Sigma F_x = -kx - bv_x = ma_x \rightarrow -kx-b(dx/dt)=m(d^2x/dt^2)$$

- Όταν η δύναμη τριβής είναι μικρή συγκριτικά με τη μέγιστη δύναμη επαναφοράς, μπορούμε να βρούμε τη συνάρτηση που δίνει το *x*.
    - Αυτό συμβαίνει όταν ο συντελεστής *b* είναι μικρός.
- Η θέση περιγράφεται από τη σχέση

$$x = Ae^{-\left(b/2m\right)t}\cos(\omega t + \phi)$$

- Η κυκλική συχνότητα είναι

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

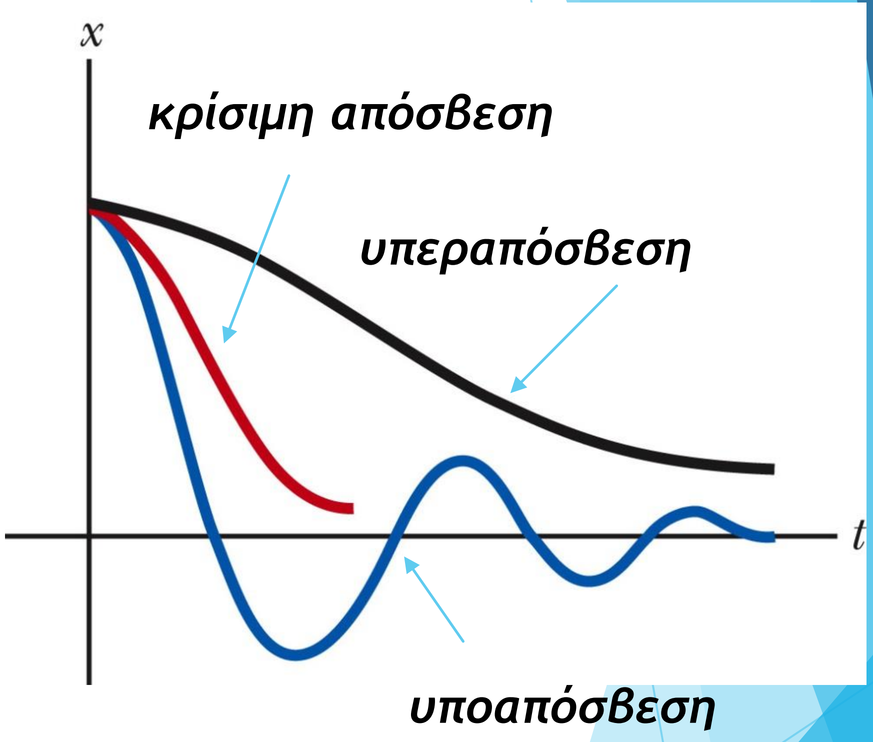
- Όταν η δύναμη τριβής είναι μικρή, η κίνηση εξακολουθεί να είναι ταλάντωση, αλλά το πλάτος μειώνεται εκθετικά με τον χρόνο.
- Τελικά η κίνηση σταματά.
- Η κυκλική συχνότητα μπορεί να εκφραστεί και στη μορφή: $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$, όπου $\omega_o = \sqrt{k/m}$

ιδιοσυχνότητα (ή **φυσική συχνότητα**) του συστήματος.

Για σταθερά k, m η ταλάντωση φθίνει πιο γρήγορα όσο αυξάνεται η δύναμη επιβράδυνσης.

Είδη απόσβεσης

- Όταν η δύναμη επαναφοράς είναι τέτοια ώστε $b/2m < \omega_0$, τότε λέμε ότι το σύστημα παρουσιάζει ***υποαπόσβεση***.
- Όταν ο συντελεστής b πάρει μια οριακή τιμή b_c τέτοια ώστε $b_c/2m = \omega_0$, το σύστημα δεν ταλαντώνεται.
    - Τότε λέμε ότι έχουμε ***κρίσιμη απόσβεση*** *(το σύστημα δεν ταλαντώνεται)- Το σύστημα αφήνεται ελεύθερο και πλησιάζει προς τη θέση ισορροπίας, αλλά δεν περνά από αυτή.*
- Αν η δύναμη επαναφοράς είναι τέτοια ώστε $b/2m > \omega_0$, τότε λέμε ότι το σύστημα παρουσιάζει ***υπεραπόσβεση*** *(το σύστημα δεν ταλαντώνεται)- Το σύστημα αφήνεται ελεύθερο και επιστρέφει προς τη θέση ισορροπίας, αλλά δεν περνά από αυτή.*
- Όσο αυξάνεται το το b τόσο αυξάνεται ο χρόνος που χρειάζεται το σύστημα για να φτάσει στη θέση ισορροπίας.
- Τα συστήματα στα οποία έχουμε κρίσιμη απόσβεση και υπεραπόσβεση, δεν έχουν κυκλική συχνότητα (δεν ορίζεται) και η $x=Ae^{-(b/2m)t}\cos(\omega t+\varphi)$ δεν ισχύει.



Να υπολογισθεί ο ρυθμός μεταβολής της μηχανικής ενέργειας σε μια φθίνουσα ταλάντωση

Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις

- Μπορούμε να αντισταθμίσουμε την απώλεια ενέργειας σε μια φθίνουσα ταλάντωση ασκώντας μια περιοδική εξωτερική δύναμη.
- Στο σύστημα μεταφέρεται ενέργεια μέσω μιας δύναμης που έχει την κατεύθυνση της κίνησης.
- Το πλάτος της κίνησης διατηρείται σταθερό αν η ενέργεια που παρέχεται σε κάθε κύκλο ταλάντωσης ισούται με τη μείωση της μηχανικής ενέργειας που προκαλούν οι δυνάμεις αντίστασης σε κάθε κύκλο.
- Έστω το προηγούμενο σύστημα στο οποίο ασκείται περιοδική δύναμη διέγερσης $F=F_0 \sin\omega t$
- Προσοχή: Η συχνότητα ω της διεγείρουσας μπορεί να μεταβάλλεται, ενώ η ω_0 του συστήματος εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά του (k,m).
- Από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα παίρνουμε

$$\Sigma F_x = F_0 \sin\omega t - kx - bv_x = ma_x \rightarrow F_0 \sin\omega t - kx - b(dx/dt) = m(d^2x/dt^2)$$

- Όταν σε ένα αρχικά ακίνητο σώμα αρχίσει να ασκείται μια δύναμη διέγερσης, το σώμα θα αρχίσει να ταλαντώνεται με ολοένα μεγαλύτερο πλάτος ταλάντωσης.
- Μετά από κάποιο χρονικό διάστημα όταν η ενέργεια που παρέχεται στο σύστημα από την εξωτερική δύναμη εξισωθεί με την ενέργεια που χάνεται ανα κύκλο, το σύστημα θα φτάσει σε σταθερή κατάσταση και θα ταλαντώνεται με σταθερό πλάτος.

Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις

- Όταν σε ένα αρχικά ακίνητο σώμα αρχίσει να ασκείται μια δύναμη διέγερσης, το σώμα θα αρχίσει να ταλαντώνεται με ολοένα μεγαλύτερο πλάτος ταλάντωσης.

- Έπειτα από αρκετό χρονικό διάστημα,

Ενέργεια δύναμης διέγερσης = Ενέργεια που μετατρέπεται σε εσωτερική

  - Το σύστημα φτάνει σε μια σταθερή κατάσταση.
  - Οι ταλαντώσεις συνεχίζονται με σταθερό πλάτος.
  - Η λύση της εξίσωσης γίνεται x=A cos (ωt+φ)

- όπου το πλάτος μιας εξαναγκασμένης ταλάντωσης είναι

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}}$$

- Το ω_0 είναι η ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή χωρίς απόσβεση.

Ο εξαναγκασμένος ταλαντωτής ταλαντώνεται με τη συχνότητα της εξωτερικής δύναμης αφού οδηγείται σε σταθερή κατάσταση

Συντονισμός

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+\left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}}$$ ***πλάτος εξαναγκασμένης ταλάντωσης***

- Όταν η συχνότητα της δύναμης διέγερσης πλησιάζει την ιδιοσυχνότητα της ταλάντωσης ($\omega \approx \omega_0$), παρατηρείται αύξηση του πλάτους (για μικρές τιμές του b).
- Αυτή η θεαματική αύξηση του πλάτους ονομάζεται ***συντονισμός***.
- Η ιδιοσυχνότητα ω_0 είναι γνωστή και ως συχνότητα συντονισμού του συστήματος.
- Κατά τον συντονισμό, η δύναμη διέγερσης βρίσκεται σε φάση με την ταχύτητα και η ισχύς που μεταφέρεται στον ταλαντωτή παίρνει τη μέγιστη τιμή της (v=dx/dt, συνάρτηση ημιτόνου όπως η δύναμη).
- Συντονισμός παρατηρείται (κορυφή του γραφήματος *A*-*ω*) όταν η συχνότητα της δύναμης διέγερσης είναι ίδια με την ιδιοσυχνότητα.
- Όταν η απόσβεση μειώνεται, το πλάτος *A* της ταλάντωσης αυξάνεται.
- Όταν η απόσβεση αυξάνεται, το πλάτος της καμπύλης αυξάνεται.
- Το σχήμα της καμπύλης συντονισμού εξαρτάται από τον συντελεστή *b*.