Μηχανική - Ρευστομηχανική

Timeo hominem unius libri.

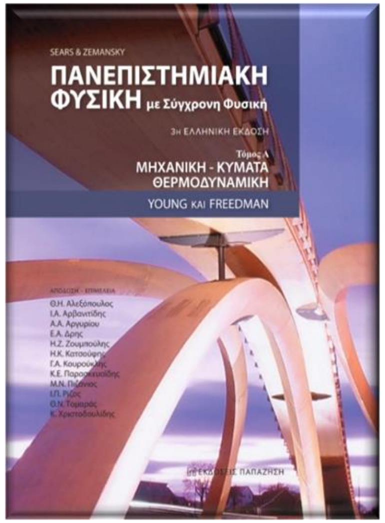
Thomas Acquinas

Διδάσκοντες
Παναγιώτα Καραχάλιου
Επίκουρη Καθηγήτρια, pkara@upatras.gr

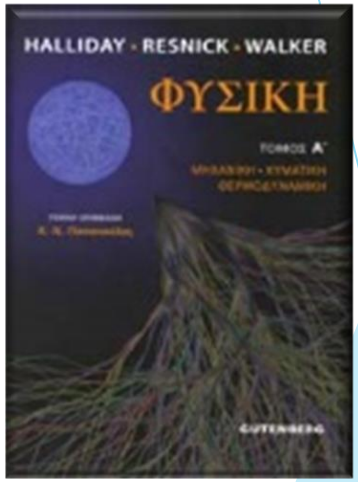
Χριστόφορος Κροντηράς
Καθηγητής, krontira@physics.upatras.gr

Προτεινόμενη Βιβλιογραφία

ΦΥΣΙΚΗ ΓΙΑ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΕΣ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ, R. Serway, J. Jewett (Μετάφραση Χ. Βάρβογλης), ΚΛΕΙΔΑΡΙΘΜΟΣ ΕΠΕ



Sears & Zemansky, Πανεπιστημιακή Φυσική με Σύγχρονη Φυσική, Τόμος Α, Μηχανική-Κύματα, Θερμοδυναμική, Young-Freedman, Εκδόσεις Παπαζήση



ΦΥΣΙΚΗ (Τόμος 1 Εκδ.4η), Halliday, Resnick, Walker, Εκδόσεις Gutenberg

Η Έννοια της Στροφορμής $\vec{L}$

Στροφορμή

- Θεωρούμε σωμάτιο μάζας m που έχει διάνυσμα θέσης $\vec{\mathbf{r}}$ και κινείται με ορμή $\vec{\mathbf{p}}$.
- Υπολογίζουμε τη συνισταμένη ροπή.

$$\sum \vec{\tau} = \vec{\mathbf{r}} \times \sum \vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{r}} \times \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt}$$

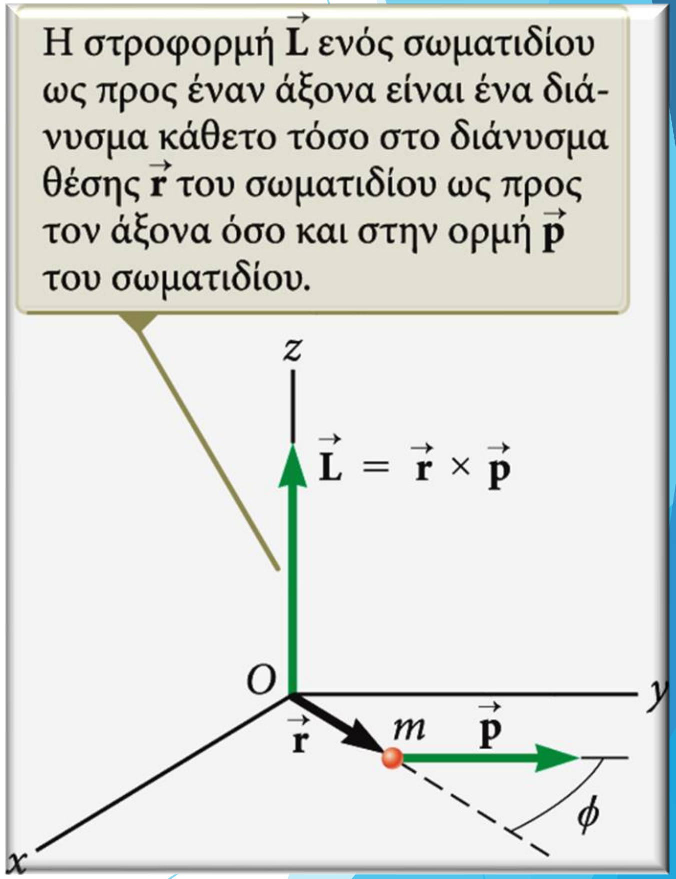
Προσθέτουμε τον όρο $\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} \times \vec{\mathbf{p}} \left(\text{επειδή είναι ίσος με } 0, \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \vec{v} \parallel \vec{p} \right)$

$$\sum \vec{\tau} = \frac{d(\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}})}{dt}$$

Ορίζουμε τη Στροφορμή L του σωματίου ως το διάνυσμα του εξωτερικού γινομένου του διανύσματος θέσης του σωματίου και του διανύσματος της ορμής του.

$$\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}$$

$$\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt}$$

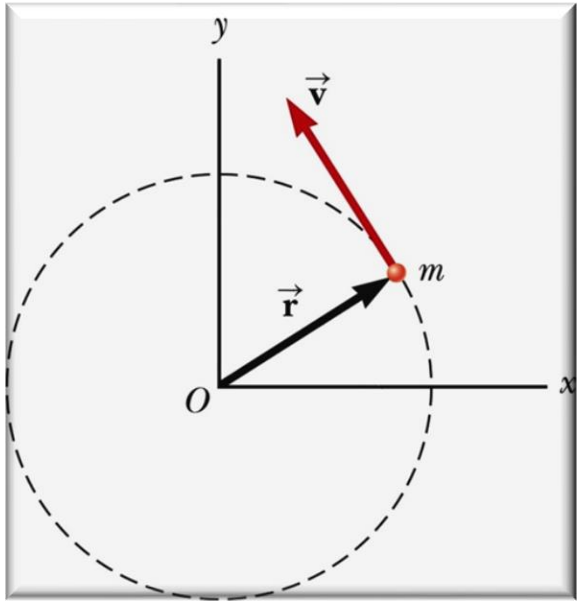


Στο σύστημα SI, η στροφορμή έχει μονάδες (kg·m^2)/ s.
Το μέτρο της στροφορμής είναι $L = mvr \sin\phi$

Στροφορμή σωματιδίου

- Το διάνυσμα $\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}$ έχει φορά από το διάγραμμα προς τα έξω.
- Το μέτρο του είναι

  $L = mvr \sin 90^o = mvr = m(\omega r)r = I\omega$
- Χρησιμοποιούμε το sin 90º επειδή τα v και r είναι κάθετα μεταξύ τους.
- Ένα σωματίδιο που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση έχει σταθερή στροφορμή ως προς τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο της τροχιάς του.



Στροφορμή ενός συστήματος σωματιδίων

- Η συνολική στροφορμή ενός συστήματος σωματιδίων ορίζεται ως το διανυσματικό άθροισμα της στροφορμής των μεμονωμένων σωματιδίων.

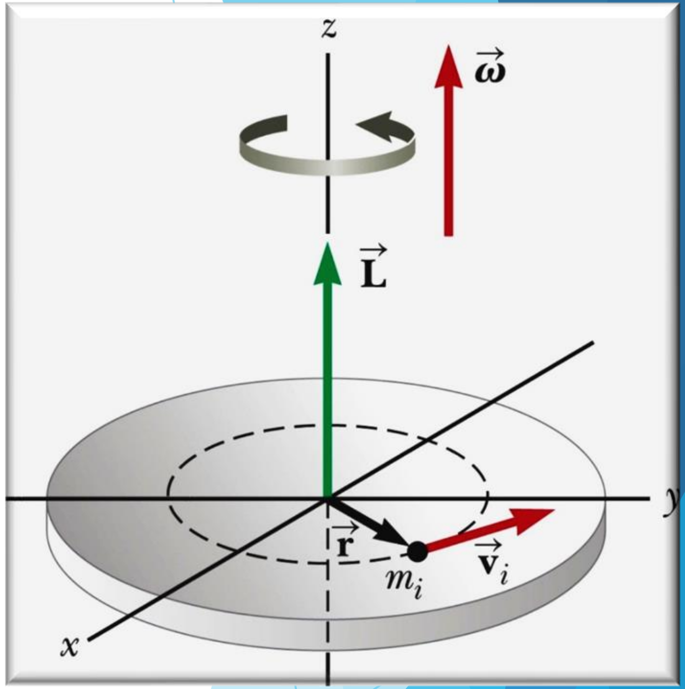
$$\vec{\mathbf{L}}_{\sigma\upsilon\nu.} = \vec{\mathbf{L}}_1 + \vec{\mathbf{L}}_2 + \ldots + \vec{\mathbf{L}}_n = \sum_i \vec{\mathbf{L}}_i$$

- Αν παραγωγίσουμε την εξίσωση ως προς τον χρόνο, θα πάρουμε

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}_{\sigma\upsilon\nu.}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{\mathbf{L}}_i}{dt} = \sum_i \vec{\tau}_i$$

Στροφορμή περιστρεφόμενου άκαμπτου σώματος

- Κάθε σωματίδιο του σώματος περιστρέφεται στο επίπεδο *xy* γύρω από τον άξονα *z* με γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω.
- Η στροφορμή ενός μεμονωμένου σωματιδίου είναι $L_i = m_i r_i^2 \omega$.
- Τα $\vec{L}$ και $\vec{\omega}$ έχουν τη διεύθυνση του άξονα *z*.



- Για να υπολογίσουμε τη στροφορμή ολόκληρου του σώματος, προσθέτουμε τις στροφορμές όλων των μεμονωμένων σωματιδίων.

$$L_z = \sum_i L_i = \sum_i \left(m_i r_i^2\right)\omega = I\omega$$

- Με παραγώγιση παίρνουμε τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για την περιστροφή.

$$\sum \vec{\tau}_{\text{εξωτ.}} = \frac{dL_z}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha_{\gamma\omega\nu}.$$

- Η εξίσωση αυτή αναπαριστά μαθηματικά το μοντέλο ανάλυσης του άκαμπτου σώματος υπό την επίδραση ροπής.

Στροφορμή ενός συστήματος σωματιδίων

- Οι ροπές που σχετίζονται με τις εσωτερικές δυνάμεις ενός συστήματος σωματιδίων είναι μηδενικές.
- Άρα, $$\sum \vec{\tau}_{\text{εξωτ.}} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}_{\text{συν.}}}{dt}$$
- Η συνισταμένη εξωτερική ροπή που ασκείται σε ένα σύστημα ως προς έναν άξονα, ο οποίος διέρχεται από την αρχή ενός αδρανειακού συστήματος αναφοράς, ισούται με τον ρυθμό μεταβολής της συνολικής στροφορμής του συστήματος ως προς αυτή την αρχή (Ροπές και στροφορμή υπολογίζονται ως προς την ίδια αρχή αξόνων, η οποία μπορεί να είναι οποιοδήποτε σημείο αν το ΚΜ δεν επιταχύνεται ως προς κάποιο αδρανειακό σύστημα αναφοράς).
- Η συνισταμένη ροπή που ασκείται σε ένα σύστημα ως προς έναν άξονα, ο οποίος διέρχεται από το κέντρο μάζας του συστήματος, ισούται με τον ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του συστήματος, ανεξάρτητα από την κίνηση του κέντρου μάζας.
- Αυτό ισχύει ακόμα και στην περίπτωση που το κέντρο μάζας πραγματοποιεί επιταχυνόμενη κίνηση, με την προϋπόθεση ότι η ροπή και η στροφορμή υπολογίζονται ως προς το κέντρο μάζας.
- Αν αναδιατάξουμε την εξίσωση, θα πάρουμε.
- Η σχέση αυτή είναι το **θεώρημα ώθησης-στροφορμής**.

$$\int \left(\sum \vec{\tau}_{\text{εξωτ.}} \right) dt = \Delta \vec{\mathbf{L}}_{\text{συν.}}$$

Αρχή Διατήρησης της στροφορμής

- **Η συνολική στροφορμή ενός συστήματος έχει σταθερό μέτρο και κατεύθυνση αν η συνισταμένη εξωτερική ροπή που ασκείται στο σύστημα είναι μηδενική.**
    - **Συνισταμένη ροπή = 0 σημαίνει ότι το σύστημα είναι απομονωμένο.**
    - **Σε αυτή την αρχή βασίζεται το μοντέλο του απομονωμένου συστήματος ως προς τη στροφορμή.**

$$\vec{\mathbf{L}}_{\text{συν.}} = \text{σταθερή ή } \vec{\mathbf{L}}_i = \vec{\mathbf{L}}_f$$

- **Για να διατηρηθεί η στροφορμή απαιτείται μια αντισταθμιστική μεταβολή της γωνιακής ταχύτητας.**

$$I_i\,\omega_i = I_f\,\omega_f$$

Αρχή διατήρησης της Στροφορμής - Σύνοψη

- Για ένα απομονωμένο σύστημα,

(1) Διατήρηση της ενέργειας:

- $E_i = E_f$

(2) Διατήρηση της ορμής:

- $\vec{\mathbf{p}}_i = \vec{\mathbf{p}}_f$
- Αν η συνισταμένη εξωτερική δύναμη που ασκείται στο σύστημα είναι μηδενική.

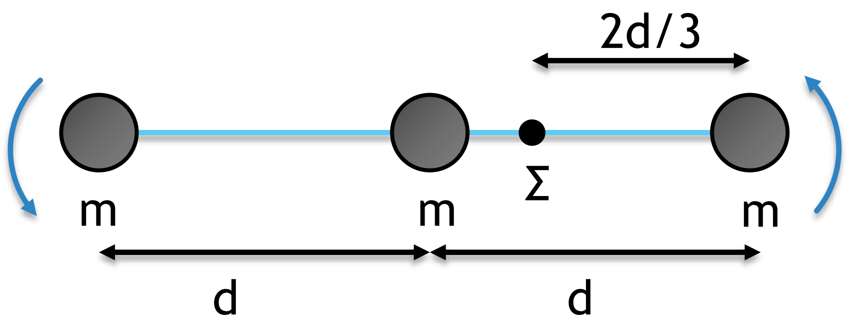
(3) Διατήρηση της στροφορμής:

- $\vec{\mathbf{L}}_i = \vec{\mathbf{L}}_f$
- Αν η συνισταμένη εξωτερική ροπή που ασκείται στο σύστημα είναι μηδενική.

Στροφορμή - Παράδειγμα - 1 -

Τρία σωματίδια της ίδιας μάζας m είναι προσαρτημένα σε άκαμπτη ράβδο αμελητέας μάζας (σχήμα). Η ράβδος περιστρέφεται ελεύθερα, στο κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από άξονα χωρίς τριβές ο οποίος είναι κάθετος στη ράβδο και διέρχεται από το σημείο Σ. Η ράβδος αφήνεται από την οριζόντια θέση τη χρονική στιγμή t=0. Να υπολογίσετε: i) Τη ροπή αδράνειας των τριών σωματιδίων ως προς τον άξονα περιστροφής. ii) Τη μηχανική ροπή που ασκείται στο σύστημα τη χρονική στιγμή t=0. iii) Τη γωνιακή επιτάχυνση του συστήματος τη χρονική στιγμή t=0. iv) Τη γραμμική επιτάχυνση του σωματιδίου 3 τη χρονική στιγμή t=0. v) Τη μέγιστη κινητική ενέργεια του συστήματος. vi) Τη μέγιστη γωνιακή ταχύτητα του συστήματος. vii) Τη μέγιστη στροφορμή του συστήματος.

Λύση



i) $I = m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2 + m_3 d_3^2 = m\left(\frac{4d}{3}\right)^2 + m\left(\frac{d}{3}\right)^2 + m\left(\frac{2d}{3}\right)^2 = \frac{7md^2}{3}$

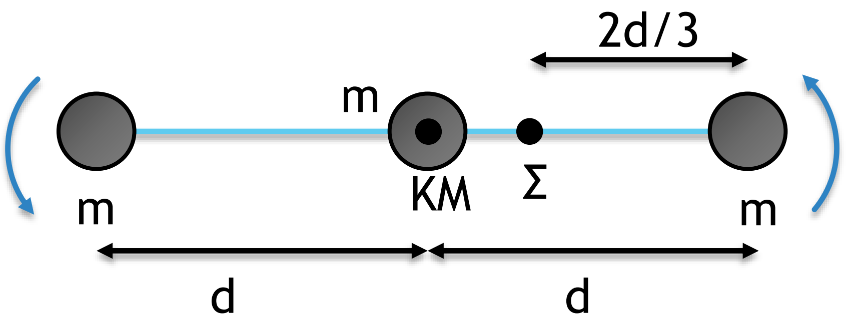
ii) $\Sigma\tau = m_1 g d_1 + m_2 g d_2 - m_3 g d_3 = mgd$

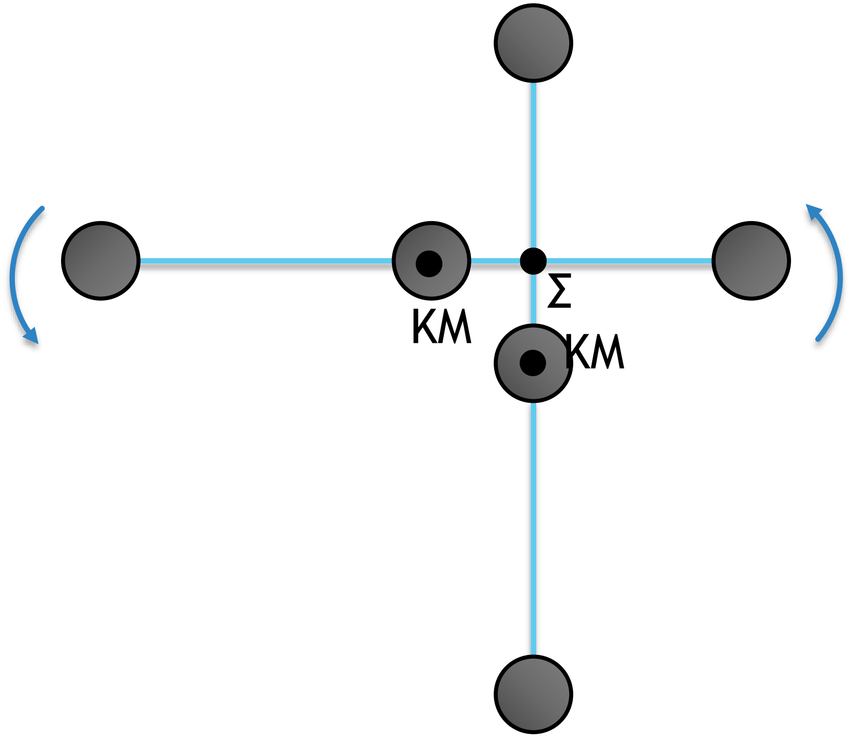
iii) $\Sigma\tau = I\alpha_\gamma \rightarrow \alpha_\gamma = \frac{\Sigma\tau}{I} = \frac{3g}{7d}$

iv) $\alpha_3 = \alpha_\gamma d_3 \rightarrow \alpha_3 = \frac{3g}{7d}\frac{2d}{3} = \frac{2g}{7}$

v) $K_{\max} = U_{\max} = U_{\alpha\rho\chi}$

Στροφορμή - Παράδειγμα - 1 - Συνέχεια





v) Έυρεση κ.μ

$$x_{KM} = \frac{1}{3m}\left[-m\frac{4d}{3} - m\frac{d}{3} + m\frac{2d}{3}\right] = -\frac{d}{3}$$

$$K_{\max} = U_{\max} = U_{\alpha\rho\chi} = 3mg\frac{d}{3} = mgd$$

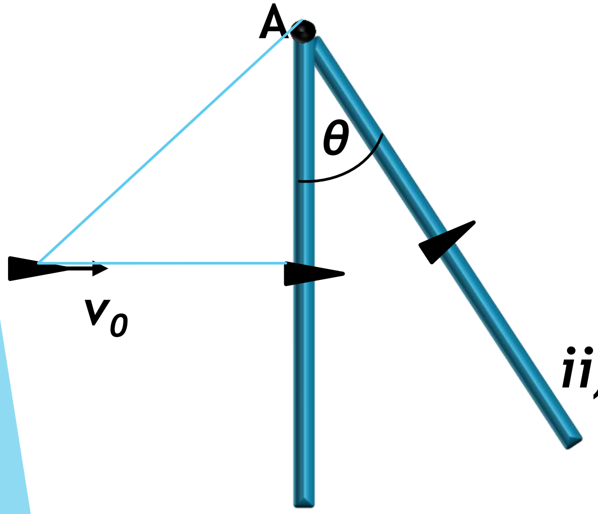
vi) $K_{\max} = mgd = \frac{1}{2}I\omega_{\max}^2 \rightarrow \omega_{\max} = \sqrt{\frac{2mgd}{\frac{7md^2}{3}}} = \sqrt{\frac{6g}{7d}}$

vii) $L_{\max} = I\omega_{\max} = \frac{7md^2}{3}\sqrt{\frac{6g}{7d}} = md\sqrt{\frac{14dg}{3}}$

Στροφορμή - Παράδειγμα - 2 -

Άκαμπτη ράβδος μάζας Μ και μήκους ℓ μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα, χωρίς τριβές, στο κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από άξονα ο οποίος είναι κάθετος στη ράβδο και διέρχεται από το άκρο της Α. Η ράβδος αφήνεται στην κατακόρυφη θέση. Βλήμα μάζας m κατευθύνεται προς τη ράβδο με ταχύτητα v_0 και σφηνώνεται στο κέντρο μάζας αυτής. Να υπολογίσετε: i) Τη γωνιακή ταχύτητα του συστήματος ράβδος-βλήμα αμέσως μετά τη συσσωμάτωσή τους. ii) Τη μέγιστη γωνία θ, από την κατακόρυφη θέση, κατά την οποία θα εκτραπεί το συσσωμάτωμα. iii) Την ποσοστιαία μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος μετά τη συσσωμάτωση ράβδου-βλήματος.

Λύση



$$\left.\begin{aligned} &\text{i)}\quad L_{\alpha\rho\chi} = L_{\tau\varepsilon\lambda} \rightarrow m v_o \frac{\ell}{2} = I\omega \qquad (1) \\ &I = \frac{1}{3}M\ell^2 + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \qquad (2) \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &m v_o \frac{\ell}{2} = \frac{(4M+3m)\ell^2}{12}\omega \\ &\omega = \frac{6 m v_0}{(4M+3m)\ell} \end{aligned}$$

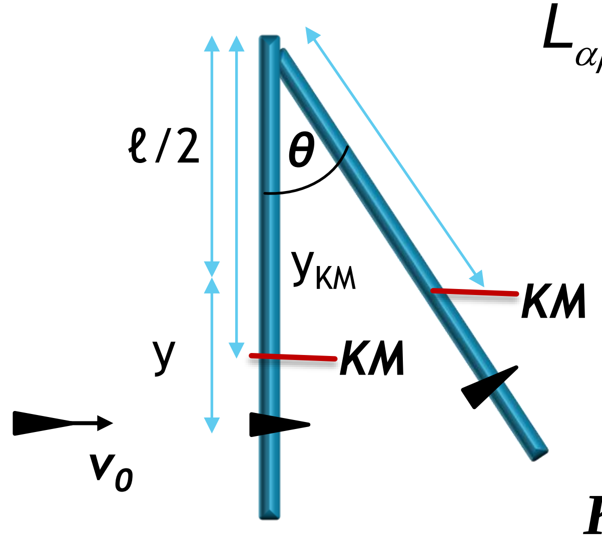
$$\text{ii)}\; K_a + U_a = K_\tau + U_\tau \rightarrow \frac{1}{2}I\omega^2 = (m+M)gh \rightarrow h = \frac{I\omega^2}{2(m+M)g}, \quad \cos\theta = 1 - \frac{2h}{\ell}$$

$$\text{ii)}\quad K_{\pi\rho\iota\nu} = \frac{1}{2}m v_0^2, \quad K_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} = \frac{1}{2}I\omega^2$$

Ποσοστιαία Μεταβολή: $$\frac{K_{\pi\rho\iota\nu} - K_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}}{K_{\pi\rho\iota\nu}} = \frac{\frac{1}{2}m v_0^2 - \frac{1}{2}I\omega^2}{\frac{1}{2}m v_0^2} = 1 - \frac{I\omega^2}{m v_0^2} = 1 - \frac{I\omega\omega}{m v_0^2} = 1 - \frac{m v_0 \frac{\ell}{2}\omega}{m v_0^2} = 1 - \frac{\ell\omega}{2v_0} = \ldots = \frac{4M}{4M+3m}$$

Στροφορμή - Παράδειγμα -3-

Άκαμπτη ράβδος μάζας Μ και μήκους ℓ μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα, χωρίς τριβές, στο κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από άξονα ο οποίος είναι κάθετος στη ράβδο και διέρχεται από το άκρο της Α. Η ράβδος αφήνεται στην κατακόρυφη θέση. Βλήμα μάζας m κατευθύνεται προς τη ράβδο με ταχύτητα v_0 και σφηνώνεται σε σημείο που απέχει απόσταση y από το κέντρο μάζας αυτής. Να υπολογίσετε: i) Τη γωνιακή ταχύτητα του συστήματος ράβδος-βλήμα αμέσως μετά τη συσσωμάτωσή τους. ii) Τη μέγιστη γωνία θ, από την κατακόρυφη θέση, κατά την οποία θα εκτραπεί το συσσωμάτωμα.



$$L_{\alpha\rho\chi} = L_{\tau\varepsilon\lambda} \rightarrow mv_o\left(\frac{\ell}{2}+y\right) = I\omega \quad (1)$$

$$I = \frac{1}{3}M\ell^2 + m\left(\frac{\ell}{2}+y\right)^2 \quad (2)$$

$$\omega = \frac{mv_0\left(\frac{\ell}{2}+y\right)}{\frac{1}{3}M\ell^2 + m\left(\frac{\ell}{2}+y\right)^2}$$

$$K_a + U_a = K_\tau + U_\tau \rightarrow \frac{1}{2}I\omega^2 = (m+M)gh \rightarrow h = \frac{I\omega^2}{2(m+M)g}, \quad \cos\theta = \frac{y_{KM}-h}{y_{KM}}$$

$$\acute{o}\pi o\upsilon \quad y_{KM} = \frac{1}{(m+M)}\left[M\frac{\ell}{2} + m\left(\frac{\ell}{2}+y\right)\right]$$

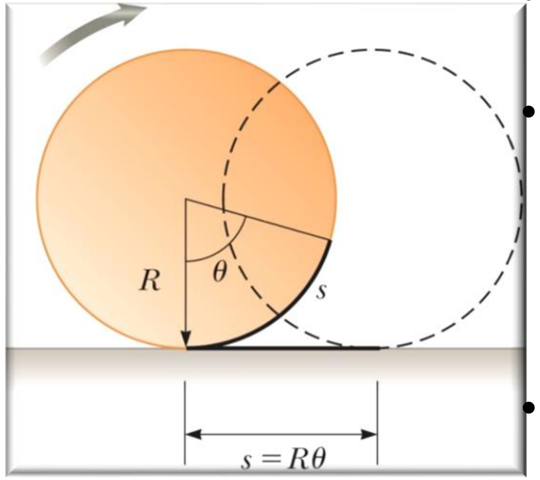
Κύλιση χωρίς ολίσθηση

- Η μεταφορική ταχύτητα του κέντρου μάζας έχει μέτρο

$$v_{KM} = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega$$

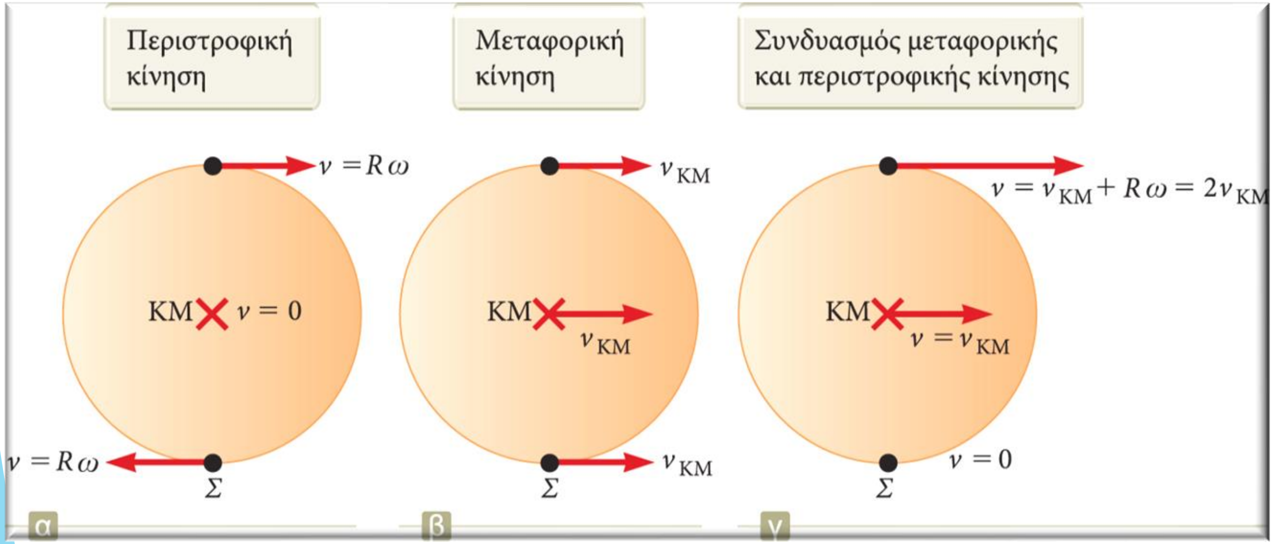
- Η μεταφορική επιτάχυνση του κέντρου μάζας έχει μέτρο

$$\alpha_{KM} = \frac{dv_{KM}}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\alpha_{\gamma\omega\nu.}$$



- Συνδυασμός μετατόπισης και περιστροφής.
- Το σημείο επαφής μεταξύ της επιφάνειας και του κυλίνδρου έχει μεταφορική ταχύτητα μηδενικού μέτρου (γ).

- Η συνολική κινητική ενέργεια ενός κυλιόμενου σώματος ισούται με την κινητική ενέργεια της μετατόπισης του κέντρου μάζας του συν την κινητική ενέργεια της περιστροφής γύρω από το κέντρο μάζας του.

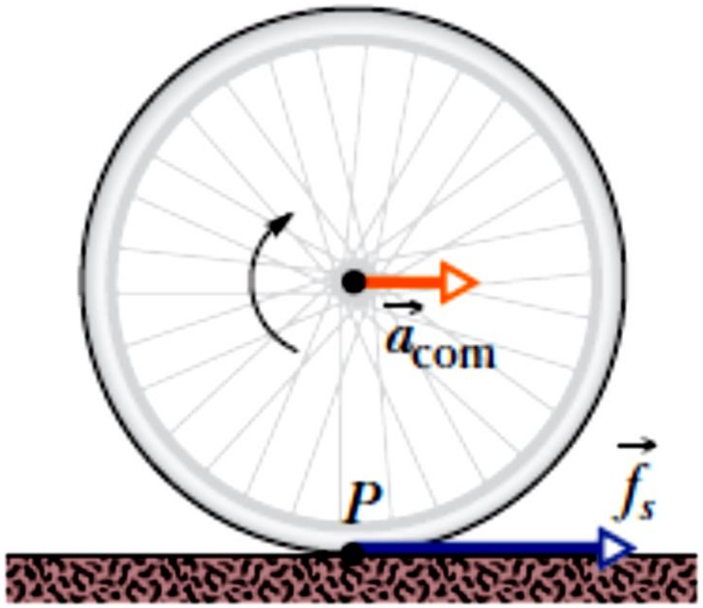


$$K = \tfrac{1}{2} I_P \omega^2 = \tfrac{1}{2}(I_{KM} + MR^2)\omega^2 =$$

$$\tfrac{1}{2} I_{KM}\omega^2 + \tfrac{1}{2} M v_{KM}^2$$

$$\boxed{K = \tfrac{1}{2} I_{KM}\omega^2 + \tfrac{1}{2} M v_{KM}^2}$$

Δυνάμεις της Κύλισης



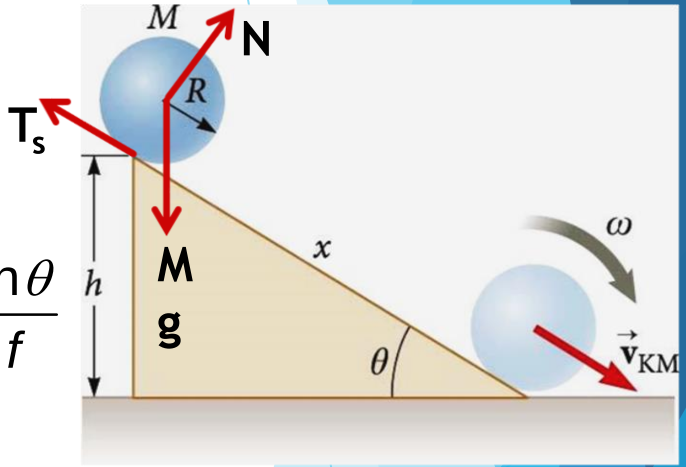
- Όταν ο τροχός κυλάει με ταχύτητα σταθερού μέτρου δεν έχει την τάση να ολισθήσει στο σημείο P. Δεν υπάρχει δύναμη τριβής.
- Όταν στον τροχό ασκείται δύναμη τότε υπάρχει επιτάχυνση α του ΚΜ και ο τροχός αποκτά γωνιακή επιτάχυνση $α_γ$. Αν δεν υπάρχει κύλιση τότε ασκείται δύναμη τριβής που είναι στατική τριβή και ασκείται όπως φαίνεται στο σχήμα. Τότε και μόνο ισχύει η σχέση $α_{ΚΜ}=α_γ R$.
- Όταν υπάρχει ολίσθηση τότε η δύναμη τριβής είναι τριβή ολίσθησης. Η κίνηση δεν είναι ομάλη κύλιση και η παραπάνω σχέση δεν ισχύει.

Κύλιση - Παράδειγμα - 1 -

Συμπαγής κύλινδρος μάζας Μ και ακτίνας R, αφήνεται στην κορυφή κεκλιμένου επιπέδου γωνίας θ. Να υπολογίσετε i) την επιτάχυνση α του κέντρου μάζας του κυλίνδρου, ii) Τη ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου στο κατώτατο σημείο του κεκλιμένου επιπέδου.

Λύση

- **Η κύλιση είναι εφικτή μόνο αν υπάρχει δύναμη τριβής μεταξύ του κυλίνδρου και του επιπέδου. Η τριβή παράγει την απαιτούμενη ροπή για την περιστροφή.**



$$\left.\begin{aligned} &Mg\sin\theta - T_s = M\alpha_{KM} \quad (1) \\ &T_s R = I\alpha_{\gamma\omega\nu.} \quad (2) \\ &\alpha_{KM} = R\alpha_{\gamma\omega\nu.} \quad (3) \end{aligned}\right\} Mg\sin\theta - I_{KM}\frac{\alpha_{KM}}{R^2} = M\alpha_{KM} \rightarrow \alpha_{KM} = \frac{g\sin\theta}{1+\dfrac{I_{KM}}{MR^2}} = \frac{g\sin\theta}{1+f}$$

Αλλά: $I_{\kappa\upsilon\lambda.} = \frac{1}{2}MR^2, f = 1/2$

$$\boxed{\alpha_{KM} = \frac{2g\sin\theta}{3}}$$

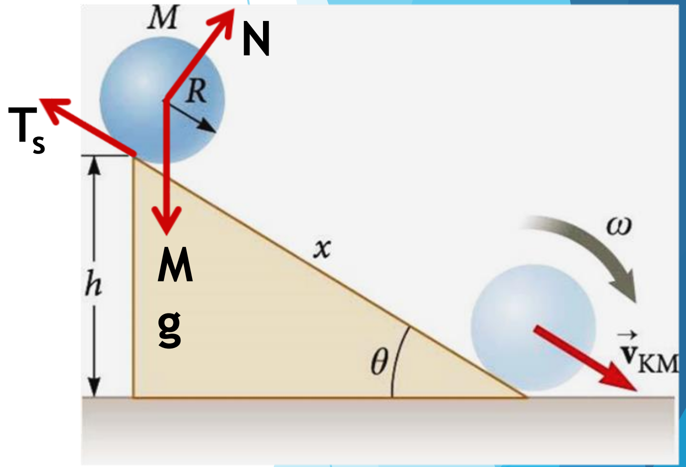
$$\left.\begin{aligned} &v_{KM} = \alpha_{KM} t \\ &x = \frac{1}{2}\alpha_{KM}t^2 \rightarrow \frac{h}{\sin\theta} = \frac{1}{2}\alpha_{KM}t^2 \end{aligned}\right\} \quad \boxed{v_{KM} = \sqrt{\frac{2gh}{1+f}}}$$

Κύλιση - Παράδειγμα - 1 -

Συμπαγής κύλινδρος μάζας M και ακτίνας R, αφήνεται στην κορυφή κεκλιμένου επιπέδου γωνίας θ. Να υπολογίσετε i) Τη ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου στο κατώτατο σημείο του κεκλιμένου επιπέδου, ii) την επιτάχυνση α του κέντρου μάζας του κυλίνδρου

Λύση

- **Δεν υπάρχει απώλεια μηχανικής ενέργειας επειδή το σημείο επαφής είναι ακίνητο ως προς την επιφάνεια σε κάθε χρονική στιγμή.**
- Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας:
- Έστω ότι *U* = 0 στη βάση του επιπέδου



i) $$K_a + U_a = K_\tau + U_\tau$$

$$Mgh = \frac{1}{2} I_{KM}\omega^2 + \frac{1}{2} M v_{KM}^2 \rightarrow Mgh = \frac{1}{2} I_{KM}\frac{v_{KM}^2}{R^2} + \frac{1}{2} M v_{KM}^2 \rightarrow$$

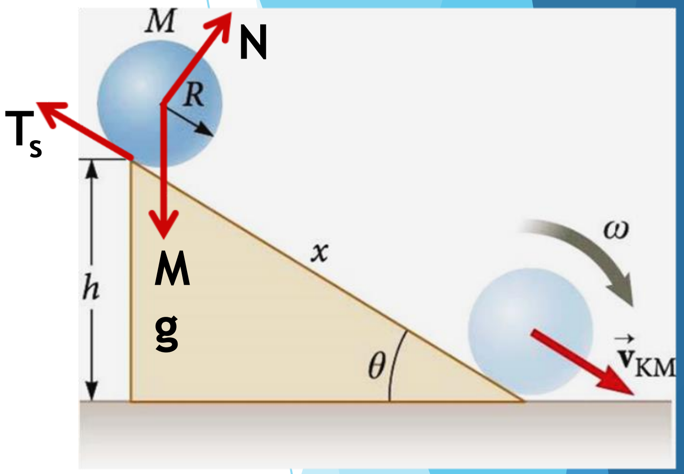
$$2gh = \left(\frac{I}{MR^2} + 1\right) v_{KM}^2 \rightarrow v_{KM} = \sqrt{\frac{2gh}{\left(\frac{I}{MR^2}+1\right)}} \rightarrow v_{KM} = \sqrt{\frac{2gh}{1+f}}$$

ii) $$v_{KM}^2 = \frac{2gh}{1+f} \rightarrow a_{KM}^2 t^2 = \frac{2g}{1+f} x \sin\theta \rightarrow a_{KM}^2 t^2 = \frac{2g}{1+f}\frac{1}{2}\alpha_{\mathrm{KM}} t^2 \sin\theta \rightarrow \alpha_{\mathrm{KM}} = \frac{g\sin\theta}{1+f}$$

Κύλιση - Παράδειγμα - 1 -

Γενίκευση…

Πέντε ομογενή σώματα, μια σφαίρα, ένας δακτύλιος, ένας συμπαγής κύλινδρος, ένας σφαιρικός φλοιός και ένας λεπτότοιχος κύλινδρος αφήνονται από το ίδιο σημείο κεκλιμένου επιπέδου. Τα σώματα έχουν διαφορετικές μάζες και ακτίνες.



$$\alpha_{KM} = \frac{g \sin\theta}{1+f}$$

Σφαίρα:	$0.714 g \sin\theta$
Δακτύλιος	$0.5 g \sin\theta$
Συμπαγής κύλινδρος:	$0.667 g \sin\theta$
Σφαιρικός φλοιός	$0.6 g \sin\theta$
Λεπτότοιχος κύλινδρος:	$0.5 g \sin\theta$

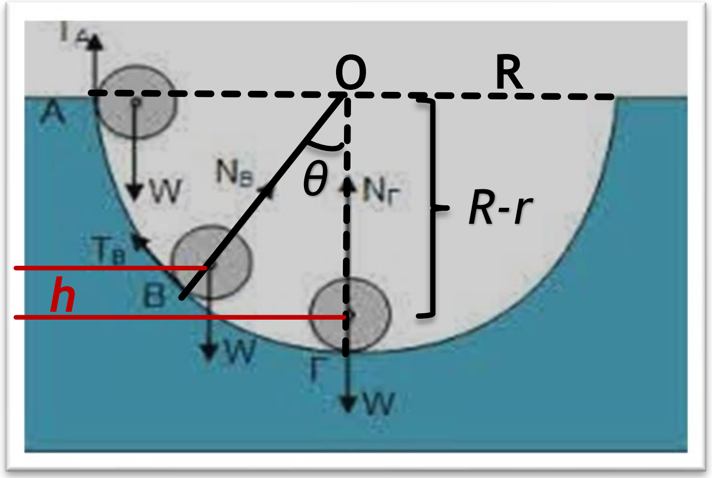
Με ποια σειρά θα φτάσουν στο έδαφος?

Επομένως **ασχέτως μάζας και ακτίνας** τα σώματα θα φτάσουν στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου με την εξής σειρά:

1) σφαίρα
2) συμπαγής κύλινδρος
3) σφαιρικός φλοιός
4,5) μαζί δακτύλιος και λεπτότοιχος κύλινδρος

Κύλιση - Παράδειγμα - 2 -

Σφαίρα μάζας m και ακτίνας r αφήνεται στο σημείο Β στο εσωτερικό ενός ημικυκλίου ακτίνας R όπως στο σχήμα. Η σφαίρα κυλίεται κατερχόμενη στο ημικύκλιο. Να υπολογίσετε i) την ταχύτητα της σφαίρας στο σημείο Γ, ii) τη γωνιακή ταχύτητά της στο ίδιο σημείο, iii) Την ταχύτητά της και τη γωνιακή της ταχύτητα στο σημείο Γ αν η σφαίρα έχει αφεθεί από το σημείο Α.



$$h = (R-r)(1-\cos\theta)$$

Λύση

(i), (ii) και <u>αφήνωντας</u> (K_a=0) τη σφαίρα σε οποίοδήποτε σημείο:

$$K_a + U_a = K_\tau + U_\tau$$

$$mgh = \frac{1}{2} I_{KM}\omega^2 + \frac{1}{2} m v_{KM}^2 \rightarrow mgh = \frac{1}{2} I_{KM} \frac{v_{KM}^2}{r^2} + \frac{1}{2} m v_{KM}^2 \rightarrow$$

$$2gh = \left(\frac{I}{mr^2} + 1\right) v_{KM}^2 \rightarrow v_{KM} = \sqrt{\frac{2gh}{1+f}}$$

$$v_{KM} = \sqrt{\frac{2gh}{1+f}} = \sqrt{\frac{2g(R-r)(1-\cos\theta)}{1+f}}$$

$$\omega = \frac{v_{KM}}{r}$$

(iii) θ=90° $\quad v_{KM} = \sqrt{\frac{2gh}{1+f}} = \sqrt{\frac{2g(R-r)}{1+f}}$

Ευχαριστώ

Καλό διάβασμα…