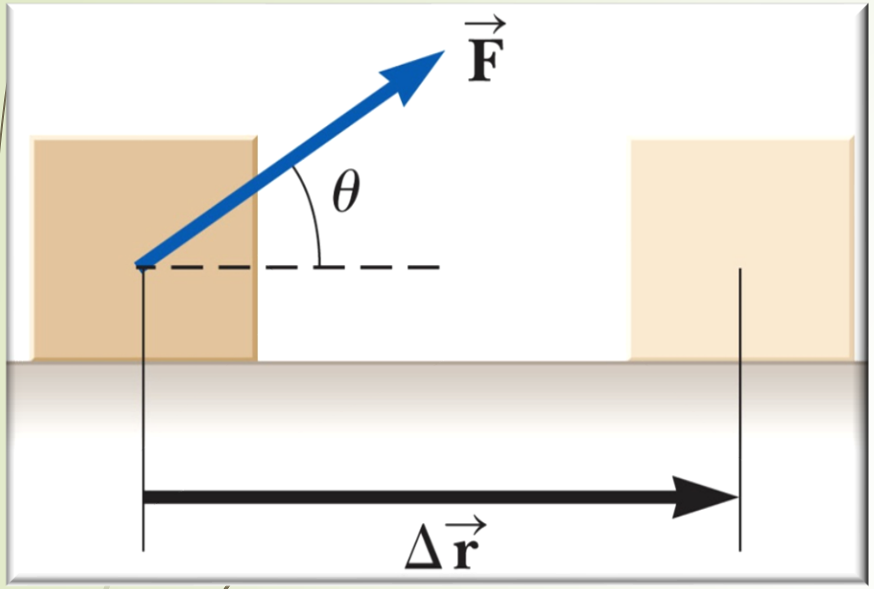
Η έννοια του Έργου

Έργο Δύναμης



Μία δύναμη $\vec{F}$ παράγει έργο όταν μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της.

Η σταθερή δύναμη $\vec{F}$ του σχήματος μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της κατά $\Delta\vec{r}$ και παράγει έργο:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$$

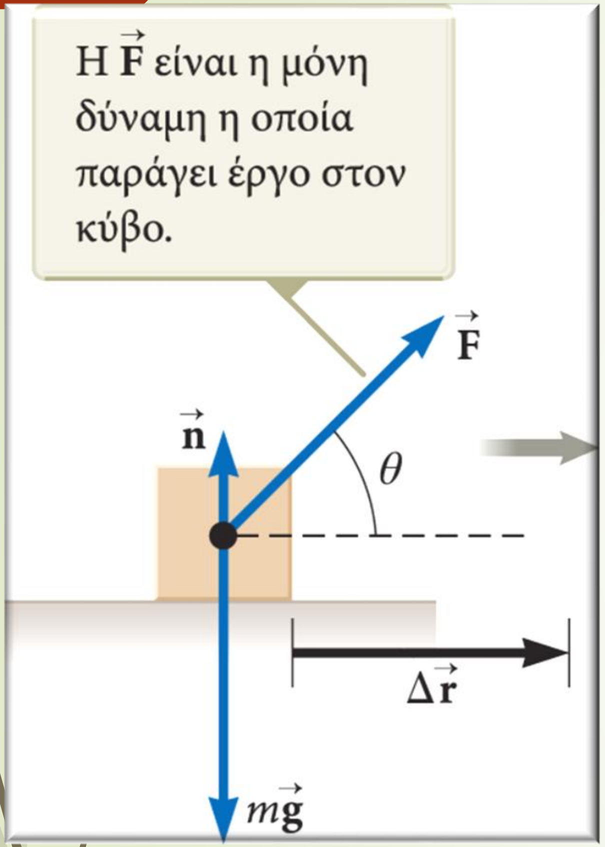
$$W = |\vec{F}||\Delta\vec{r}|\cos\theta$$

Η δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα δεν παράγει έργο αν το σώμα δεν μετακινείται.

Το έργο είναι βαθμωτό μέγεθος.

Η μονάδα μέτρησης του έργου είναι το joule (J). **1 joule = N $\cdot$ m = kg $\cdot$ m² / s²**

Έργο Δύναμης

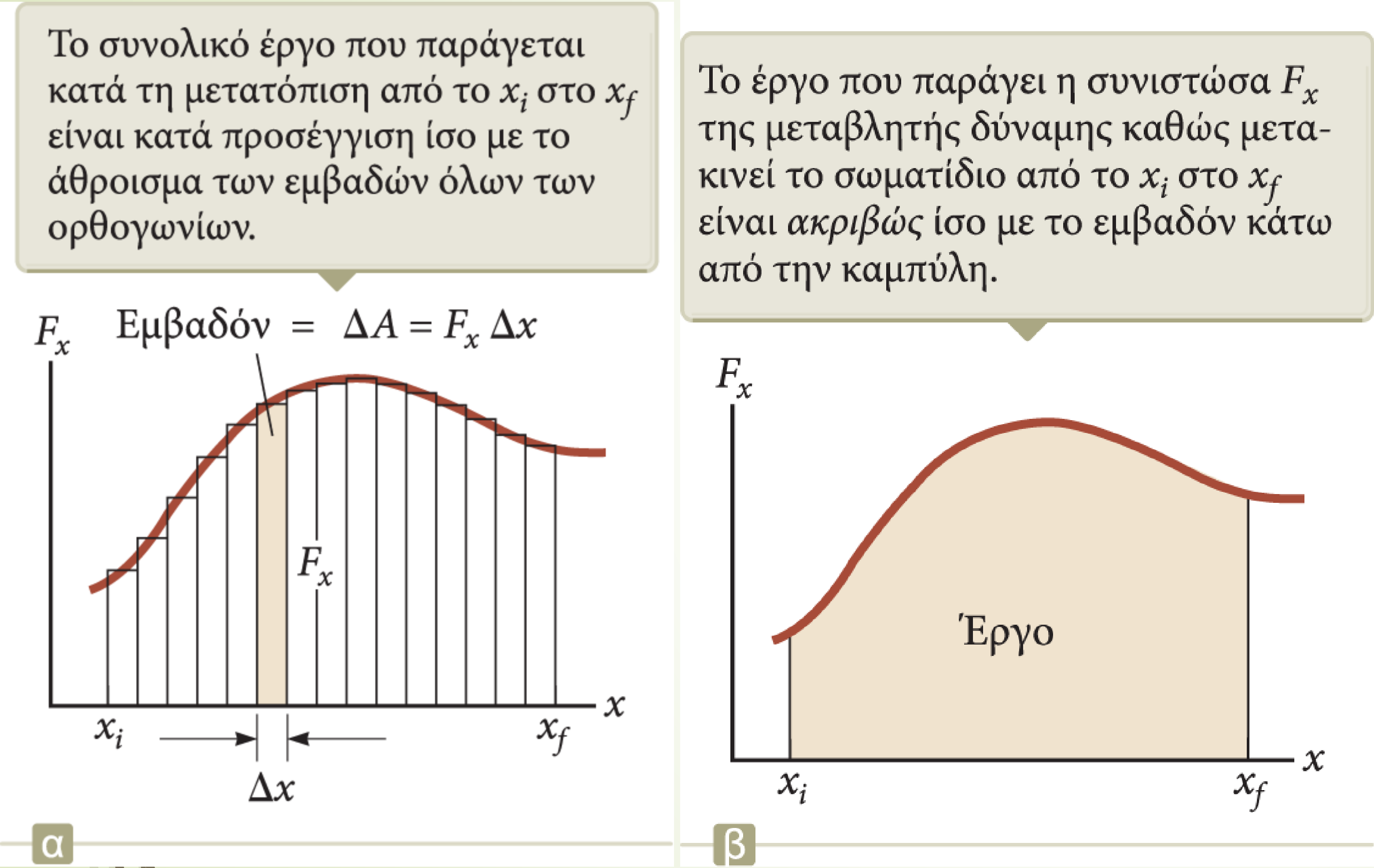


- Το πρόσημο του έργου εξαρτάται από την κατεύθυνση της δύναμης σε σχέση με τη μετατόπιση.
    - Το έργο είναι θετικό όταν η προβολή της $\vec{\mathbf{F}}$ στο $\Delta\vec{\mathbf{r}}$ έχει ίδια κατεύθυνση με τη μετατόπιση.
    - Το έργο είναι αρνητικό όταν η προβολή έχει κατεύθυνση αντίθετη από αυτή της μετατόπισης.
    - Το έργο είναι μηδέν όταν $\vec{\mathbf{F}} \perp \Delta\vec{\mathbf{r}}$
- Αν το έργο που παράγεται είναι θετικό, ενέργεια μεταφέρεται προς το σώμα.
- Αν το έργο που παράγεται είναι αρνητικό, ενέργεια μεταφέρεται από το σώμα.
- Το αποτέλεσμα είναι η μεταβολή της ενέργειας που είναι αποθηκευμένη στο σώμα.

Η κάθετη δύναμη και η βαρυτική δύναμη δεν παράγουν έργο στο σώμα καθώς $\cos\theta = \cos 90° = 0$

Η δύναμη $\vec{\mathbf{F}}$ είναι η μοναδική δύναμη που παράγει έργο στο σώμα

Έργο μεταβαλλόμενης δύναμης



$$W \approx \sum_{x_i}^{x_f} F_x \Delta x$$

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx$$

Έργο πολλών δυνάμεων

Το συνολικό έργο που παράγεται στο σύστημα είναι το έργο που παράγει η συνισταμένη δύναμη.

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx$$

Στη γενική περίπτωση μιας συνισταμένης δύναμης με μεταβαλλόμενο μέτρο και κατεύθυνση,

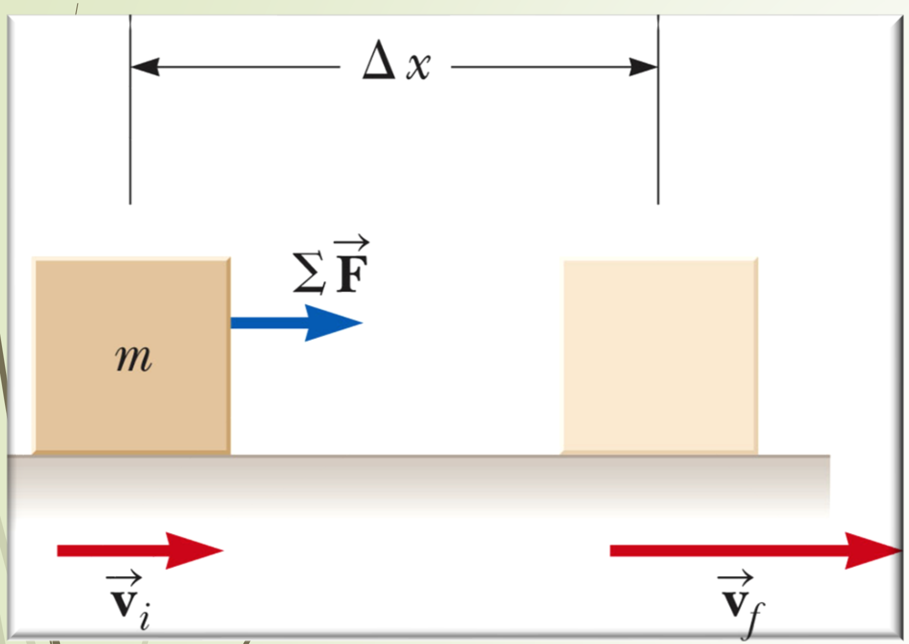
$$W_{A \to B} = \int_A^B \vec{F} . d\vec{\ell}$$

Ή ισοδύναμα το συνολικό έργο είναι ίσο με το αλγεβρικό άθροισμα του έργου που παράγει κάθε δύναμη χωριστά.

$$W_{A \to B} = \sum_{\Delta υνάμεις} \left(\int_A^B \vec{F} \cdot \Delta \vec{\ell} \right)$$

Έργο και Κινητική Ενέργεια

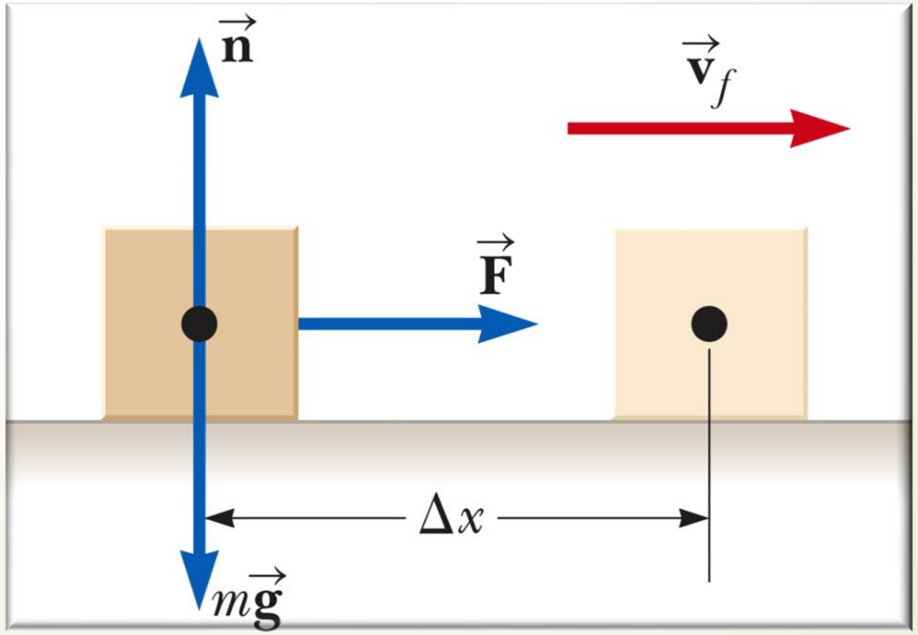
Μια πιθανή επίπτωση του έργου που παράγεται για να μεταφερθεί ενέργεια προς ένα σύστημα είναι η μεταβολή της κινητικής ενέργειάς του



$$W_{\varepsilon\xi\omega\tau.} = \int_{x_i}^{x_f} \sum F\,dx = \int_{x_i}^{x_f} m\,a\,dx \Rightarrow W_{\varepsilon\xi\omega\tau.} = \int_{x_i}^{x_f} m\frac{du}{dt}\,dx \Rightarrow$$

$$W_{\varepsilon\xi\omega\tau.} = \int_{v_i}^{v_f} m u\,du \Rightarrow W_{\varepsilon\xi\omega\tau.} = m\int_{v_i}^{v_f} u\,du \Rightarrow W_{\varepsilon\xi\omega\tau.} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 \Rightarrow$$

$$W_{\varepsilon\xi\omega\tau.} = K_f - K_i = \Delta K$$



$$W_{\varepsilon\xi\omega\tau.} = \Delta K = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - 0$$

Θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας

$$W_{εξωτ.} = K_f - K_i = \Delta K$$

- Το μέτρο της ταχύτητας του συστήματος αυξάνεται αν το συνολικό έργο που παράγεται σε αυτό είναι θετικό.
- Το μέτρο της ταχύτητας του συστήματος μειώνεται αν το συνολικό έργο είναι αρνητικό.
- Το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας αναφέρεται στο μέτρο της ταχύτητας του συστήματος και όχι στην ταχύτητά του ως διάνυσμα.

Θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας (πλήρης απόδειξη)

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_A^B m\vec{\alpha}\cdot\vec{u}dt = m = \int_A^B (\frac{d\vec{u}}{dt}\cdot\vec{u})\, dt$$

$$\frac{d}{dt}(u^2) = \frac{d}{dt}(uu) = \frac{d}{dt}(\vec{u}\cdot\vec{u}) = \frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{dt}}\cdot\vec{u} + \vec{u}\cdot\frac{d\vec{u}}{dt} = 2\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{dt}}\cdot\vec{u}$$

Αλλά.....

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{l} = \frac{1}{2}m\int_A^B \frac{d}{dt}(u^2)dt = \frac{1}{2}\, m\int_A^B du^2 = \frac{1}{2}\, mu_B^2 - \frac{1}{2}\, mu_A^2$$

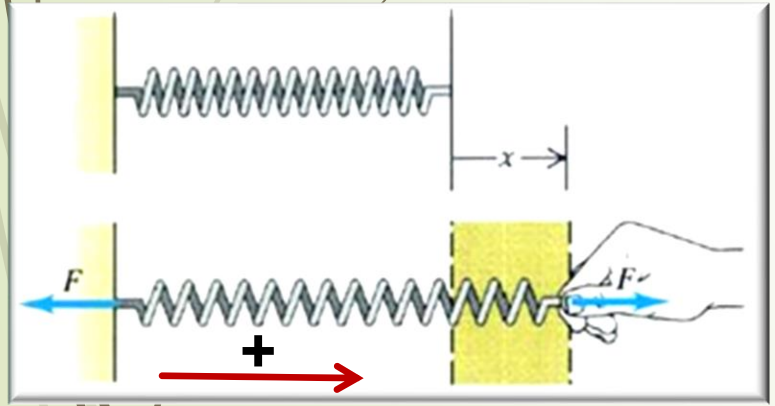
$$\boxed{W_{\varepsilon\xi\omega\tau.} = K_f - K_i = \Delta K}$$

Υπολογισμός έργου δύναμης σε μία διάσταση

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_A^B F_x\hat{\imath}\cdot dx\hat{\imath} = \int_{x_1}^{x_2} F_x\,dx$$

Παράδειγμα

Ελατήριο ασκεί δύναμη σε σώμα της μορφής F(x)=-kx, όπου k μία σταθερά, με αποτέλεσμα το σώμα να μετατοπίζεται από τη θέση x_1 στη θέση x_2. Να υπολογίσετε το έργο της δύναμης F(x).



$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_A^B -kx\hat{\imath}\cdot dx\hat{\imath} = -\int_{x_1}^{x_2} kx\,dx$$

$$W = -k\int_A^B x\,d\,x \Rightarrow W = -k\left.\frac{x^2}{2}\right|_{x_1}^{x_2} \Rightarrow W = -k\left(\frac{x_2{}^2}{2} - \frac{x_1{}^2}{2}\right) \Rightarrow$$

$$W = k\frac{x_1{}^2}{2} - k\frac{x_2{}^2}{2} < 0$$

Έργο δύναμης – Μια διάσταση-1-

Σώμα μάζας m μετακινείται πάνω σε οριζόντιο επίπεδο με συντελεστή τριβής μ που εξαρτάται από την θέση x, όπου

$$\mu(x) = \frac{\mu_0}{1+\frac{x}{a}}$$

και μ_0 μια σταθερά . Πόσο έργο καταναλώνεται από την δύναμη τριβής για μετατόπιση του αντικειμένου από τη θέση $x_1 = a$ έως τη θέση $x_2 = 2a$;

Η δύναμη της τριβής T κατά την κίνηση του σώματος είναι ίση με

$$T = \mu N = \mu B = \mu mg \qquad \Rightarrow \qquad T(x) = \mu_0 mg \frac{1}{1+\frac{x}{a}}$$

Το έργο της τριβής δίνεται από το ολοκλήρωμα της δύναμης $T(x)$ από την θέση $x_1 = a$ έως την θέση $x_2 = 2a$

$$W_{x_1\to x_2} = \int_{x_1}^{x_2} T dx \Rightarrow W_{x_1\to x_2} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mu_0 mg}{1+\frac{x}{a}} dx \Rightarrow W_{x_1\to x_2} = \mu_0 mg \int_a^{2a} \frac{1}{1+\frac{x}{a}} dx \Rightarrow W_{x_1\to x_2} = \mu_0 mg \int_a^{2a} \frac{a}{a+x} dx \Rightarrow$$

$$W_{x_1\to x_2} = a\mu_0 mg \int_a^{2a} \frac{1}{a+x} d(a+x) \Rightarrow W_{x_1\to x_2} = a\mu_0 mg \ln(a+x)\Big|_a^{2a} \Rightarrow W_{x_1\to x_2} = a\mu_0 mg \ln\frac{(a+2a)}{a+a} \Rightarrow$$

$$W_{x_1\to x_2} = a\mu_0 mg \ln\frac{3}{2}$$

Έργο δύναμης – Μια διάσταση-2-

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_A^B F_x\hat{\imath}\cdot dx\hat{\imath} = \int_{x_1}^{x_2} F_x\, dx$$

Δύναμη F στη θετική κατεύθυνση του άξονα x δρα σε σώμα που κινείται κατά μήκος του άξονα. Αν το μέτρο της δύναμης είναι $F=10e^{-x/2}$ (N) να υπολογίσετε το έργο που παράγει η δύναμη F καθώς το σώμα μετακινείται από τη θέση x=0 στη θέση x=2m.

$$W = \int_A^B \vec{F} * d\vec{l} \Rightarrow W = \int_0^2 10e^{-x/2}\,\vec{\imath} * dx\vec{\imath} \Rightarrow W = 10\int_0^2 e^{-x/2}\,dx \Rightarrow W = -10\int_0^2 e^{-x/2}\,d(-x) \Rightarrow$$

$$W = -20\int_0^2 e^{-x/2}\,d\left(-\frac{x}{2}\right) \Rightarrow W = -20e^{-x/2}\big]_0^2 \Rightarrow W = -20\,(e^{-2/2} - e^{0}) \Rightarrow W = -20\,(e^{-1} - 1) \Rightarrow$$

$$W = -20\,(0.36 - 1) \Rightarrow W = -20\,(-0.64) \Rightarrow W = 12.8\text{ J}$$

Έργο δύναμης – Μια διάσταση-1-

Δύναμη F=6t (Nt) όπου t είναι ο χρόνος ασκείται σε σώμα μάζας m=2Kg κατά μήκος του άξονα x. Αν το σώμα είναι αρχικά ακίνητο να υπολογιστεί το έργο της δύναμης στα πρώτα δύο δευτερόλεπτα της κίνησής του.

Λύση

Το έργο της δύναμης F δίδεται από το ολοκλήρωμα $W = \int_{x1}^{x2} F dx$. Επειδή η δύναμη F στο ολοκλήρωμα εξαρτάται από το χρόνο εκφράζουμε και το dx ως συνάρτηση του χρόνου. Υπολογίζουμε λοιπόν τη συνάρτηση x(t) από τον νόμο του Νεύτωνα.

$$F(t) = ma \Rightarrow F(t) = m\frac{du}{dt} \Rightarrow du = \frac{F(t)}{m}dt \Rightarrow \int_0^V du = \int_0^t \frac{6t}{m}dt \Rightarrow u\Big|_0^V = \frac{6}{m}\int_0^t tdt \Rightarrow V = \frac{6}{m}\frac{t^2}{2} \Rightarrow V = \frac{3t^2}{m} \Rightarrow V = \frac{3t^2}{2}\left(\frac{m}{s}\right)$$

$$V = \frac{3t^2}{2} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{3t^2}{2} \Rightarrow dx = \frac{3t^2}{2}dt \Rightarrow \int_0^x dx = \int_0^t \frac{3t^2}{2}dt \Rightarrow x = \frac{3}{2}\frac{t^3}{3} \Rightarrow x = \frac{t^3}{2}$$

Παραγωγίζουμε τη σχέση του x και υπολογίζουμε τη ποσότητα dx: $x = \frac{t^3}{2} \Rightarrow dx = \frac{3t^2}{2}dt$ **Τότε:**

$$W = \int_0^2 F(t)dx \Rightarrow W = \int_0^2 6t\frac{3t^2}{2}dt \Rightarrow W = 9\int_0^2 t^3 dt \Rightarrow W = 9\frac{t^4}{4}\Big|_0^2 \Rightarrow W = 9\frac{2^4}{4} \Rightarrow W = 36\,J$$

Υπολογισμός έργου δύναμης σε δύο διαστάσεις

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_A^B (F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath})\cdot(dx\hat{\imath} + dy\hat{\jmath}) = \int_{x_1}^{x_2} F_x\,dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y\,dy$$

Παράδειγμα

Σε σώμα εξασκείται η δύναμη $\vec{F} = (4x\hat{\imath} + 3y\hat{\jmath})\ (Nt)$ Το σώμα μετακινείται από τη θέση x=0m στη θέση x=5m κατά μήκος του άξονα x. Να υπολογίσετε το έργο που παράγει η δύναμη F.

Λύση

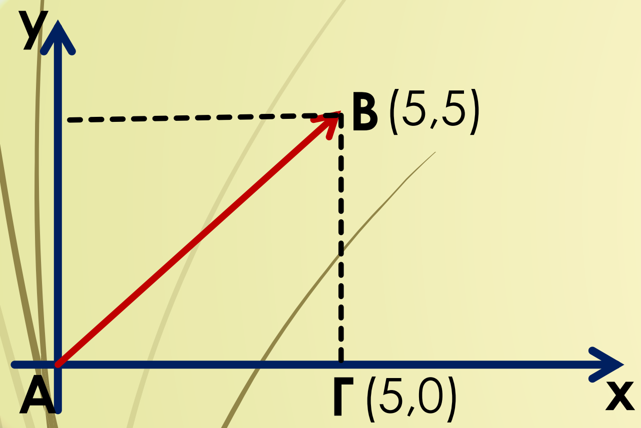
$$W = \int_A^B \vec{F}.d\vec{r} = \int_0^5 (4x\hat{i} + 3y\hat{j})\cdot(dx\hat{i}) \Rightarrow W = \int_0^5 4x dx \Rightarrow W = 4\frac{x^2}{2}\Big|_0^5 = 50J$$

Έργο δύναμης - 3 – Δύο διατάσεις

Να υπολογίσετε το έργο που παράγει η δύναμη $\vec{F} = \alpha y \hat{i} + b x \hat{j}$ κατά τη μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της από το σημείο Α (0,0) στο σημείο Β (5,5) κατά μήκος των εξής διαδρομών:

I) Κατά μήκος της ευθείας που ενώνει τα δύο σημεία Α και Β.

II) Κατά μήκος των ευθύγραμμων τμημάτων ΑΓ και ΓΒ όπου το σημείο Γ είναι το Γ (5,0).



I) $W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \Rightarrow W = \int_A^B \left(\alpha y \hat{i} + b x \hat{j}\right) \cdot \left(d x \hat{i} + d y \hat{j}\right) \Rightarrow W = \int_A^B (\alpha y d x + b x d y) \Rightarrow$

Αλλά ισχύει ότι: x=y και dx=dy. Οπότε:

$$W = \int_A^B (\alpha y d x + b x d y) \Rightarrow W = \int_0^5 (\alpha x d x + b y d y) \Rightarrow$$

$$W = \int_0^5 \alpha x d x + \int_0^5 b y d y \Rightarrow W = \alpha \int_0^5 x d x + b \int_0^5 y d y \Rightarrow$$

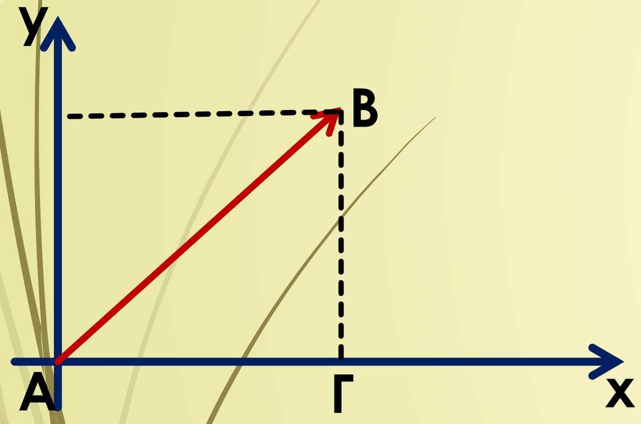
$$W = \alpha \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^5 + b \left. \frac{y^2}{2} \right|_0^5 \Rightarrow W = \frac{25}{2} a + \frac{25}{2} b \Rightarrow W = \frac{25}{2}(a+b)$$

Έργο δύναμης - 3 – Δύο διατάσεις

Να υπολογίσετε το έργο που παράγει η δύναμη $\vec{F} = \alpha y \hat{i} + b x \hat{j}$ κατά τη μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της από το σημείο Α (0,0) στο σημείο Β (5,5) κατά μήκος των εξής διαδρομών:

I) Κατά μήκος της ευθείας που ενώνει τα δύο σημεία Α και Β.

II) Κατά μήκος των ευθύγραμμων τμημάτων ΑΓ και ΓΒ όπου το σημείο Γ είναι το Γ (5,0).



II) $W = W_{A\to\Gamma} + W_{\Gamma\to B} = W = \int_A^\Gamma \left(\alpha y \hat{i} + b x \hat{j}\right) \cdot dx\hat{i} + \int_\Gamma^B \left(\alpha y \hat{i} + b x \hat{j}\right) \cdot dy\hat{j} \Rightarrow$

$$W = W_{A\to\Gamma} + W_{\Gamma\to B} = W = \int_0^5 \alpha y \, d x + \int_0^5 b x \, d y \Rightarrow$$

$$W = 0 + \int_0^5 b x \, d y \Rightarrow W = b x \int_0^5 d y \Rightarrow W = b x \, y\Big|_0^5 \Rightarrow W = b 5 \cdot 5 \Rightarrow W = 25b$$

Το έργο αυτής της δύναμης εξαρτάται από τη διαδρομή που ακολουθούμε για να μετακινηθούμε από το σημείο Α στο σημείο Β.

Έργο δύναμης -4 –Δύο διαστάσεις

Να υπολογίσετε το έργο που παράγει η δύναμη $\vec{F} = \left(x^2 + y^2\right)\hat{i} + 2xy\hat{j}$ κατά τη μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της από το σημείο Α (0,0) στο σημείο Β (2,4) κατά μήκος της καμπύλης y=x².

Λύση

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\,\vec{r} = \int_A^B \left(\left(x^2 + y^2\right)\hat{i} + 2xy\hat{j}\right) \cdot \left(d\,x\hat{i} + d\,y\,\hat{j}\right) \Rightarrow W = \int_0^2 \left(x^2 + y^2\right) d\,x + \int_0^4 2xydy \Rightarrow$$

$$W = \int_0^2 x^2 dx + \int_0^2 y^2 d\,x + 2\int_0^4 xydy$$

Αλλά ισχύει ότι: y=x² Οπότε:

$$W = \int_0^2 x^2 d\,x + \int_0^2 x^4 d\,x + 2\int_0^4 y^{1/2} ydy \Rightarrow W = \int_0^2 x^2 d\,x + \int_0^2 x^4 d\,x + 2\int_0^4 y^{3/2} dy \Rightarrow$$

$$W = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 + \left.\frac{x^5}{5}\right|_0^2 + 2\left.\frac{y^{5/2}}{5/2}\right|_0^4 \Rightarrow W = \cdots\cdot$$

Κάνετε τις πράξεις και υπολογίστε το τελικό αποτέλεσμα σε Joule

Έργο δύναμης-5-Τρεις διαστάσεις

Να βρεθεί το έργο που παράγει η δύναμη $\vec{F}=\left(3x^2+6y\right)\hat{i}-14yz\hat{j}+20xz^2\hat{k}$ (σε N και x σε m,) κατά τη μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της από το σημείο *A*(0, 0, 0) στο σημείο *B*(1, 1, 1) . Η διαδρομή είναι η καμπύλη *C*, η οποία δίνεται στην παραμετρική μορφή: x = *t*, *y* = *t* ² , *z* = *t* ³ .

Λύση

Επιβεβαιώνουμε ότι τα σημεία *A* και *B* πράγματι βρίσκονται πάνω στην καμπύλη C. Το σημείο *A* αντιστοιχεί στην τιμή *t* = 0 της παραμέτρου, και το *B* στην τιμή *t* = 1. Το παραγόμενο έργο είναι ίσο με:

$$W=\int_A^B \vec{\mathbf{F}}\cdot d\vec{\mathbf{r}}=\int_A^B (Fxdx+Fydy+Fzdz)=\int_A^B [(3x^2+6y)dx-14yzdy+20xz^2dz]$$

Για να υπολογίσουμε τα ολοκληρώματα, θα πρέπει να εκφράσουμε την υπό ολοκλήρωση ποσότητα συναρτήσει μίας μόνο μεταβλητής. Επιλέγουμε να εκφράσουμε όλες τις μεταβλητές συναρτήσει του *t* . Έτσι, είναι:

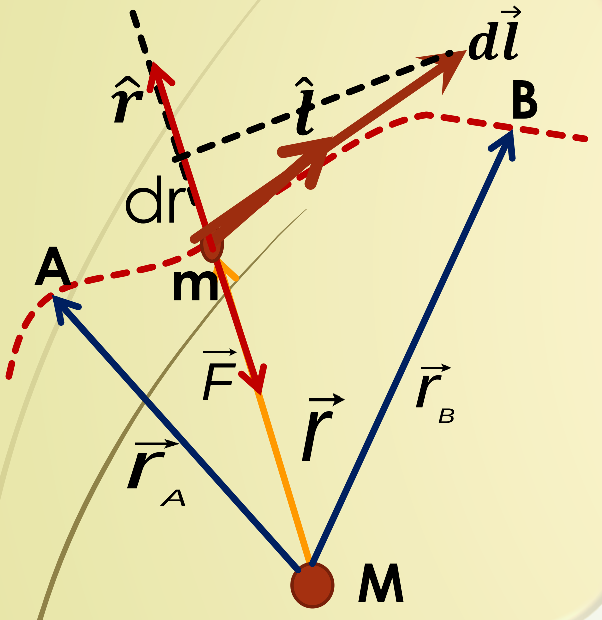
x = *t*, *y* = *t* ² , *z* = *t* ³ , και *dx* = *dt*, *dy* = 2*t dt*, *dz* = 3*t* ² *dt*

$$W=\int_A^B\left[\left(3x^2+6y\right)dx-14yz\,dy+20xz^2dz\right]=\int_0^1\left[\left(3t^2+6t^2\right)dt-14t^2t^3\left(2t\,dt\right)+20t\left(t^3\right)^2\left(3t^2dt\right)\right]$$

$$\int_0^1 (9t^2-28t^6+60t^9)dt=[3t^3-4t^7+6t^{10}]\Big|_0^1=5\,J$$

Έργο βαρυτικής δύναμης

Βαρυτικό Πεδίο



Υπολογίζουμε το έργο της βαρυτικής δύναμης κατά μήκος μιας τυχαίας διαδρομής από το σημείο Α στο Β

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_A^B \left(-G\frac{Mm}{r^2}\right)\hat{r}\cdot dl\hat{l} =$$

$$-GMm\int_A^B\left(\frac{dl}{r^2}\right)\hat{r}\cdot\hat{l} = -GMm\int_A^B\frac{dl}{r^2}\cos\theta$$

Αλλά $\quad dl\cos\theta = dr \quad$ **Οπότε:**

$$-GMm\int_A^B\frac{dl}{r^2}\cos\theta = -GMm\int_{r_A}^{r_B}\frac{dr}{r^2}$$

Τελικά:

$$W_{A\to B} = -\frac{GMm}{r_A} - \left(-\frac{GMm}{r_B}\right) = U_A - U_B$$

Συντηρητική Δύναμη

Το έργο της βαρυτικής δύναμης είναι ανεξάρτητο της διαδρομής και εξαρτάται μόνο από την αρχική και τελική θέση