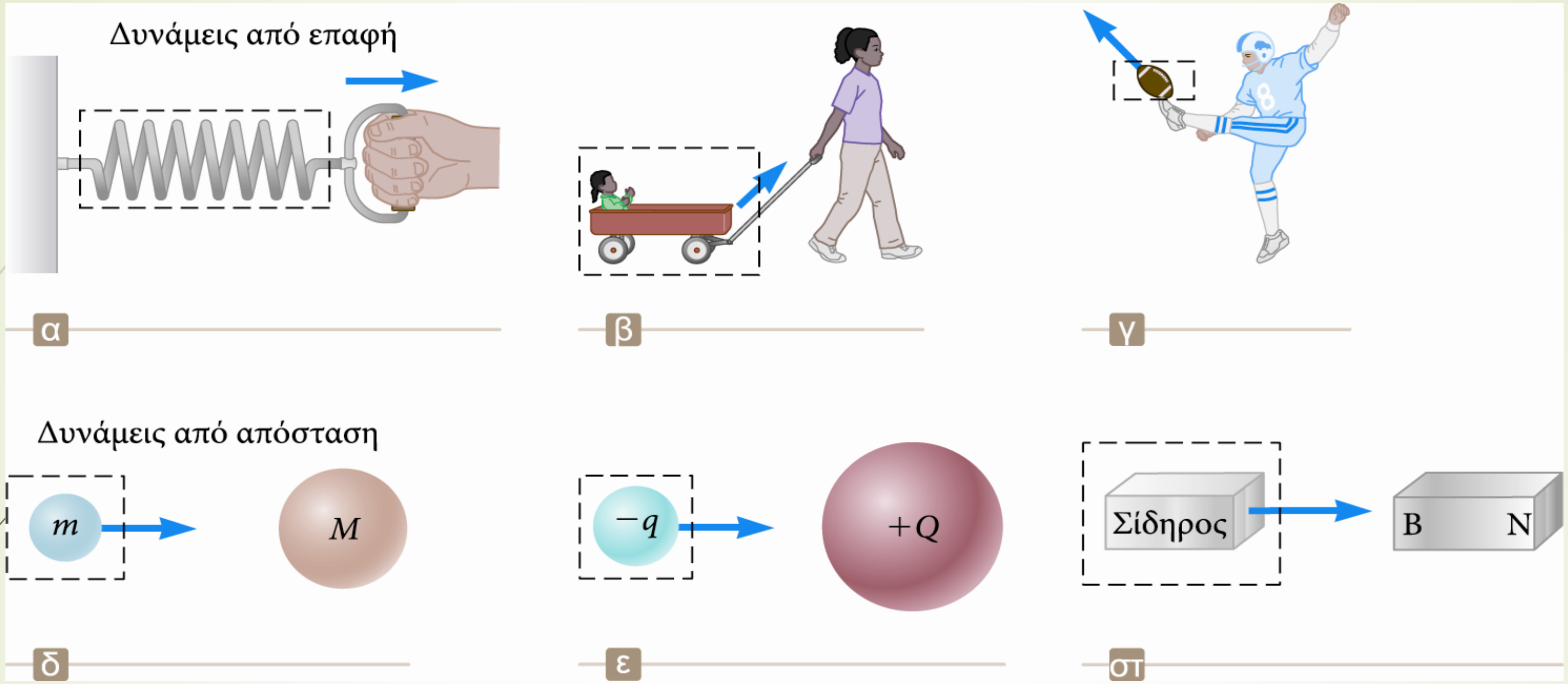
# Η έννοια της Δύναμης

# Κατηγορίες Δυνάμεων



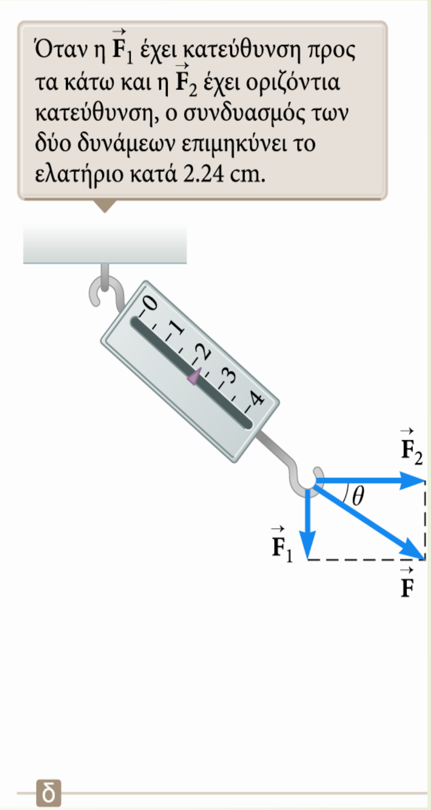

- Οι δυνάμεις από επαφή αναπτύσσονται κατά τη φυσική επαφή δύο σωμάτων.
    - **Παραδείγματα α, β, γ**
- Οι δυνάμεις από απόσταση δρουν μέσα στον κενό χώρο.
    - **Δεν απαιτείται φυσική επαφή**
    - **Παραδείγματα δ, ε, στ**

# Θεμελιώδεις Δυνάμεις

## Διανυσματική φύση των δυνάμεων

- Βαρυτικές δυνάμεις: Μεταξύ σωμάτων (μαζών)
- Ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις: Μεταξύ ηλεκτρικών φορτίων
- Ισχυρές (ή πυρηνικές) δυνάμεις: Μεταξύ υποατομικών σωματιδίων
- Ασθενείς δυνάμεις: Αναπτύσσονται σε ορισμένες διεργασίες ραδιενεργούς διάσπασης

*Όλες οι θεμελιώδεις δυνάμεις είναι δυνάμεις από απόσταση.*




*Οι δυνάμεις είναι διανύσματα. Άρα, η συνισταμένη δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα, υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τους κανόνες της πρόσθεσης διανυσμάτων.*

# Νόμοι της κίνησης

## Ο πρώτος νόμος του Νεύτωνα- Νόμος της Αδράνειας

**Αν δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις και οι παρατηρήσεις γίνονται από ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, τότε ένα ακίνητο σώμα θα παραμείνει σε ηρεμία και ένα σώμα που κινείται θα συνεχίσει να κινείται με σταθερή ταχύτητα.**

- Ο πρώτος νόμος μας επιτρέπει επίσης να ορίσουμε τη ***δύναμη*** ως ***το αίτιο της μεταβολής της κίνησης ενός σώματος.***
- Η καλύτερη προσέγγιση ενός αδρανειακού συστήματος είναι ένα σύστημα αναφοράς που κινείται με σταθερή ταχύτητα σε σχέση με τους μακρινούς απλανείς αστέρες. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η Γη είναι ένα τέτοιο αδρανειακό σύστημα, παρόλο που στην κίνησή της υπάρχει μια μικρή κεντρομόλος επιτάχυνση.

▶Η τάση ενός σώματος να προβάλλει αντίσταση στη μεταβολή της ταχύτητάς του ονομάζεται ***αδράνεια.***

▶Η ***μάζα*** είναι η ιδιότητα ενός σώματος η οποία καθορίζει πόση αντίσταση προβάλλει το σώμα στις μεταβολές της ταχύτητάς του.

▶Οι μάζες των σωμάτων μπορούν να οριστούν συναρτήσει των επιταχύνσεων που προκαλεί **μια συγκεκριμένη δύναμη** η οποία ασκείται σε αυτά. Το μέτρο της επιτάχυνσης ενός σώματος είναι αντιστρόφως ανάλογο προς τη μάζα του.

### Αδράνεια και μάζα

$$m_1 / m_2 \equiv \alpha_2 / \alpha_1$$

# Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα

- Όταν παρατηρούμε ένα σώμα από ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, η επιτάχυνση του σώματος είναι ανάλογη προς τη συνολική δύναμη που ασκείται σε αυτό και αντιστρόφως ανάλογη προς τη μάζα του.
  - Η δύναμη είναι η αιτία της *μεταβολής* της κίνησης, την οποία μετράμε με την επιτάχυνση.

$$\vec{\mathbf{a}} \propto \frac{\sum \vec{\mathbf{F}}}{m} \rightarrow \sum \vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$$

- Η $\sum \vec{\mathbf{F}}$ είναι η συνολική δύναμη.
  - Είναι το διανυσματικό άθροισμα, δηλαδή η συνισταμένη, όλων των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα.
- Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα μπορεί να εκφραστεί με τη μορφή εξισώσεων συνιστωσών:
  - $\Sigma F_x = ma_x$
  - $\Sigma F_y = ma_y$
  - $\Sigma F_z = ma_z$
  - Το άθροισμα των δυνάμεων εξισώνεται με το γινόμενο της μάζας του σώματος και της επιτάχυνσης του.

# Μάζα - Βάρος

- Η μάζα είναι εγγενής ιδιότητα ενός σώματος.
- Η μάζα είναι ανεξάρτητη από το περιβάλλον του σώματος.
- Η μάζα είναι ανεξάρτητη από τη μέθοδο μέτρησής της.
- Η μάζα είναι βαθμωτό μέγεθος.
- Η μονάδα της μάζας στο σύστημα SI είναι το χιλιόγραμμο (kg).

# Βάρος-Δύναμη της βαρύτητας

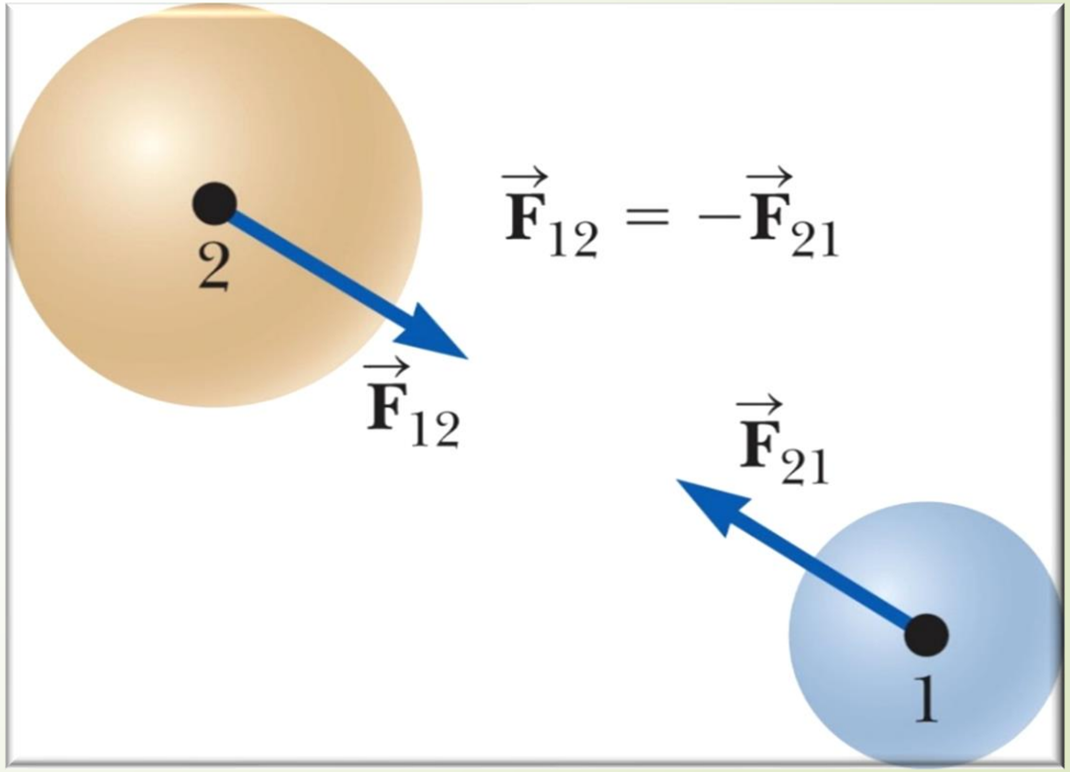
- Η μάζα και το βάρος είναι δύο διαφορετικά μεγέθη.
- Η δύναμη που ασκεί η Γη στα σώματα ονομάζεται δύναμη της βαρύτητας (ή βαρυτική δύναμη)
- Έχει κατεύθυνση προς το κέντρο της Γης.
- Από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα: $\vec{F}_g = m\,\vec{g}$
- Το μέτρο της ονομάζεται βάρος του σώματος. Βάρος = $F_g = mg$
- Μεταβάλλεται ανάλογα με τη θέση.
- Παράδειγμα: $m_{Γης}$ = 2 kg, $m_{Σελήνης}$ = 2 kg

# Ο τρίτος νόμος του Νεύτωνα

- Αν δύο σώματα αλληλοεπιδρούν, η δύναμη $\vec{F}_{12}$ που ασκεί το σώμα 1 στο σώμα 2 έχει το ίδιο μέτρο και αντίθετη κατεύθυνση από τη δύναμη $\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{21}}$ που ασκεί το σώμα 2 στο σώμα 1.

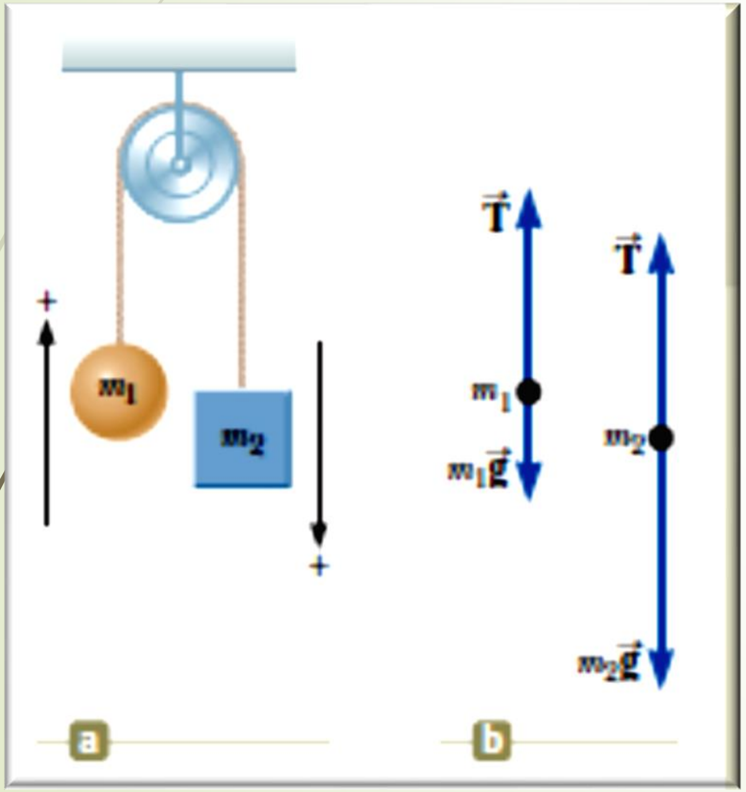
$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

- Η δύναμη της δράσης έχει το ίδιο μέτρο και αντίθετη κατεύθυνση από τη δύναμη της αντίδρασης.
  - Η μία από τις δυνάμεις είναι η δράση, και η άλλη είναι η αντίδραση.
  - Δεν έχει σημασία ποια δύναμη χαρακτηρίζεται ως δράση και ποια ως αντίδραση.
  - Η δράση και η αντίδραση ασκούνται σε διαφορετικά σώματα και πρέπει να είναι του ίδιου τύπου.



# Μηχανή του Atwood

Η διάταξη του σχήματος ονομάζεται Μηχανή του Atwood. Να υπολογίσετε το μέτρο της επιτάχυνσης των δύο σωμάτων, καθώς και την τάση του νήματος. Η τροχαλία είναι ιδανική, όπως και το νήμα.




$$(1)\ \sum F_y = T - m_1 g = m_1 a_y$$

$$(2)\ \sum F_y = m_2 g - T = m_2 a_y$$

$$-m_1 g + m_2 g = m_1 a_y + m_2 a_y$$

$$(3)\ a_y = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) g$$

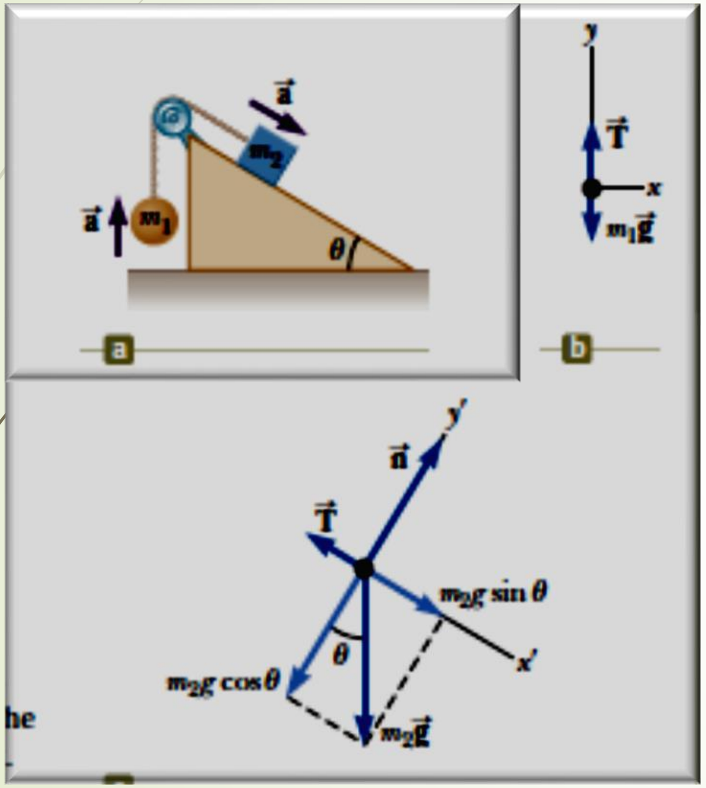
$$(4)\ T = m_1(g + a_y) = \left(\frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right) g$$

# Κεκλιμένο επίπεδο

Δύο σώματα μαζών $m_1$ και $m_2$ είναι δεμένα μέσω ιδανικού νήματος όπως στο σχήμα. Να υπολογίσετε:

i) Την επιτάχυνση α του συστήματος, ii) Την τάση του νήματος.

Θεωρείστε την τροχαλία ιδανική, το κεκλιμένο επίπεδο λείο και $m_2>m_1$.




$$(1)\ \sum F_x = 0$$

$$(2)\ \sum F_y = T - m_1 g = m_1 a_y = m_1 a$$

$$(3)\ \sum F_{x'} = m_2 g \sin\theta - T = m_2 a_{x'} = m_2 a$$

$$(4)\ \sum F_{y'} = n - m_2 g \cos\theta = 0$$

$$(5)\ T = m_1(g + a)$$

$$m_2 g \sin\theta - m_1(g + a) = m_2 a$$

$$(6)\ a = \left(\frac{m_2 \sin\theta - m_1}{m_1 + m_2}\right) g$$

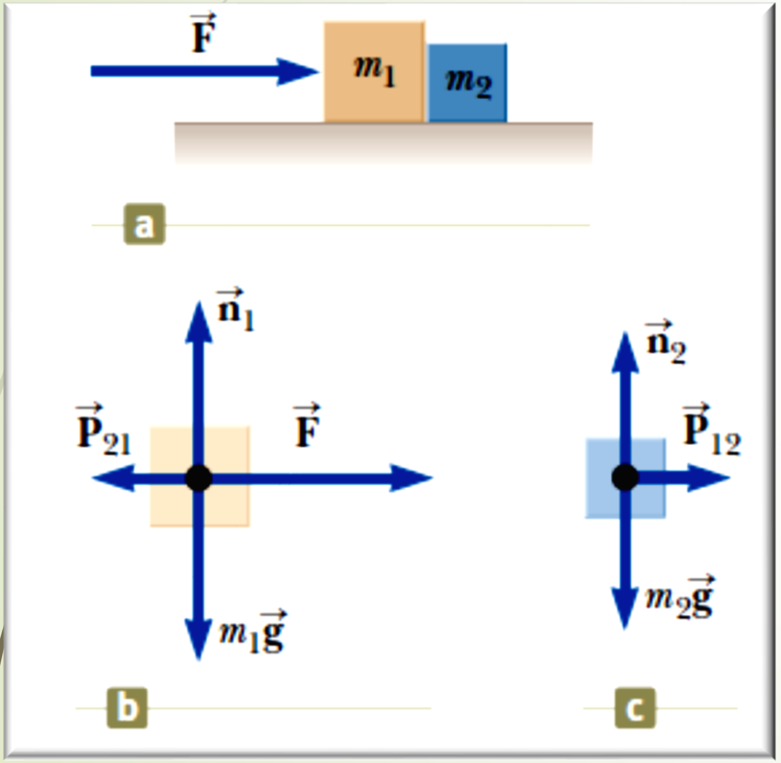
$$(7)\ T = \left(\frac{m_1 m_2(\sin\theta + 1)}{m_1 + m_2}\right) g$$

# Δυνάμεις Επαφής

Δύο σώματα με μάζες $m_1$ και $m_2$ βρίσκονται σε επαφή επάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο (Σχήμα). Στο σώμα μάζας $m_1$ ασκείται οριζόντια δύναμη F.

i) Να υπολογίσετε την επιτάχυνση α του συστήματος.

ii) Τη δύναμη επαφής μεταξύ των μαζών $m_1$ και $m_2$.




$$\sum F_x = F = (m_1 + m_2)a_x$$

$$(1)\quad a_x = \frac{F}{m_1 + m_2}$$

$$(2)\quad \sum F_x = P_{12} = m_2 a_x$$

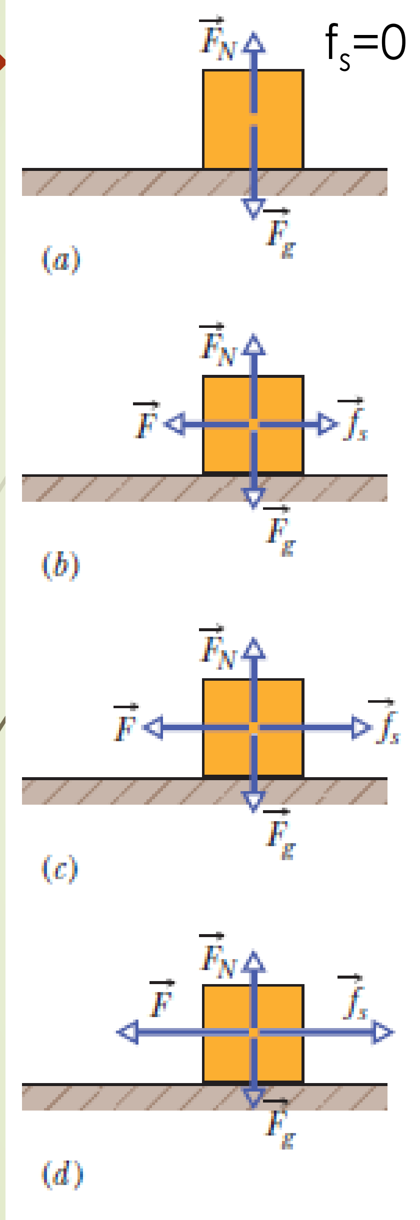
$$(3)\quad P_{12} = m_2 a_x = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)F$$

$$(4)\quad \sum F_x = F - P_{21} = F - P_{12} = m_1 a_x$$

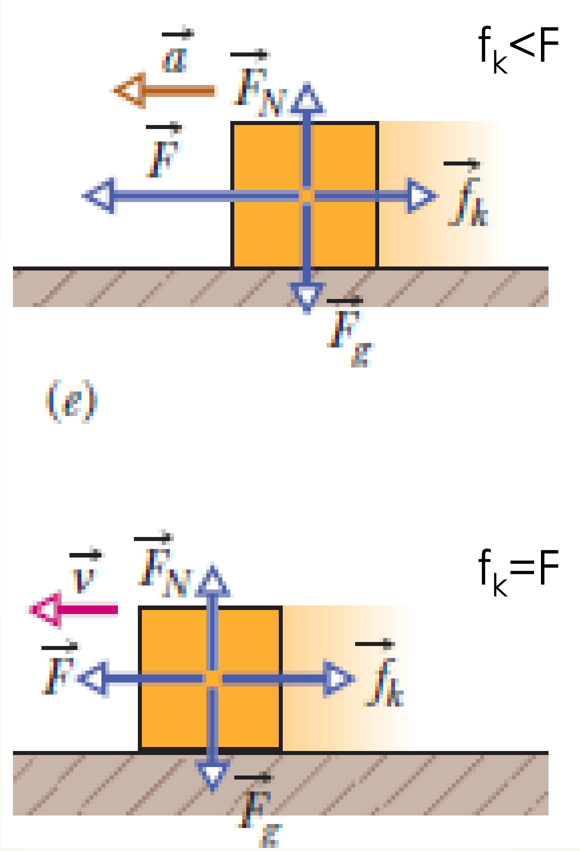
$$P_{12} = F - m_1 a_x = F - m_1\left(\frac{F}{m_1 + m_2}\right) = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)F$$

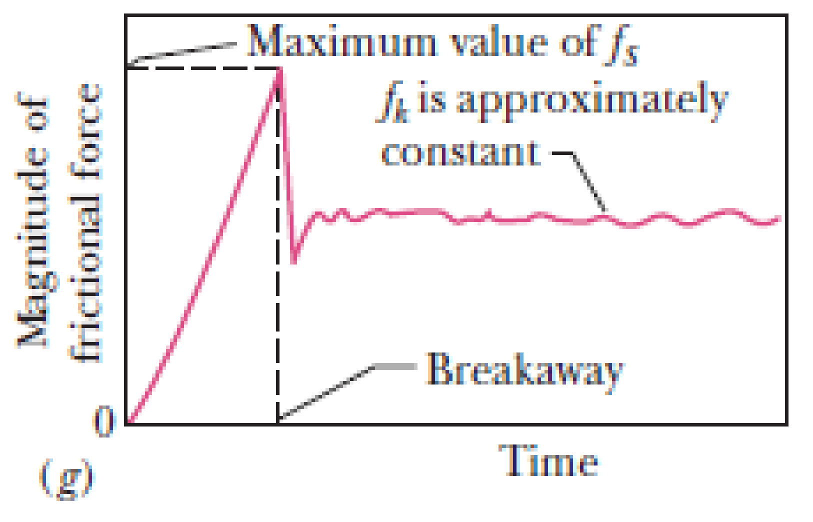
***Τι θα συμβεί εάν αντιστρέψουμε τη δύναμη και αντί για τη μάζα $m_1$ αυτή εξασκείται στη μάζα $m_2$;***

# Δυνάμεις Τριβής

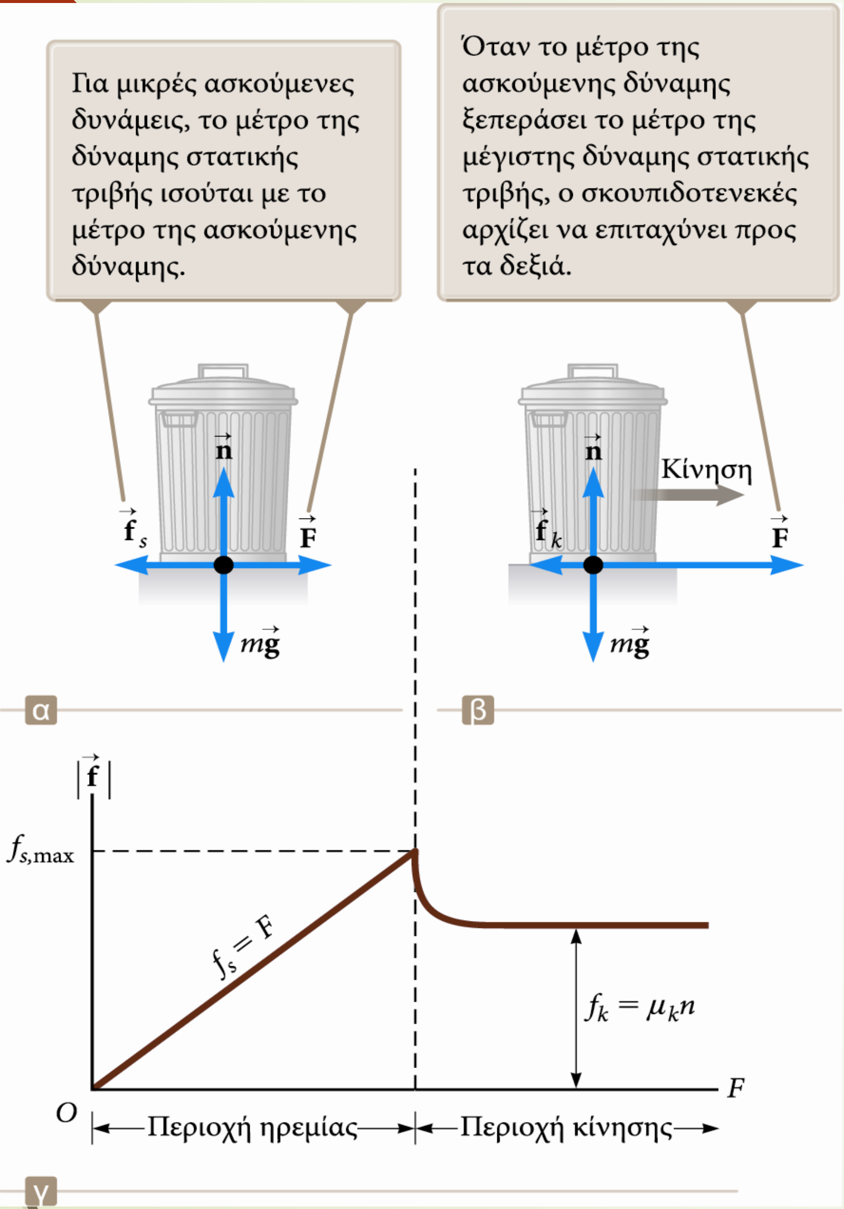



$f_s=F$



# Δυνάμεις Τριβής



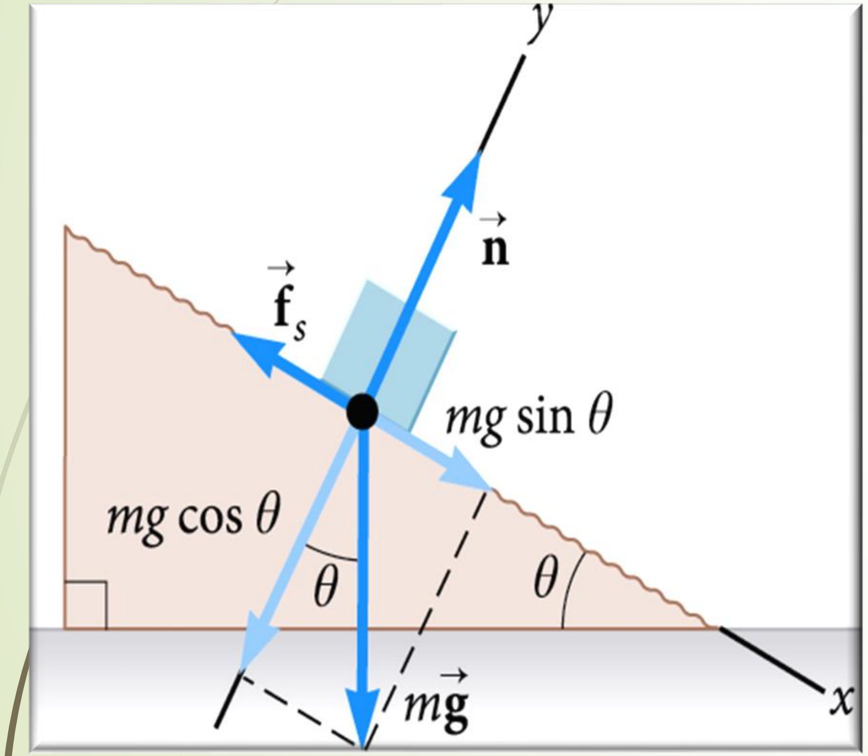

- Η τριβή είναι ανάλογη προς την κάθετη δύναμη.
  - $f_s \leq \mu_s n$ και $f_k = \mu_k n$

    Το $\mu$ είναι ο **συντελεστής τριβής**.
  - Οι εξισώσεις αυτές συνδέουν τα μέτρα των δυνάμεων. Δεν είναι διανυσματικές εξισώσεις.
  - Για τη στατική τριβή, η ισότητα ισχύει λίγο πριν οι επιφάνειες αρχίσουν να ολισθαίνουν, δηλαδή όταν η κίνηση είναι *επικείμενη*.
  - Σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση, χρησιμοποιούμε την ανισότητα για τη στατική τριβή.

- Η στατική τριβή δεν επιτρέπει στο σώμα να κινηθεί.
- Εφόσον το σώμα δεν κινείται, $f_s = F$.
- Αν αυξηθεί η $\vec{\mathbf{F}}$, θα αυξηθεί και η $\vec{f}_s$
- Αν μειωθεί η $\vec{\mathbf{F}}$ , θα μειωθεί και η $\vec{f}_s$
- $f_s \leq \mu_s n$
- Η δύναμη της τριβής ολίσθησης δρα όταν το σώμα κινείται.
- Αν και ο συντελεστής $\mu_k$ μπορεί να μεταβάλλεται με το μέτρο της ταχύτητας, αγνοούμε αυτές τις μεταβολές.
- $f_k = \mu_k n$

# Τριβή…

Τοποθετούμε ένα κύβο επάνω στη τραχιά επιφάνεια κεκλιμένου επιπέδου όπως στο σχήμα. Αυξάνουμε τη γωνία του κεκλιμένου επιπέδου μέχρι ο κύβος να αρχίσει να ολισθαίνει. Να προσδιορίσετε τη μέγιστη τιμή του συντελεστή στατικής τριβής $\mu_s$ της επιφάνειας του κεκλιμένου επιπέδου.




$$(1)\quad \sum F_x = mg\sin\theta - f_s = 0$$

$$(2)\quad \sum F_y = n - mg\cos\theta = 0$$

$$(3)\quad f_s = mg\sin\theta = \left(\frac{n}{\cos\theta}\right)\sin\theta = n\tan\theta$$

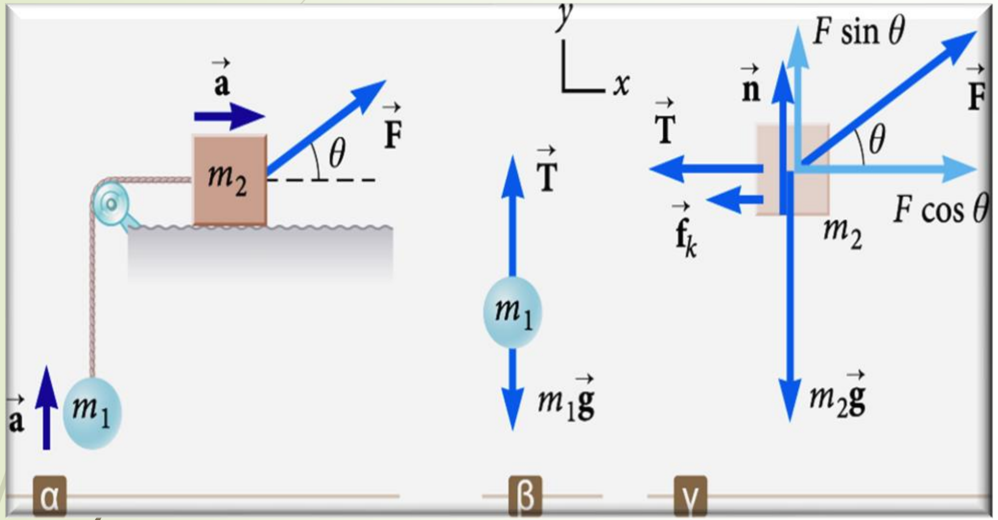
$$\mu_s n = n\tan\theta_c$$

$$\mu_s = \tan\theta_c$$

- ***$\mu_s$: προσδιορίζεται από την τιμή της γωνίας στην οποία αρχίζει η ολίσθηση.***

# Τριβή…

Δύο σώματα με μάζες $m_1$ και $m_2$ συνδέονται με ιδανικό σχοινί, μέσω ιδανικής τροχαλίας όπως στο σχήμα. Στο σώμα μάζας $m_1$ ασκείται η δύναμη F, ενώ ο συντελεστής τριβής ολίσθησης ανάμεσα στη μάζα $m_1$ και στο οριζόντιο επίπεδο είναι μ. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση α του συστήματος.




$$(2)\ \sum F_y = n + F\sin\theta - m_2 g = 0$$

$$(3)\ \sum F_y = T - m_1 g = m_1 a_y = m_1 a$$

$$n = m_2 g - F\sin\theta$$

$$(4)\ f_k = \mu_k(m_2 g - F\sin\theta)$$

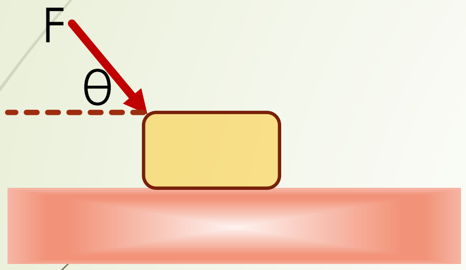
$$(1)\ \sum F_x = F\cos\theta - f_k - T = m_2 a_x = m_2 a$$

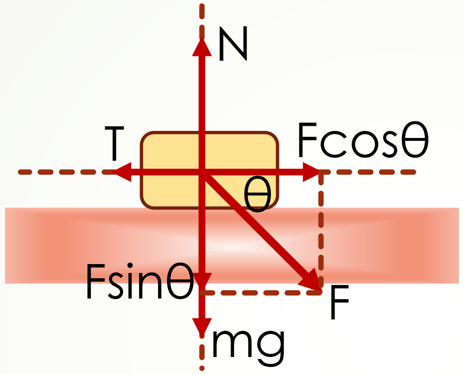
$$F\cos\theta - \mu_k(m_2 g - F\sin\theta) - m_1(a+g) = m_2 a$$

$$(5)\ a = \frac{F(\cos\theta + \mu_k \sin\theta) - (m_1 + \mu_k m_2)g}{m_1 + m_2}$$

# Τριβή…

Ένα σώμα μάζας m κινείται υπό την επίδραση δύναμης F όπως στο σχήμα. Εάν ο συντελεστής στατικής τριβής είναι $\mu_s$ να υπολογίσετε την ελάχιστη δύναμη $F_{min}$ η οποία απαιτείται για να μετακινήσει το σώμα.




Το σώμα θα αρχίσει να κινείται όταν:

$$\Sigma F_x \geq T_{max}$$

Επίσης:

$$N = F\sin\theta + mg$$

$$T = \mu_s N = \mu_s(F\sin\theta + mg)$$

$$\Sigma F_x \geq T_{max} \Rightarrow F\cos\theta \geq \mu_s(F\sin\theta + mg) \Rightarrow F\cos\theta \geq \mu_s F\sin\theta + \mu_s mg \Rightarrow$$

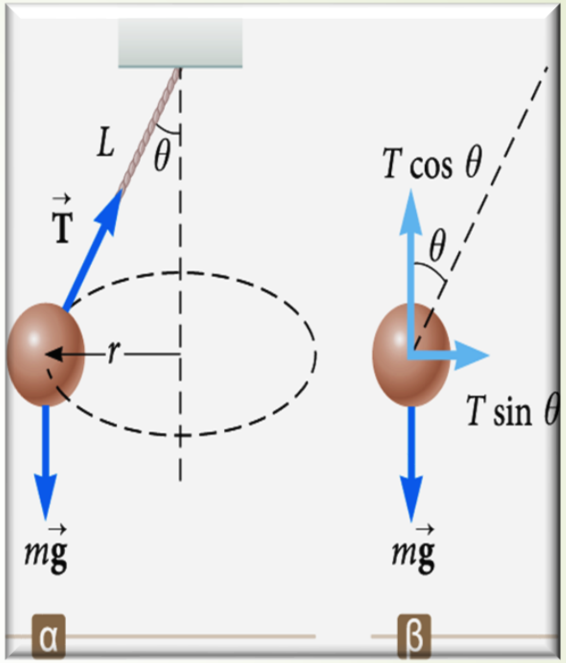
$$F(\cos\theta - \mu_s\sin\theta) \geq \mu_s mg \Rightarrow F \geq \frac{\mu_s mg}{(\cos\theta - \mu_s\sin\theta)}$$

$$\boxed{F_{min} = \frac{\mu_s mg}{(\cos\theta - \mu_s\sin\theta)}}$$

# Ομαλή κυκλική κίνηση-Κωνικό Εκκρεμές

- Ένα σωματίδιο κινείται με ταχύτητα σταθερού μέτρου σε κυκλική τροχιά ακτίνας *r* και επιταχύνει.
- Το μέτρο της επιτάχυνσης δίνεται από τη σχέση $a_c = \frac{u^2}{r}$
- Η κεντρομόλος επιτάχυνση $\vec{\mathbf{a}}_c$ έχει κατεύθυνση προς το κέντρο του κύκλου
- Η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι πάντα κάθετη προς την ταχύτητα.
- Η κεντρομόλος επιτάχυνση συνδέεται με μια δύναμη $\vec{\mathbf{F}}_r$.
- Η δύναμη αυτή έχει επίσης ακτινική διεύθυνση με φορά προς το κέντρο του κύκλου.
- Η εφαρμογή του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα στην ακτινική διεύθυνση δίνει

$$\sum F = m\, a_c = m \frac{v^2}{r}$$




$$\sum F_y = 0 \rightarrow T \cos\theta = mg$$

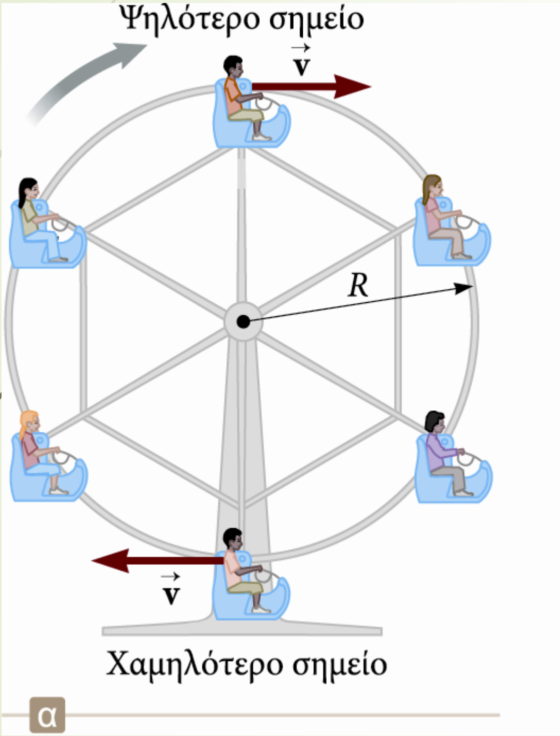
$$\sum F_x = T \sin\theta = ma_c$$

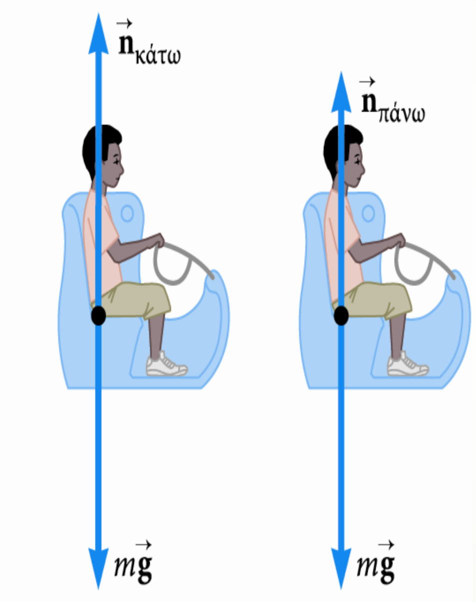
- Το μέτρο της ταχύτητας v είναι ανεξάρτητο από τη μάζα *m*:

$$v = \sqrt{L\, g \sin\theta \tan\theta}$$

# Ο τροχός του λούνα παρκ

Ένα παιδί μάζας m ανεβαίνει στο τροχό του λούνα Παρκ. Το παιδί διαγράφει κατακόρυφο κύκλο ακτίνας R με ταχύτητα σταθερού μέτρου υ. Να προσδιορίσετε: α) Τη δύναμη που ασκεί το κάθισμα στο παιδί στο χαμηλότερο σημείο της τροχιάς του. β) Τη δύναμη που ασκεί το κάθισμα στο παιδί στο υψηλότερο σημείο της τροχιάς του




$$\sum F = n_{κάτω} - m\,g = \frac{m\,v^2}{r}$$

$$n_{κάτω} = m\,g\left(1 + \frac{v^2}{r\,g}\right)$$

- Στο χαμηλότερο σημείο της τροχιάς, η δύναμη που ασκείται στο παιδί κατακόρυφα προς τα πάνω (η κάθετη δύναμη) είναι μεγαλύτερη από το βάρος του.

- Στο ψηλότερο σημείο του κύκλου, η δύναμη που ασκείται στο παιδί είναι μικρότερη από το βάρος του.

$$\sum F = n_{επάνω} + m\,g = \frac{m\,v^2}{r}$$

$$n_{επάνω} = m\,g\left(\frac{v^2}{r\,g} - 1\right)$$

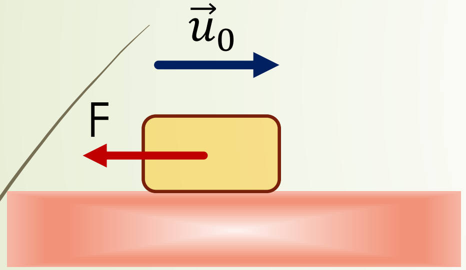
# Δυνάμεις Αντίστασης...

Ένα σώμα μάζας m κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με αρχική ταχύτητα $u_o$. Τη χρονική στιγμή t=0s, στο σώμα εξασκείται δύναμη αντίστασης, παράλληλη με το οριζόντιο επίπεδο, της μορφής:

$$\vec{F} = -b\vec{u}$$

όπου b μία σταθερά. Να υπολογίσετε τη ταχύτητα του σώματος μια μεταγενέστερη τυχαία χρονική στιγμή t.

**Λύση**




$$\sum F = F = -bu \Rightarrow ma = -bu \Rightarrow m\frac{du}{dt} = -bu \Rightarrow \frac{du}{dt} = -\frac{b}{m}u \Rightarrow$$

$$\frac{du}{u} = -\frac{b}{m}dt \Rightarrow \int_{u_0}^{V}\frac{du}{u} = -\frac{b}{m}\int_0^t dt \Rightarrow lnu|_{u_0}^{V} = -\frac{b}{m}t \Rightarrow$$

$$lnV - lnu_0 = -\frac{b}{m}t \Rightarrow ln\frac{V}{u_0} = -\frac{b}{m}t \Rightarrow \frac{V}{u_0} = e^{-\frac{b}{m}t} \Rightarrow \boxed{V = u_0 e^{-\frac{b}{m}t}}$$

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\left(u_0 e^{-\frac{b}{m}t}\right) \Rightarrow \boxed{a = -u_0\frac{b}{m}e^{-\frac{b}{m}t}}$$

# Δυνάμεις Αντίστασης...

Ένα σώμα μάζας m αφήνεται από ύψος h επάνω από το έδαφος. Εάν η αντίσταση του αέρα είναι της μορφής:

$$\vec{F} = -b\vec{u}$$

όπου b μία σταθερά, να υπολογίσετε τη ταχύτητα του σώματος μια τυχαία χρονική στιγμή t κατά τη διάρκεια της πτώσης του.

**Λύση**

$$\sum F = F = mg - bu \Rightarrow ma = mg - bu \Rightarrow m\frac{du}{dt} = mg - bu \Rightarrow \frac{du}{dt} = g - \frac{b}{m}u \Rightarrow$$

$$\frac{du}{g-\frac{b}{m}u} = dt \Rightarrow \int_0^V \frac{du}{g-\frac{b}{m}u} = \int_0^t dt \Rightarrow -\frac{m}{b}\int_0^V \frac{d\left(g-\frac{b}{m}u\right)}{g-\frac{b}{m}u} = t \Rightarrow ln\left(g - \frac{b}{m}u\right)\Big|_0^V = -\frac{b}{m}t \Rightarrow$$

$$ln\left(g - \frac{b}{m}V\right) - ln(g) = -\frac{b}{m}t \Rightarrow ln\frac{g-\frac{b}{m}V}{g} = -\frac{b}{m}t \Rightarrow \frac{g-\frac{b}{m}V}{g} = e^{-\frac{b}{m}t} \Rightarrow g - \frac{b}{m}V = ge^{-\frac{b}{m}t}$$

$$\frac{b}{m}V = g - ge^{-\frac{b}{m}t} \Rightarrow \boxed{V = \frac{mg}{b}\left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right)}$$

# Δυνάμεις Αντίστασης-Οπισθέλκουσα

Όταν υπάρχει μια σχετική κίνηση μεταξύ του αέρα (ή κάποιου άλλου ρευστού) και ενός σώματος, τότε το σώμα υφίσταται μια οπισθέλκουσα δύναμη **D** η οποία αντιτίθεται στη σχετική κίνηση και έχει την κατεύθυνση προς την οποία ρέει το ρευστό ως προς το σώμα. Το μέτρο αυτής της δύναμης **D** συνδέεται με τη σχετική ταχύτητα v μέσω ενός πειραματικά προσδιοριζόμενου συντελεστή οπισθέλκουσας C, σύμφωνα με την σχέση

$$D = \frac{1}{2} C \rho A v^2,$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα του ρευστού (μάζα ανά μονάδα όγκου) και A το εμβαδόν της ενεργού διατομής του σώματος (δηλαδή, του εμβαδού της επιφάνειας μιας διατομής που λαμβάνεται κάθετα ως προς τη σχετική ταχύτητα **v**).

*Πτώση:* $-D + F_g = ma$

αν το σώμα πέφτει για αρκετά μεγάλη απόσταση, η D τελικά εξισώνεται με την Fg και a = 0, οπότε το μέτρο της ταχύτητας του σώματος παύει να αυξάνει. Το σώμα τότε πέφτει με σταθερή ταχύτητα, που καλείται οριακή ταχύτητα $v_t$.

$$v_t = \sqrt{\frac{2F_g}{C\rho A}}.$$

# Καλή Μελέτη