Μηχανική - Ρευστομηχανική

Διδάσκουσα
Παναγιώτα Καραχάλιου
Αναπληρώτρια Καθηγήτρια,
pkara@upatras.gr

Ώρες Γραφείου (Κτήριο Γ, Ισόγειο)
Συμβουλευτείτε την ιστοσελίδα του Τμήματος:
www.physics.upatras.gr

Εβδομαδιαίο Πρόγραμμα

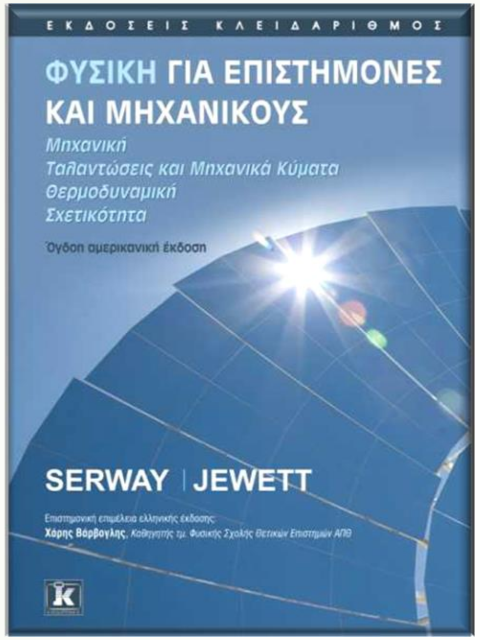
Δευτέρα 9:00-11:00

Τρίτη 11:00-13:00

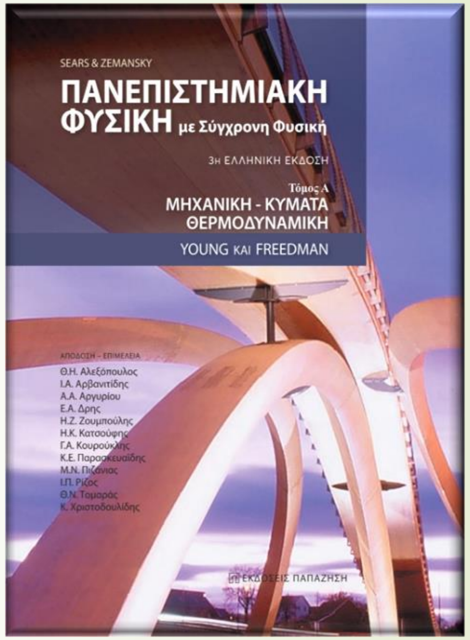
Πέμπτη 11:00-13:00

Προτεινόμενη Βιβλιογραφία

ΦΥΣΙΚΗ (Τόμος 1 Εκδ.4η), Halliday, Resnick, Walker, Εκδόσεις Gutenberg



ΦΥΣΙΚΗ ΓΙΑ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΕΣ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ, R. Serway, J. Jewett (Μετάφραση Χ. Βάρβογλης), ΚΛΕΙΔΑΡΙΘΜΟΣ ΕΠΕ



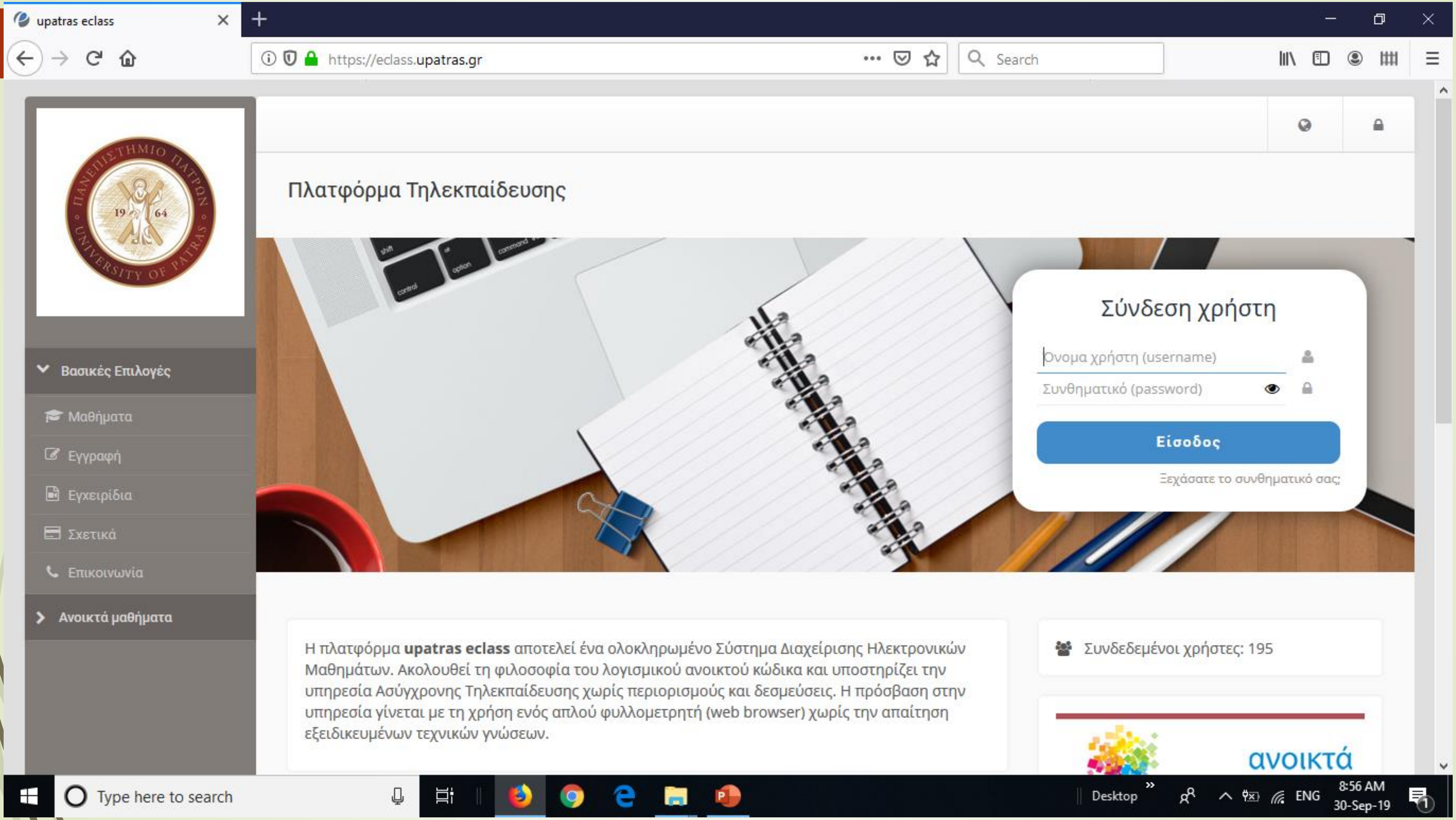
Πανεπιστημιακή Φυσική Τόμος Α΄ Μηχανική Θερμοδυναμική, Young-Freedman, Εκδόσεις Παπαζήση

Περιεχόμενα Μαθήματος

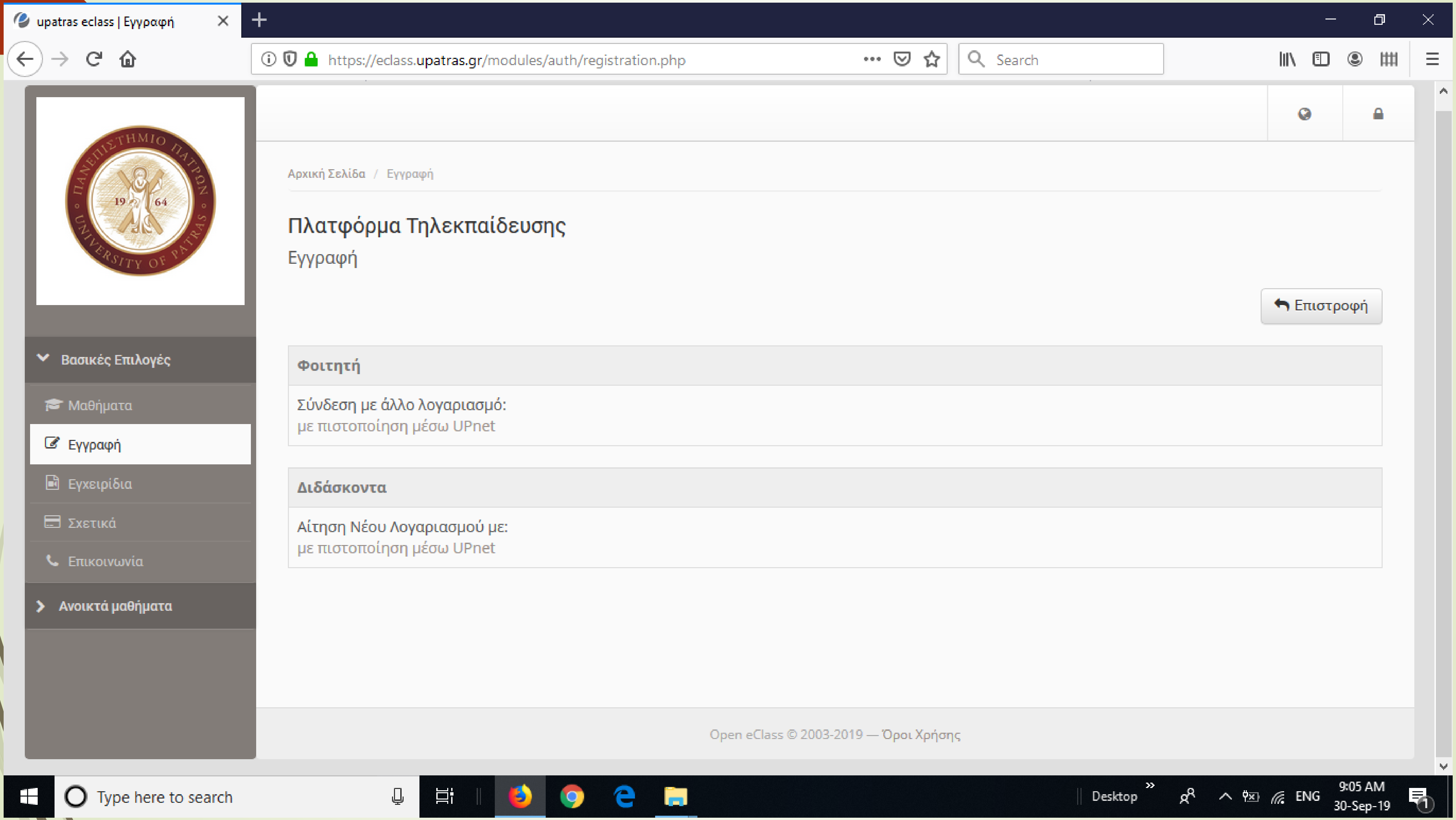
Περιεχόμενα (ύλη) του μαθήματος

1. Μονάδες, φυσικές ποσότητες και διανύσματα.
2. Ευθύγραμμη κίνηση.
3. Κίνηση σε δύο ή τρεις διαστάσεις.
4. Νόμοι του Νεύτωνα.
5. Εφαρμογές των νόμων του Νεύτωνα.
6. Έργο και κινητική ενέργεια.
7. Δυναμική ενέργεια και διατήρηση της ενέργειας.
8. Ορμή, ώθηση και κρούσεις.
9. Περιστροφική κίνηση στερεών σωμάτων.
10. Δυναμική της περιστροφικής κίνησης.
11. Ισορροπία και ελαστικότητα.
12. Βαρύτητα.
13. Περιοδική κίνηση.
14. Μηχανική των ρευστών.

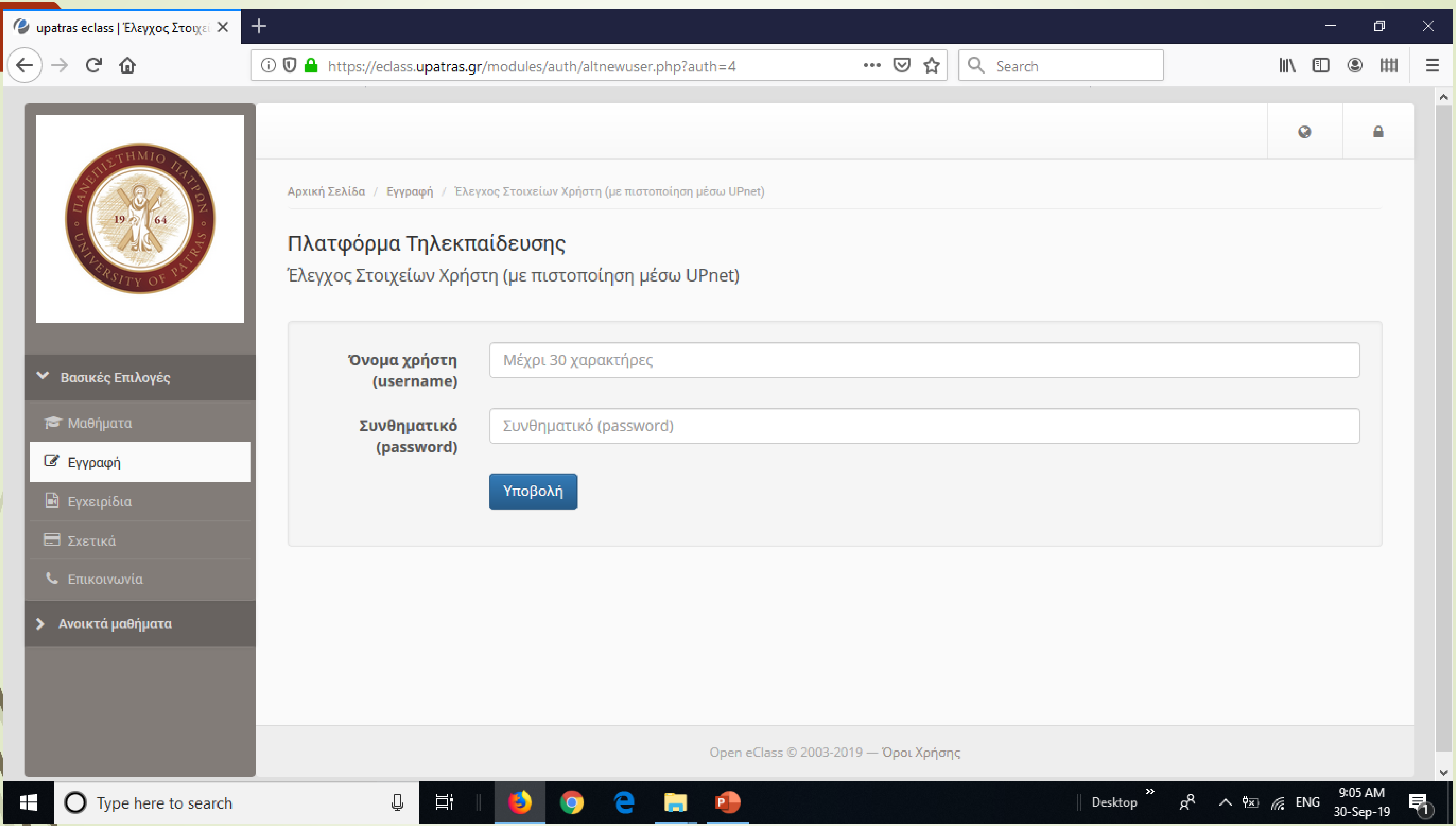
eclass


upatras eclass
https://eclass.upatras.gr
Search
Πλατφόρμα Τηλεκπαίδευσης
Βασικές Επιλογές
Μαθήματα
Εγγραφή
Εγχειρίδια
Σχετικά
Επικοινωνία
Ανοικτά μαθήματα
Σύνδεση χρήστη
Όνομα χρήστη (username)
Συνθηματικό (password)
Είσοδος
Ξεχάσατε το συνθηματικό σας;
Η πλατφόρμα upatras eclass αποτελεί ένα ολοκληρωμένο Σύστημα Διαχείρισης Ηλεκτρονικών Μαθημάτων. Ακολουθεί τη φιλοσοφία του λογισμικού ανοικτού κώδικα και υποστηρίζει την υπηρεσία Ασύγχρονης Τηλεκπαίδευσης χωρίς περιορισμούς και δεσμεύσεις. Η πρόσβαση στην υπηρεσία γίνεται με τη χρήση ενός απλού φυλλομετρητή (web browser) χωρίς την απαίτηση εξειδικευμένων τεχνικών γνώσεων.
Συνδεδεμένοι χρήστες: 195
ανοικτά
Type here to search
Desktop
ENG
8:56 AM
30-Sep-19

eclass

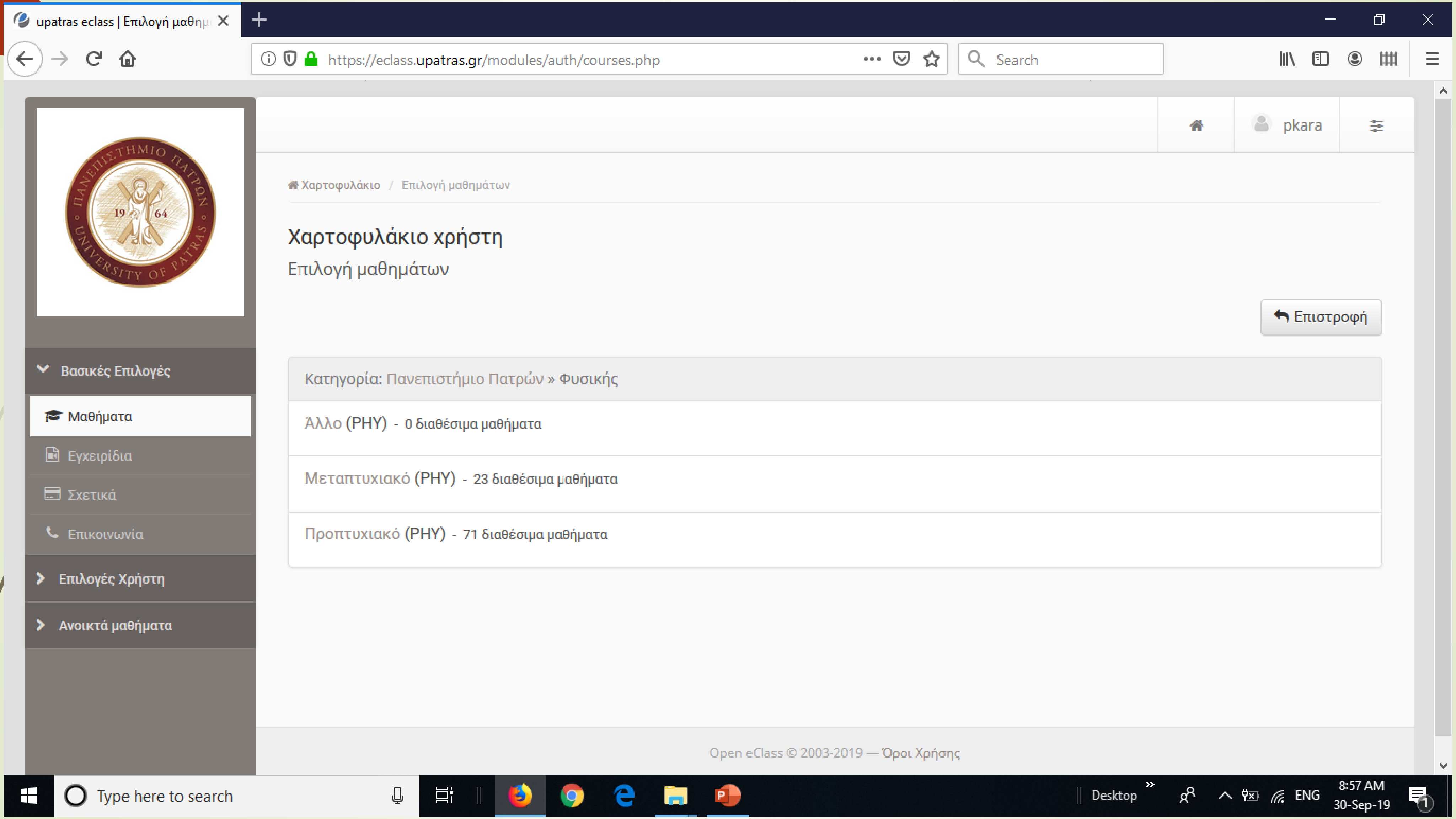

upatras eclass | Εγγραφή
https://eclass.upatras.gr/modules/auth/registration.php
Search
Βασικές Επιλογές
Μαθήματα
Εγγραφή
Εγχειρίδια
Σχετικά
Επικοινωνία
Ανοικτά μαθήματα
Αρχική Σελίδα / Εγγραφή
Πλατφόρμα Τηλεκπαίδευσης
Εγγραφή
Επιστροφή
Φοιτητή
Σύνδεση με άλλο λογαριασμό:
με πιστοποίηση μέσω UPnet
Διδάσκοντα
Αίτηση Νέου Λογαριασμού με:
με πιστοποίηση μέσω UPnet
Open eClass © 2003-2019 — Όροι Χρήσης
Type here to search
Desktop
ENG
9:05 AM
30-Sep-19

eclass

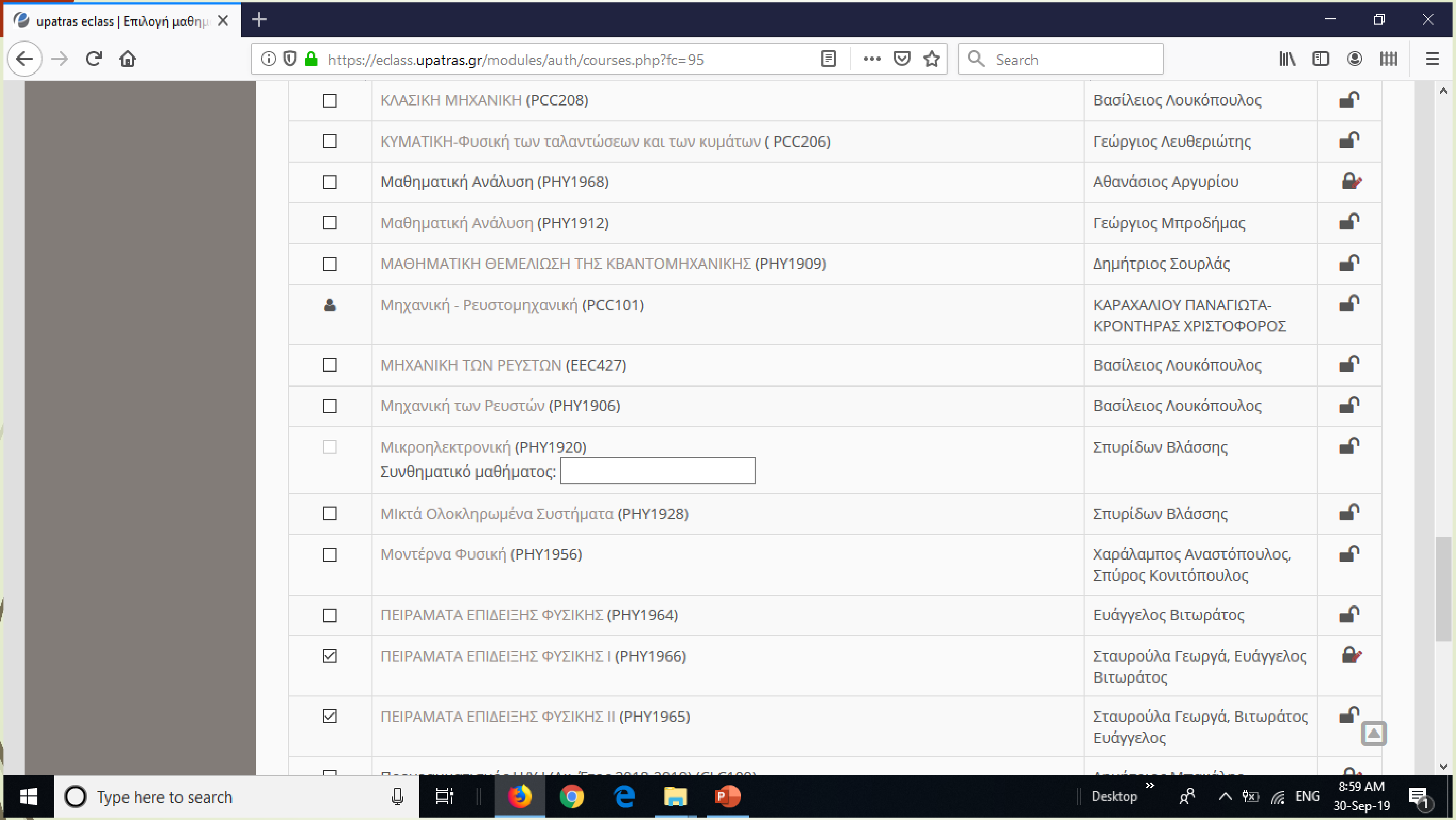


upatras eclass | Έλεγχος Στοιχεί
https://eclass.upatras.gr/modules/auth/altnewuser.php?auth=4
Search
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS
19 64
Βασικές Επιλογές
Μαθήματα
Εγγραφή
Εγχειρίδια
Σχετικά
Επικοινωνία
Ανοικτά μαθήματα
Αρχική Σελίδα / Εγγραφή / Έλεγχος Στοιχείων Χρήστη (με πιστοποίηση μέσω UPnet)
Πλατφόρμα Τηλεκπαίδευσης
Έλεγχος Στοιχείων Χρήστη (με πιστοποίηση μέσω UPnet)
Όνομα χρήστη (username)
Μέχρι 30 χαρακτήρες
Συνθηματικό (password)
Συνθηματικό (password)
Υποβολή
Open eClass © 2003-2019 — Όροι Χρήσης
Type here to search
Desktop
ENG
9:05 AM
30-Sep-19

eclass


upatras eclass | Επιλογή μαθημ
https://eclass.upatras.gr/modules/auth/courses.php
Search
pkara
Χαρτοφυλάκιο / Επιλογή μαθημάτων
Χαρτοφυλάκιο χρήστη
Επιλογή μαθημάτων
Επιστροφή
Βασικές Επιλογές
Μαθήματα
Εγχειρίδια
Σχετικά
Επικοινωνία
Επιλογές Χρήστη
Ανοικτά μαθήματα
Κατηγορία: Πανεπιστήμιο Πατρών » Φυσικής
Άλλο (PHY) - 0 διαθέσιμα μαθήματα
Μεταπτυχιακό (PHY) - 23 διαθέσιμα μαθήματα
Προπτυχιακό (PHY) - 71 διαθέσιμα μαθήματα
Open eClass © 2003-2019 — Όροι Χρήσης
Type here to search
Desktop
ENG
8:57 AM
30-Sep-19

eclass



☐	ΚΛΑΣΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ (PCC208)	Βασίλειος Λουκόπουλος
☐	ΚΥΜΑΤΙΚΗ-Φυσική των ταλαντώσεων και των κυμάτων (PCC206)	Γεώργιος Λευθεριώτης
☐	Μαθηματική Ανάλυση (PHY1968)	Αθανάσιος Αργυρίου
☐	Μαθηματική Ανάλυση (PHY1912)	Γεώργιος Μπροδήμας
☐	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΘΕΜΕΛΙΩΣΗ ΤΗΣ ΚΒΑΝΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ (PHY1909)	Δημήτριος Σουρλάς
	Μηχανική - Ρευστομηχανική (PCC101)	ΚΑΡΑΧΑΛΙΟΥ ΠΑΝΑΓΙΩΤΑ-ΚΡΟΝΤΗΡΑΣ ΧΡΙΣΤΟΦΟΡΟΣ
☐	ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ (EEC427)	Βασίλειος Λουκόπουλος
☐	Μηχανική των Ρευστών (PHY1906)	Βασίλειος Λουκόπουλος
☐	Μικροηλεκτρονική (PHY1920) Συνθηματικό μαθήματος:	Σπυρίδων Βλάσσης
☐	Μικτά Ολοκληρωμένα Συστήματα (PHY1928)	Σπυρίδων Βλάσσης
☐	Μοντέρνα Φυσική (PHY1956)	Χαράλαμπος Αναστόπουλος, Σπύρος Κοντόπουλος
☐	ΠΕΙΡΑΜΑΤΑ ΕΠΙΔΕΙΞΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ (PHY1964)	Ευάγγελος Βιτωράτος
☑	ΠΕΙΡΑΜΑΤΑ ΕΠΙΔΕΙΞΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ Ι (PHY1966)	Σταυρούλα Γεωργά, Ευάγγελος Βιτωράτος
☑	ΠΕΙΡΑΜΑΤΑ ΕΠΙΔΕΙΞΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΙΙ (PHY1965)	Σταυρούλα Γεωργά, Βιτωράτος Ευάγγελος

eclass

ΠΡΟΣΟΧΗ: Η εγγραφή στο eclass σε καμία περίπτωση δε συνεπάγεται δήλωση του μαθήματος στη γραμματεία!!!!!

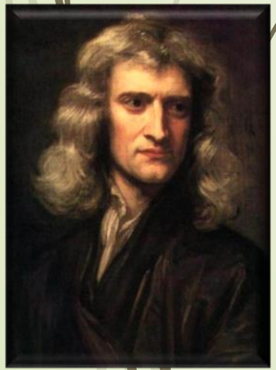
Φυσική (Κορωνίδα των Επιστημών)

Θεμελιώδης επιστήμη

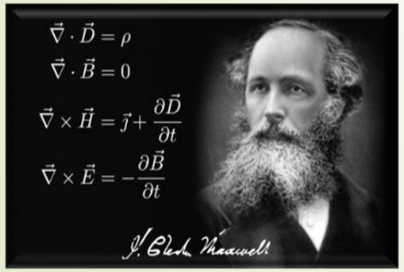
- Ασχολείται με τις βασικές αρχές του σύμπαντος.
- Αποτελεί τη βάση γι’ άλλες επιστήμες.
- Οι βασικές αρχές της είναι απλές.

Χωρίζεται σε πέντε βασικούς κλάδους

- Κλασική μηχανική
- Θερμοδυναμική
- Ηλεκτρομαγνητισμός
- Σχετικότητα
- Κβαντική μηχανική



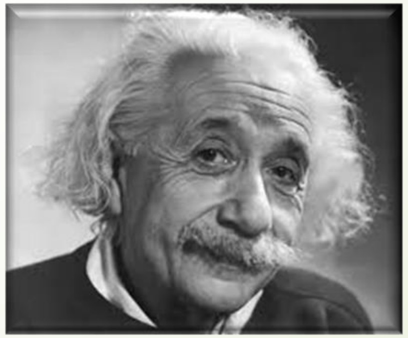
I. Newton
(1643 –1727)



J. C. Maxwell
(1831 –1879)

M. Planck
(1858 –1947)
Nobel 1918

N. Bohr
(1885 –1962)
Nobel 1922



A. Einstein
(1879 –1955)
Nobel 1921

E. Schrödinger
(1887 –1961)
Nobel 1933

W. Heisenberg
(1901 –1976)
Nobel 1932

M. Planck

(1858 –1947)

Nobel 1918

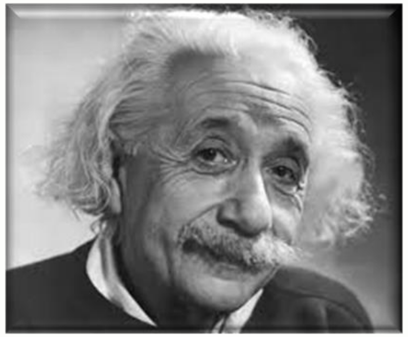
Max Karl Ernst Ludwig Planck "in recognition of the services he rendered to the advancement of Physics by his discovery of energy quanta"

N. Bohr

(1885 –1962)

Nobel 1922

Niels Henrik David Bohr "for his services in the investigation of the structure of atoms and of the radiation emanating from them"



A. Einstein

(1879 –1955)

Nobel 1921

Albert Einstein "for his services to Theoretical Physics, and especially for his discovery of the law of the photoelectric effect"

E. Schrödinger

(1887 –1961)

Nobel 1933

Erwin Schrödinger and Paul Adrien Maurice Dirac "for the discovery of new productive forms of atomic theory"

W. Heisenberg

(1901 –1976)

Nobel 1932

Werner Karl Heisenberg "for the creation of quantum mechanics, the application of which has, inter alia, led to the discovery of the allotropic forms of hydrogen"

Κλασική φυσική

- Οι τομείς της μηχανικής και του ηλεκτρομαγνητισμού είναι βασικοί για όλους τους υπόλοιπους κλάδους της κλασικής και της σύγχρονης φυσικής.

- **Κλασική φυσική**
  - Αναπτύχθηκε πριν από το 1900.
  - Σε αυτή τη θεματική ενότητα θα ασχοληθούμε με την κλασική μηχανική.
    - Είναι γνωστή και ως νευτώνεια μηχανική ή απλώς μηχανική.

- **Σύγχρονη φυσική**
  - 1900 μέχρι σήμερα

Τα θεμελιώδη μεγέθη και οι μονάδες μέτρησής τους

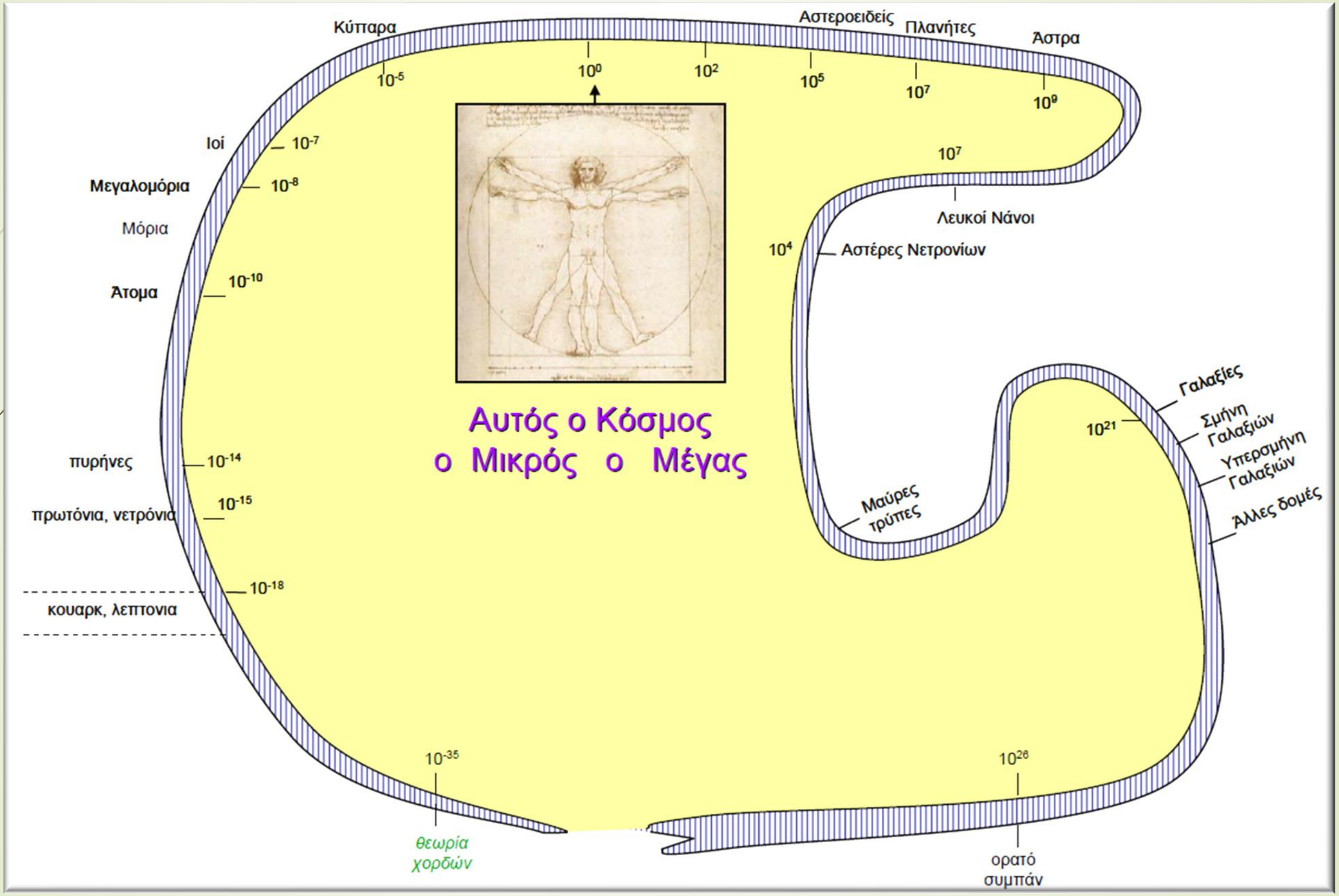
Μέγεθος	Μονάδα μέτρησης στο SI
Μήκος	μέτρο
Μάζα	χιλιόγραμμο
Χρόνος	δευτερόλεπτο
Θερμοκρασία	Kelvin
Ηλεκτρικό ρεύμα	ampere

Θεμελιώδη μεγέθη της μηχανικής

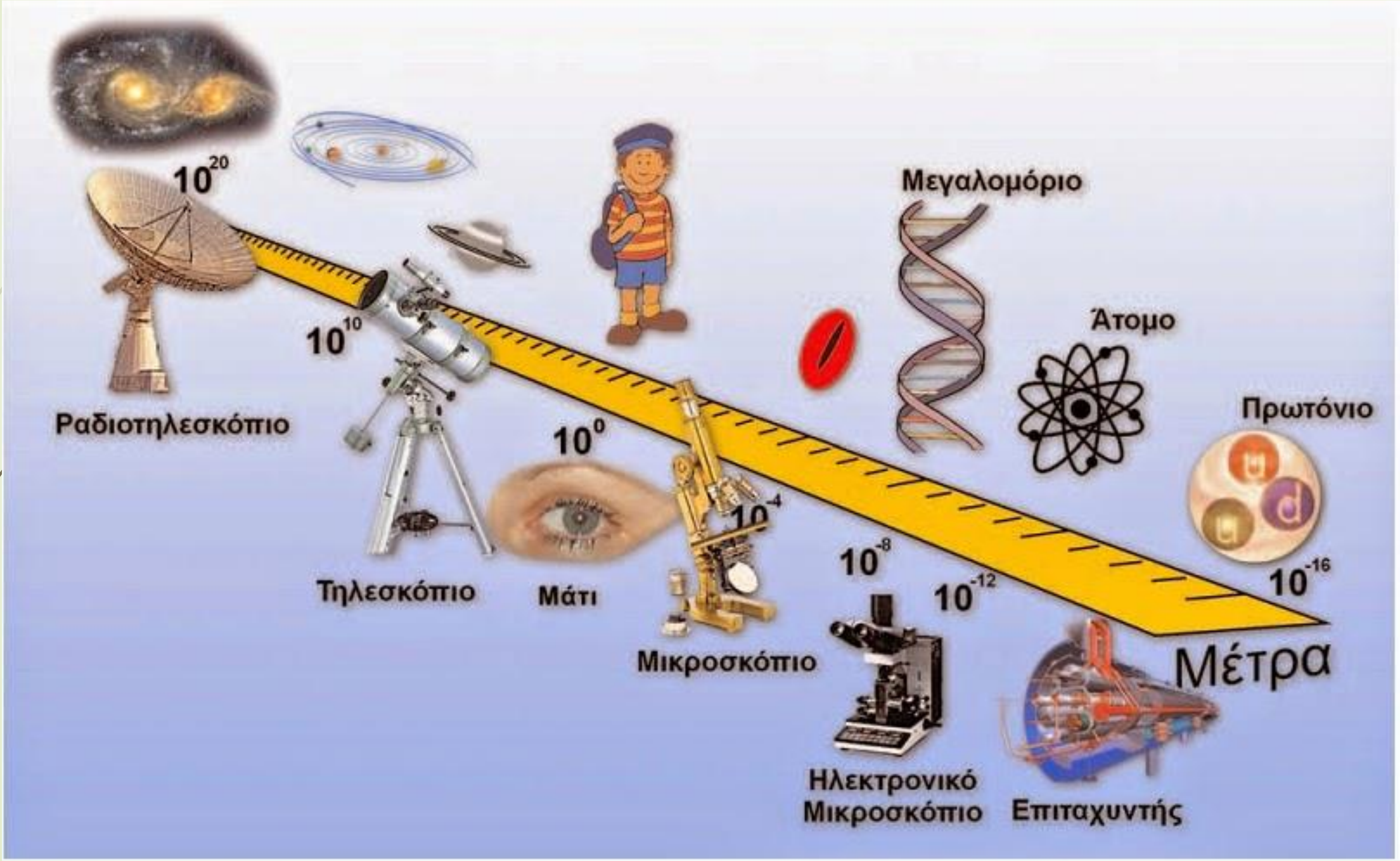
Μέγεθος	Μονάδα μέτρησης (SI)	Διαστάσεις
Μήκος	m	[L]
Μάζα	Kg	[M]
Χρόνος	s	[T]

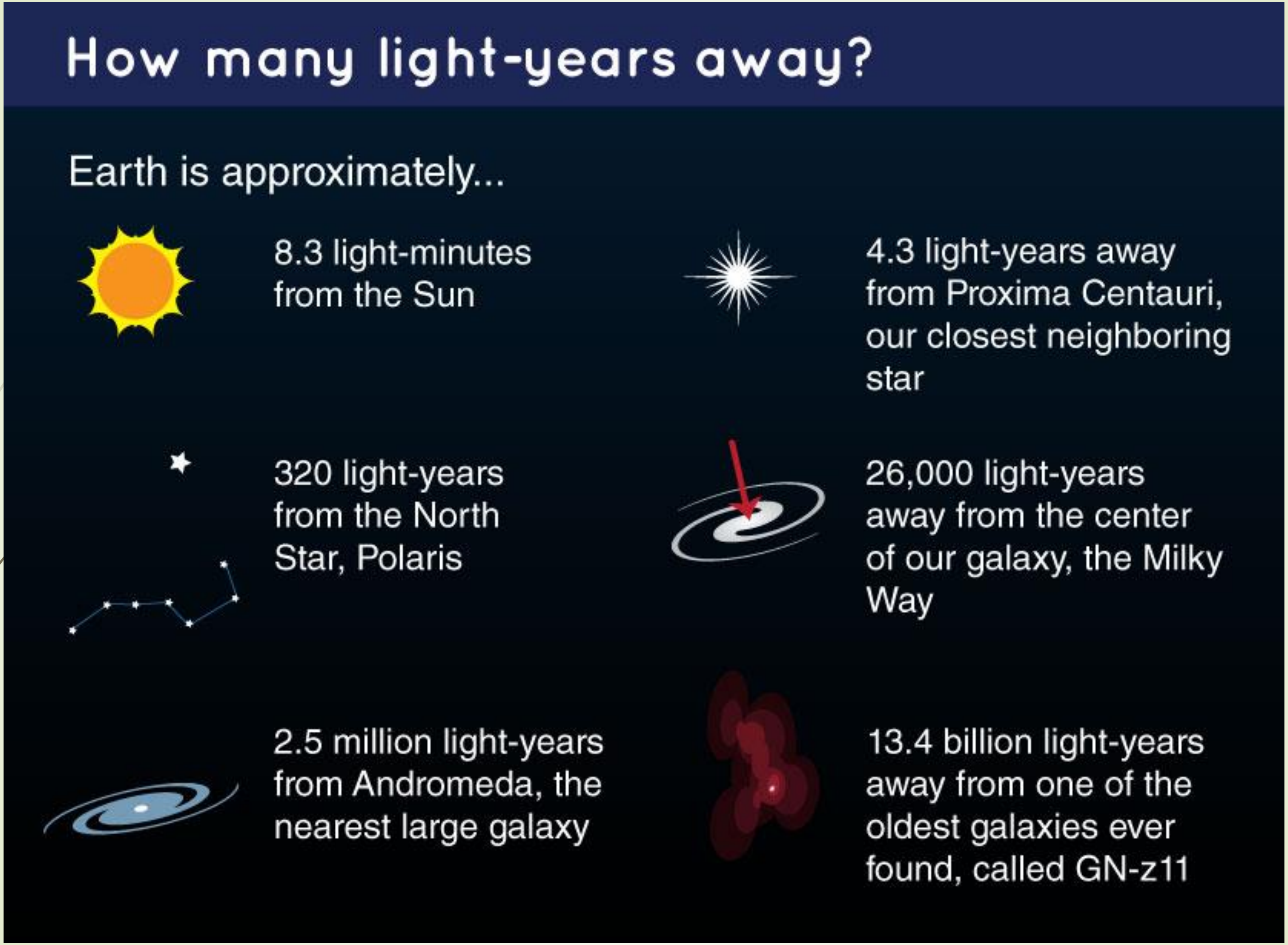
Όλα τα υπόλοιπα μεγέθη στη μηχανική μπορούν να εκφραστούν ως συνάρτηση των τριών θεμελιωδών μεγεθών.

Τιμές ορισμένων φυσικών Μεγεθών – Μήκος



Τί και πώς «βλέπουμε»?





Light-year: is the distance light travels in one Earth year (9 trillion km)

Προθέματα

- Αντιστοιχούν σε δυνάμεις του 10 και μπορούν να χρησιμοποιηθούν με οποιαδήποτε θεμελιώδη μονάδα.
- Είναι (υπο)πολλαπλάσια της θεμελιώδους μονάδας (1 mm = 10^{-3} m, 1 mg = 10^{-3} g)

ΠΙΝΑΚΑΣ Μ1.4 *Προθέματα για δυνάμεις του δέκα*

Δύναμη	Πρόθεμα	Σύντμηση	Δύναμη	Πρόθεμα	Σύντμηση
10^{-24}	γιοκτο	y	10^{3}	χιλιο	k
10^{-21}	ζεπτο	z	10^{6}	μεγα	M
10^{-18}	ατο	a	10^{9}	γιγα	G
10^{-15}	φεμτο	f	10^{12}	τερα	T
10^{-12}	πικο	p	10^{15}	πετα	P
10^{-9}	νανο	n	10^{18}	εχα	E
10^{-6}	μικρο	μ	10^{21}	ζετα	Z
10^{-3}	χιλιοστο	m	10^{24}	γιοττα	Y
10^{-2}	εκατοστο	c			
10^{-1}	δεκατο	d			

Παράγωγα μεγέθη

Μέγεθος (παραδείγματα)	Μονάδα μέτρησης (SI)	Διαστάσεις
Εμβαδόν επιφάνειας	m^2	$[L^2]$
Όγκος Σώματος	m^3	$[L^3]$
Ταχύτητα (μέτρο)	m/s	[L/T]
Επιτάχυνση (μέτρο)	m/s^2	$[L/T^2]$
Πυκνότητα	Kg/m^3	$[M/L^3]$

Τα παράγωγα μεγέθη μπορούν να εκφραστούν ως μαθηματικοί συνδυασμοί των θεμελιωδών μεγεθών.

Διαστατική ανάλυση

- **Μια τεχνική η οποία μας επιτρέπει να ελέγξουμε αν μια εξίσωση έχει τη σωστή μορφή ή μας βοηθάει να αποδείξουμε έναν μαθηματικό τύπο.**

- Μπορείτε να χειριστείτε τις διαστάσεις (μήκος, μάζα, χρόνος, συνδυασμοί) ως αλγεβρικά μεγέθη.
    - Πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός, διαίρεση

- Τα δύο σκέλη της εξίσωσης πρέπει να έχουν τις ίδιες διαστάσεις.

- Μια εξίσωση είναι σωστή μόνο αν οι διαστάσεις και στα δύο σκέλη της είναι ίδιες.

- Δεν μπορεί να δώσει τις αριθμητικές τιμές των παραγόντων: αυτός είναι ο περιορισμός της.

Διαστατική ανάλυση - 1

Μας επιτρέπει να ελέγξουμε αν μια εξίσωση έχει τη σωστή μορφή

Δίνεται η εξίσωση: $x = 1/2\, a\, t^2$

Ελέγχουμε τις διαστάσεις κάθε σκέλους:

Η εξίσωση είναι διαστατικά σωστή

$$L = \frac{L}{\cancel{T^2}}\cancel{T^2} = L$$

- **Δείξτε ότι η σχέση $u = \alpha t$ είναι διαστατικά σωστή όπου υ είναι η ταχύτητα, α η επιτάχυνση και t ο χρόνος.**

ΛΥΣΗ

Οι διαστάσεις και στα δύο σκέλη πρέπει να είναι οι ίδιες

Η ταχύτητα έχει διαστάσεις L/T

Η επιτάχυνση έχει διαστάσεις L/T^2

Ο χρόνος έχει διαστάσεις T

$$[u] = [\alpha t] \Rightarrow \frac{L}{T} = \frac{L}{T^2}T \Rightarrow \frac{L}{T} = \frac{LT}{T^2} \Rightarrow \frac{L}{T} = \frac{L}{T}$$

Διαστατική ανάλυση - 2

Μας βοηθάει να αποδείξουμε έναν μαθηματικό τύπο (π.χ διαστατική ανάλυση νόμου με αλγεβρικές δυνάμεις)

Να υπολογίσετε τους εκθέτες m και n

$$x \propto a^m t^n$$

ΛΥΣΗ

Οι διαστάσεις και στα δύο σκέλη είναι L
Η επιτάχυνση έχει διαστάσεις L/T^2
Ο χρόνος έχει διαστάσεις T

$$[\mathbf{x}] = [\boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{m}}\mathbf{t}^{\mathbf{n}}] \Rightarrow \mathbf{L} = \left(\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{T}^2}\right)^{\mathbf{m}} \mathbf{T}^{\mathbf{n}} \Rightarrow \mathbf{L} = \frac{\mathbf{L}^{\mathbf{m}}}{\mathbf{T}^{2\mathbf{m}}}\mathbf{T}^{\mathbf{n}}$$

$$\Rightarrow \mathbf{L} = \mathbf{L}^{\mathbf{m}}\mathbf{T}^{(\mathbf{n}-2\mathbf{m})} \Rightarrow \mathbf{L}^1 = \mathbf{L}^{\mathbf{m}}\mathbf{T}^{(\mathbf{n}-2\mathbf{m})}$$

$$\Rightarrow \mathbf{L}^1\mathbf{T}^0 = \mathbf{L}^{\mathbf{m}}\mathbf{T}^{(\mathbf{n}-2\mathbf{m})}$$

Άρα: **m = 1** και n-2m = 0 επομένως **n = 2**

$$x \propto at^2$$

Διαστατική ανάλυση - 3

Μας βοηθάει να αποδείξουμε έναν μαθηματικό τύπο (π.χ διαστατική ανάλυση νόμου με αλγεβρικές δυνάμεις)

Υποθέστε ότι η επιτάχυνση α ενός σωματιδίου που κινείται με ομαλή ταχύτητα υ σε κύκλο ακτίνας r είναι ανάλογη προς κάποια δύναμη της ακτίνας r, έστω r^n και κάποια δύναμη της ταχύτητας υ, έστω $υ^m$. Να υπολογίσετε τις τιμές των n και m και να γράψετε την απλούστερη μορφή μιας εξίσωσης για την επιτάχυνση α.

ΛΥΣΗ

Η επιτάχυνση έχει διαστάσεις L/T^2
Η ταχύτητα έχει διαστάσεις L/T
Ο χρόνος έχει διαστάσεις T
Η ακτίνα έχει διαστάσεις L

$$a = kr^n v^m$$

$$\frac{L}{T^2} = L^n \left(\frac{L}{T}\right)^m \Rightarrow \frac{L}{T^2} = L^n \frac{L^m}{T^m} \Rightarrow \frac{L^1}{T^2} = \frac{L^{n+m}}{T^m}$$

Άρα: **m = 2** και n+m = 1 επομένως **n = -1**

$$a = kr^{-1}v^2 \Rightarrow a = k\frac{v^2}{r}$$

Διαστατική ανάλυση – 4

Από το πείραμα προκύπτει ότι το μέγιστο ύψος h_{max} που ανέρχεται ένα σώμα το οποίο εκτελεί κατακόρυφη βολή προς τα επάνω εξαρτάται από την αρχική ταχύτητα $υ_o$ αλλά και την επιτάχυνση του πεδίου βαρύτητας g. Ανακαλύψτε την απλούστερη μορφή του νόμου που τα συνδέει.

ΛΥΣΗ

Επομένως εφαρμόζοντας τη **Διαστατική ανάλυση** έχουμε:

$$h_{max} \propto u_o^a g^\beta$$

$h_{max} \propto u_o^a g^\beta \Rightarrow L = (L\,T^{-1})^\alpha (L\,T^{-2})^\beta \Rightarrow L = L^\alpha T^{-\alpha} L^\beta T^{-2\beta} \Rightarrow L = L^{\alpha+\beta} T^{-(\alpha+2\beta)}$ *οπότε*:

α+β =1
α+2β =0

Επιλύουμε το σύστημα και προκύπτει: **β = -1 και α = 2**

Επομένως: $h_{max} \propto \frac{u_o^2}{g}$ Ενώ η σωστή σχέση είναι: $h_{max} = \frac{u_o^2}{2g}$

Διαστατική ανάλυση – 5

Επιθυμούμε να υπολογίσουμε μια σχέση που να συνδέει το «εμβαδόν» A του ορίζοντα γεγονότων μιας μαύρης τρύπας με την μάζα της m. Γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν A εξαρτάται από τη μάζα m της μαύρης τρύπας, την ταχύτητα του φωτός c και τη σταθερά της παγκόσμιας έλξης G.

$$A = G^{\alpha} m^{\beta} c^{\gamma} \quad (1)$$

Για τη σταθερά της Παγκόσμιας Έλξης χρησιμοποιώ το Νόμο της Παγκόσμιας Έλξης:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \rightarrow G = \frac{F r^2}{m_1 m_2}$$

Άρα: $\mathbf{G=L^{3}M^{-1}\,T^{-2}}$

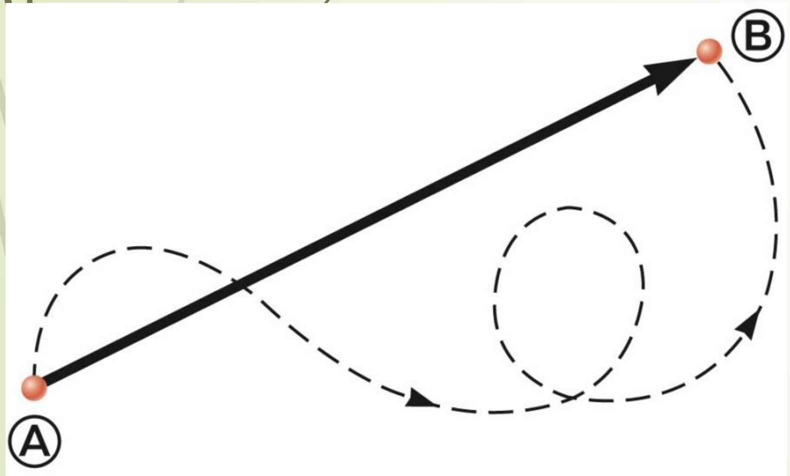
Επομένως από την (1): $$\mathrm{L}^2 = (\mathrm{L}^3\,\mathrm{M}^{-1}\mathrm{T}^{-2})^{\alpha}\mathrm{M}^{\beta}(LT^{-1})^{\gamma}$$

$$\left.\begin{array}{l} 3\alpha+\gamma=2 \\ -\alpha+\beta=0 \\ -2\alpha-\gamma=0 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \alpha=\beta=2 \\ \gamma=-4 \end{array}$$

$$\boxed{A = G^2 m^2 c^{-4}}$$

Βαθμωτά και διανυσματικά μεγέθη

- Ένα φυσικό μέγεθος ανήκει στην κατηγορία των ***βαθμωτών μεγεθών***, όταν για την περιγραφή του απαιτείται να γνωρίζουμε μόνο το μέτρο του.
- Ένα φυσικό μέγεθος είναι ***διανυσματικό*** όταν για την περιγραφή του απαιτείται να γνωρίζουμε το μέτρο και την κατεύθυνσή του.
- **Παράδειγμα: Απόσταση** και **Μετατόπιση**



Σωματίδιο κινείται από το σημείο Α στο σημείο Β ακολουθώντας τη διαδρομή που υποδεικνύει η διακεκομμένη γραμμή.

Αυτή είναι η ***απόσταση*** που διένυσε: **βαθμωτό μέγεθος**.

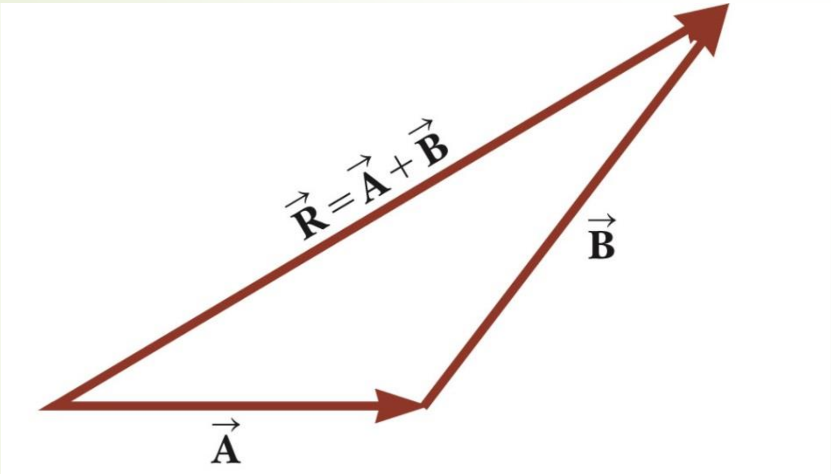
Μετατόπιση: η συμπαγής ευθεία που ενώνει το Α με το Β. Ανεξάρτητη από τη διαδρομή που ακολουθεί το σωματίδιο μεταξύ των δύο σημείων.

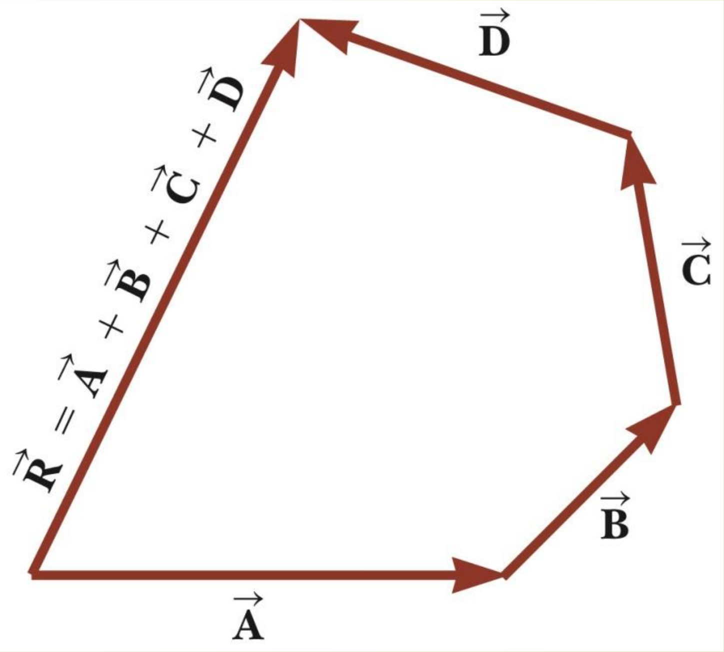
Μετατόπιση: **διανυσματικό μέγεθος**.

Διανύσματα-Πρόσθεση διανυσμάτων

- Διάνυσμα $\vec{A}$ (ή A) με μέτρο $|\vec{A}|$ (ή A)
- Το μέτρο του διανύσματος έχει φυσικές μονάδες.
- Το μέτρο ενός διανύσματος είναι πάντα θετικός αριθμός.
- ***Ίσα*** διανύσματα : έχουν το ίδιο μέτρο και την ίδια κατεύθυνση ($A = B$ και έχουν ίδια διεύθυνση και φορά) - Αυτό μάς επιτρέπει να μεταθέσουμε παράλληλα ένα διάνυσμα σε μια νέα θέση.

Πρόσθεση διανυσμάτων – Γραφική Μέθοδος



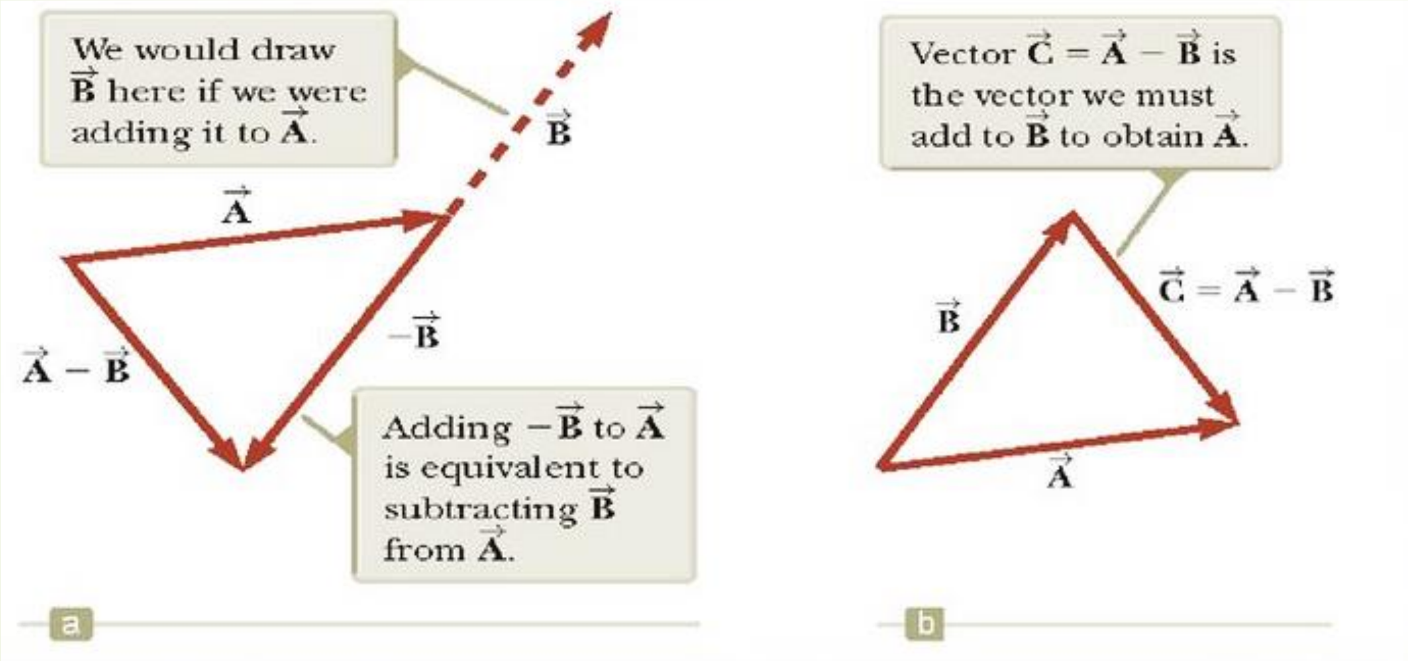


Αφαίρεση διανυσμάτων

- Όπου $-\vec{B}$ αντίθετο του $\vec{B}$
- Γενικά ορίζουμε ως αντίθετο ενός διανύσματος το διάνυσμα το οποίο, όταν προστεθεί στο αρχικό, δίνει μηδενικό διανυσματικό άθροισμα.

$$\vec{A} + \left(-\vec{A}\right) = 0$$

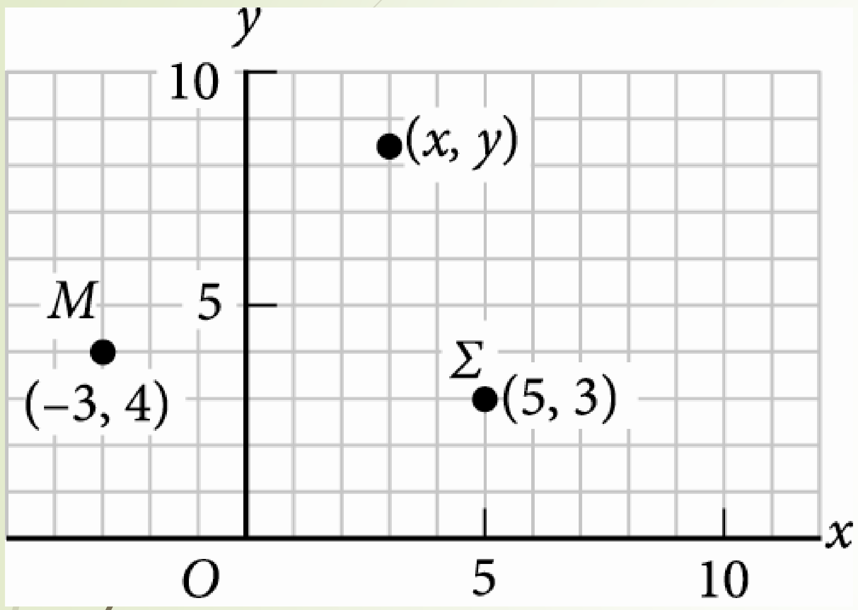
- Το αρχικό διάνυσμα και το αντίθετό του θα έχουν ίδιο μέτρο αλλά αντίθετες κατευθύνσεις.



$$\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})$$

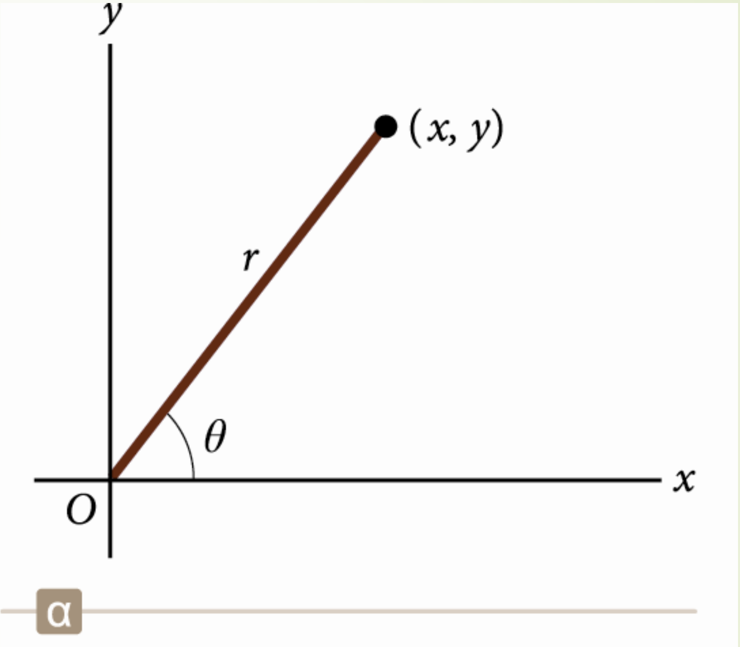
Θέση σημείου στο χώρο: Σύστημα συντεταγμένων

Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων



- Οι άξονες x και y τέμνονται στην αρχή των συντεταγμένων.
- Τα σημεία αναπαρίστανται με το ζεύγος (x, y).

Πολικό σύστημα συντεταγμένων



- Ορίζουμε την αρχή των αξόνων και έναν άξονα αναφοράς (άξονας x).
- Το σημείο βρίσκεται σε απόσταση *r* από την αρχή των αξόνων στην κατεύθυνση της γωνίας *θ*, η οποία μετριέται αριστερόστροφα από τον άξονα αναφοράς.
- Τα σημεία αναπαρίστανται με το ζεύγος (*r*, *θ*).

Μετατροπή πολικών συντεταγμένων σε καρτεσιανές

- Με βάση το ορθογώνιο τρίγωνο που σχηματίζεται από τις *r* και θ:

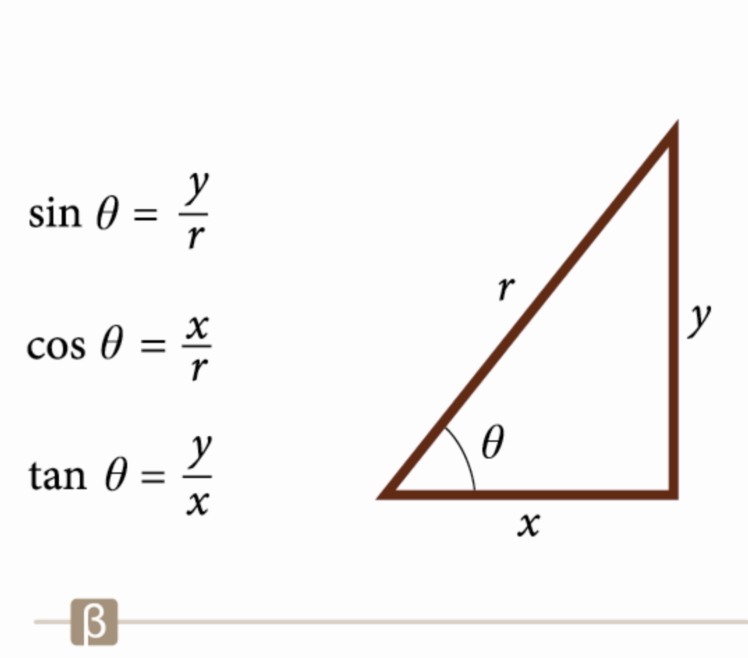
$x = r\cos\theta$

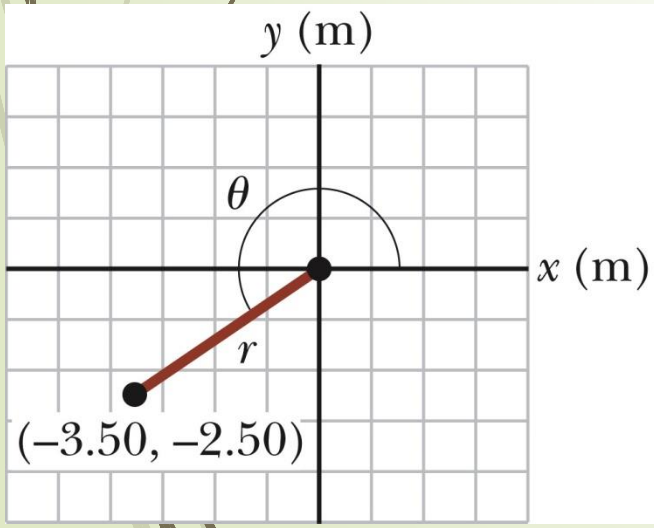
$y = r\sin\theta$

- Αν οι καρτεσιανές συντεταγμένες είναι γνωστές:

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$





Θέση - Καρτεσιανές συντεταγμένες: (x,y) = (3.50, –2.50) m

Θέση - Πολικές συντεταγμένες:

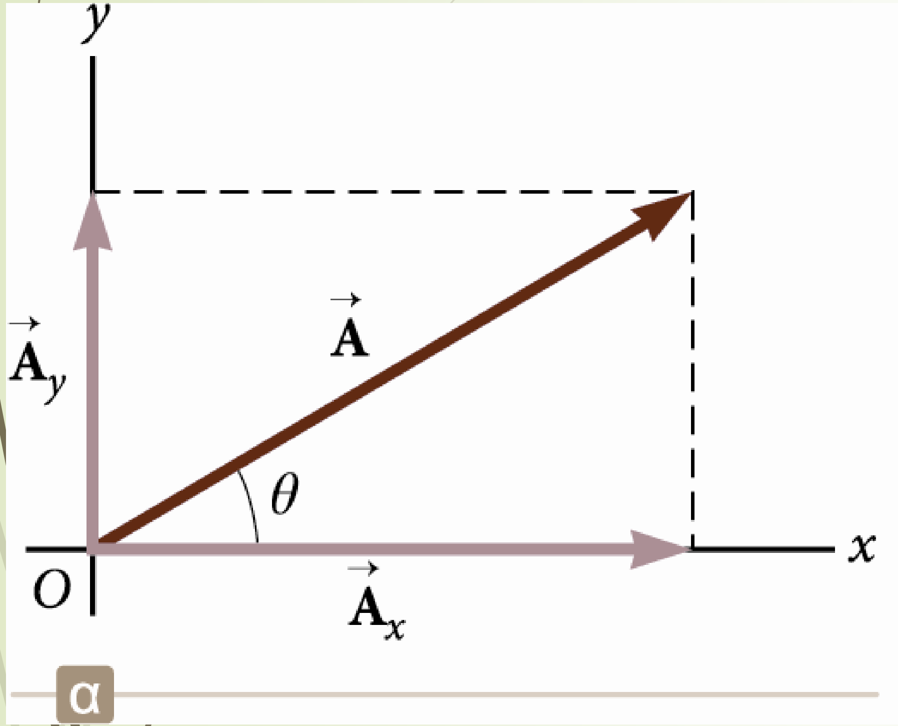
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3.50\text{ m})^2 + (-2.50\text{ m})^2} = 4.30\text{ m}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-2.50\text{ m}}{-3.50\text{ m}} = 0.714$$

$\theta = 216^\circ$ (3ο τεταρτημόριο)

Συνιστώσες διανύσματος

Συνιστώσα είναι η προβολή ενός διανύσματος πάνω σε έναν άξονα



- Τα $\vec{\mathbf{A}}_x$ και $\vec{\mathbf{A}}_y$ είναι οι διανυσματικές συνιστώσες του $\vec{\mathbf{A}}$.

Είναι διανύσματα, οπότε ακολουθούν όλους τους κανόνες των διανυσμάτων.

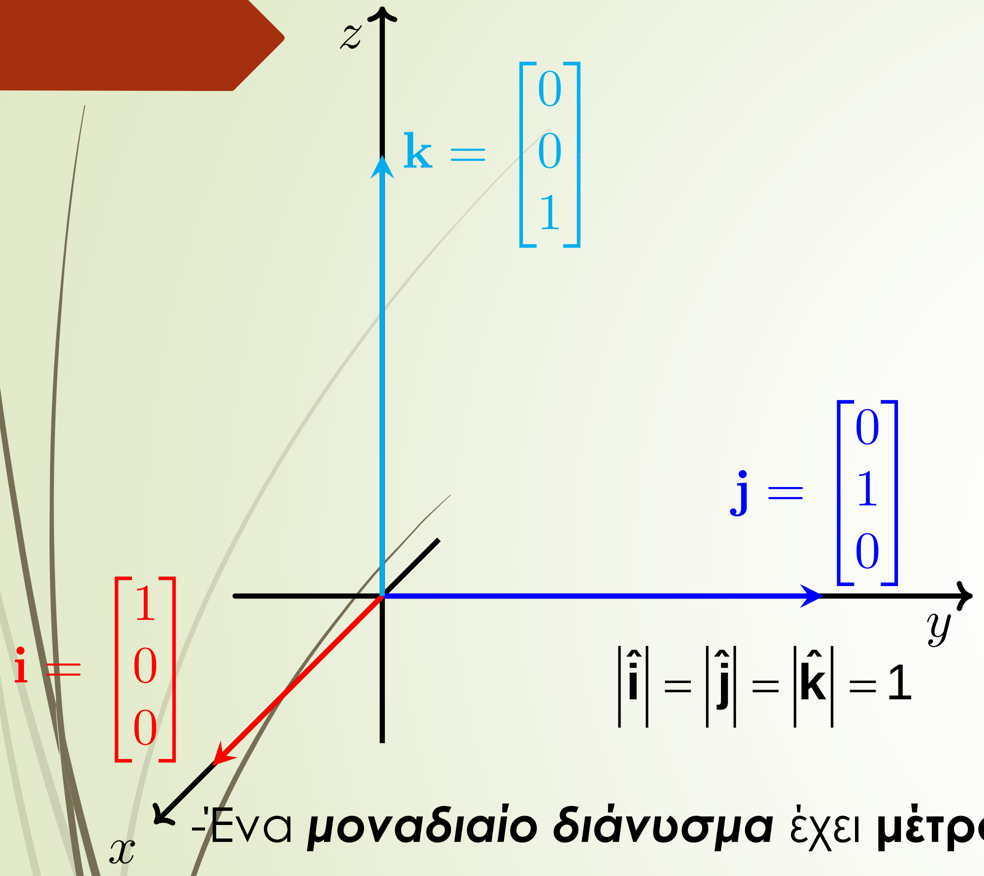
$$\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{A}}_x + \vec{\mathbf{A}}_y$$

- Τα A_x και A_y είναι βαθμωτά μεγέθη. Θα αναφερόμαστε σε αυτά ως τις συνιστώσες του $\vec{\mathbf{A}}$.

$$A_x = A\cos\theta \qquad A_y = A\sin\theta$$

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \quad \text{και} \quad \theta = \tan^{-1}\frac{A_y}{A_x}$$

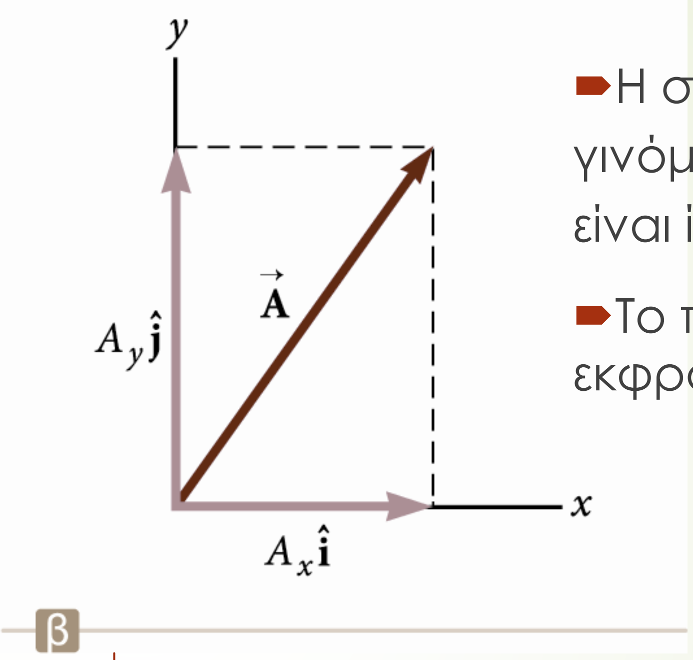
Μοναδιαία διανύσματα και συνιστώσες διανυσμάτων



$$\left|\hat{\mathbf{i}}\right| = \left|\hat{\mathbf{j}}\right| = \left|\hat{\mathbf{k}}\right| = 1$$

-Ένα ***μοναδιαίο διάνυσμα*** έχει **μέτρο ίσο με 1**.

-Τα μοναδιαία διανύσματα ορίζουν μία συγκεκριμένη κατεύθυνση και δεν έχουν κάποια άλλη φυσική σημασία.



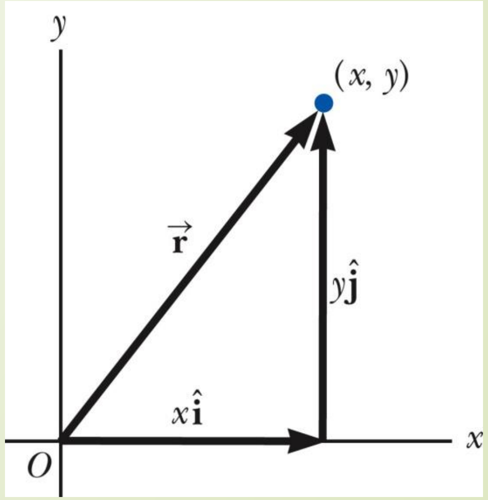
- Η συνιστώσα $\mathbf{A_x}$ είναι ίδια με το γινόμενο $A_x\hat{\mathbf{i}}$ και η συνιστώσα $\mathbf{A_y}$ είναι ίδια με το γινόμενο $A_y\hat{\mathbf{j}}$, κ.ο.κ.
- Το πλήρες διάνυσμα μπορεί να εκφραστεί ως:

$$\vec{\mathbf{A}} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}}$$

- Ένα σημείο του επιπέδου xy έχει καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y).
- Το σημείο μπορεί να οριστεί από το διάνυσμα θέσης

$$\hat{\mathbf{r}} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$$

- Η παραπάνω σχέση δίνει τις συνιστώσες του διανύσματος και τις συντεταγμένες του.



Πρόσθεση διανυσμάτων με χρήση μοναδιαίων διανυσμάτων

- Χρησιμοποιούμε τη σχέση $\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$
- Τότε,

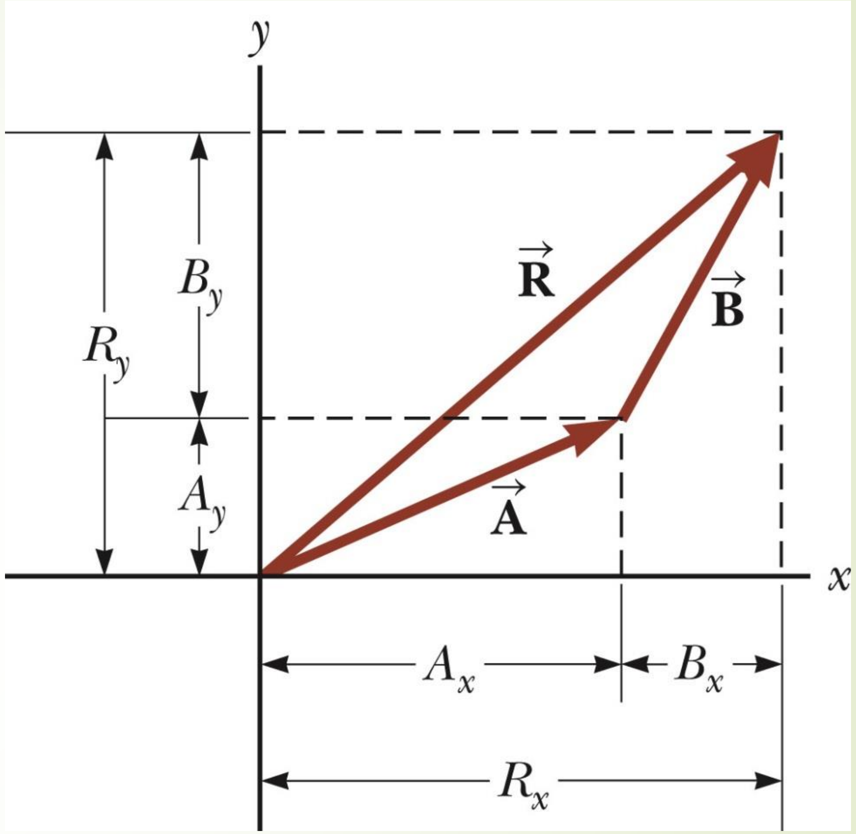
$$\vec{\mathbf{R}} = \left(A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}}\right) + \left(B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}}\right)$$

$$\vec{\mathbf{R}} = \left(A_x + B_x\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(A_y + B_y\right)\hat{\mathbf{j}}$$

$$\vec{\mathbf{R}} = R_x\hat{\mathbf{i}} + R_y\hat{\mathbf{j}}$$

- Άρα, $R_x = A_x + B_x$ και $R_y = A_y + B_y$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{R_y}{R_x}$$



Επέκταση στις τρεις διαστάσεις

$$\vec{\mathbf{R}} = \left(A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}}\right) + \left(B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} + B_z\hat{\mathbf{k}}\right)$$

$$\vec{\mathbf{R}} = \left(A_x + B_x\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(A_y + B_y\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(A_z + B_z\right)\hat{\mathbf{k}}$$

$$\vec{\mathbf{R}} = R_x\hat{\mathbf{i}} + R_y\hat{\mathbf{j}} + R_z\hat{\mathbf{k}}$$

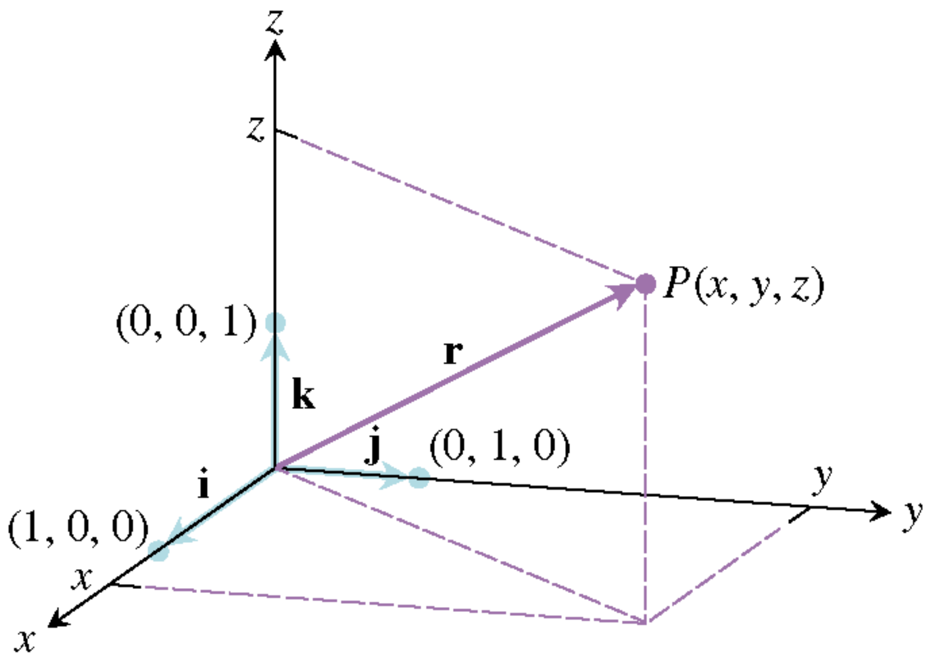
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \qquad \theta_x = \cos^{-1}\frac{R_x}{R}, \kappa\lambda\pi.$$

Επέκταση σε περισσότερα των δύο διανύσματα

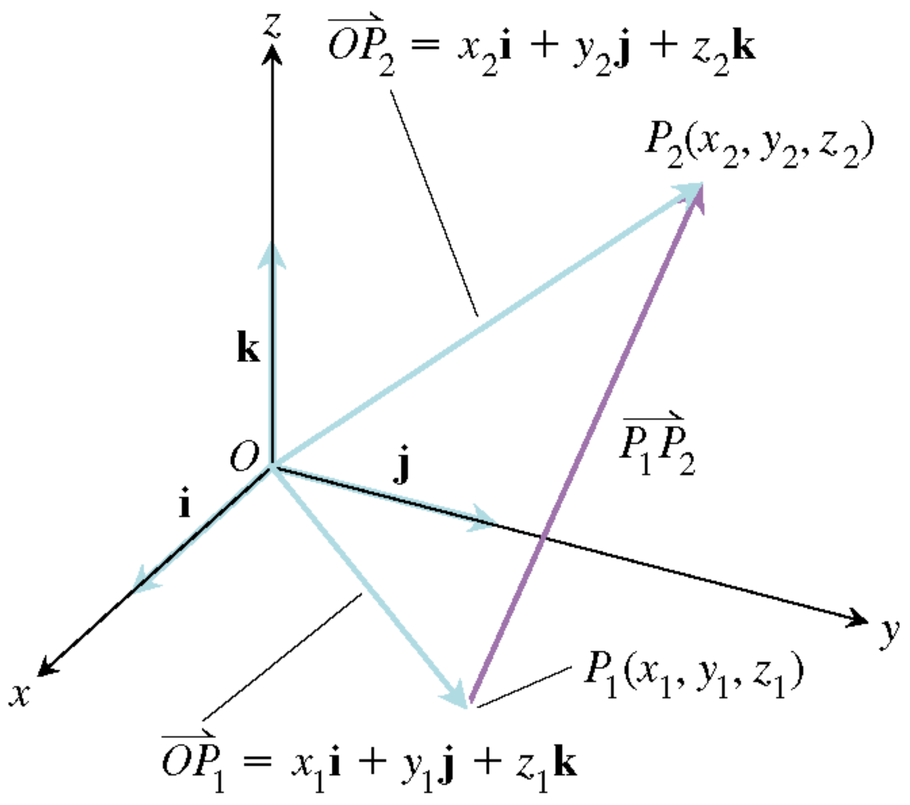
$$\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}}$$

$$\vec{\mathbf{R}} = \left(A_x + B_x + C_x\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(A_y + B_y + C_y\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(A_z + B_z + C_z\right)\hat{\mathbf{k}}$$

Διανύσματα στις τρεις διαστάσεις



ΣΧΗΜΑ 10.4 Το διάνυσμα θέσεως ενός σημείου στον χώρο.



ΣΧΗΜΑ 10.5 Το διάνυσμα από το P_1 στο P_2 είναι $\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}$.

Πρόσθεση διανυσμάτων με χρήση μοναδιαίων διανυσμάτων - 1

Να υπολογίσετε το άθροισμα των διανυσμάτων μετατόπισης $\vec{A}$ και $\vec{B}$ όπου $\vec{A} = (2,0\hat{\imath} + 2,0\hat{\jmath})m$ και $\vec{B} = (2,0\hat{\imath} - 4,0\hat{\jmath})m$

ΛΥΣΗ

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} = (2,0\hat{\imath} + 2,0\hat{\jmath})m + (2,0\hat{\imath} - 4,0\hat{\jmath})m = (4,0\hat{\imath} - 2,0\hat{\jmath})m$$

Υπολογίσουμε το μέτρο του διανύσματος $\vec{R}$

$$|\vec{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(4,0)^2 + (-2,0)^2}m = \sqrt{20}m$$

Υπολογίσουμε τη γωνία του διανύσματος $\vec{R}$ με τον άξονα x

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{R_x}{R_y} = \frac{-2,0m}{4,0m} = -0,5$$

Πρόσθεση διανυσμάτων με χρήση μοναδιαίων διανυσμάτων - 2

Ένα σωματίδιο πραγματοποιεί τρεις διαδοχικές μετακινήσεις:

$$\Delta\vec{r_1} = (15\hat{\imath} + 30\hat{\jmath} + 12\hat{k})m \qquad \Delta\vec{r_2} = (23\hat{\imath} - 14\hat{\jmath} - 5\hat{k})m \qquad \Delta\vec{r_3} = (-13\hat{\imath} + 15\hat{\jmath})m$$

Να υπολογίσετε τη συνισταμένη μετατόπιση καθώς και το μέτρο της.

ΛΥΣΗ

Υπολογίζουμε πρώτα τη συνισταμένη μετατόπιση του σωματιδίου

$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r_1} + \Delta\vec{r_2} + \Delta\vec{r_3} = (15\hat{\imath} + 30\hat{\jmath} + 12\hat{k})m + (23\hat{\imath} - 14\hat{\jmath} - 5\hat{k})m + (-13\hat{\imath} + 15\hat{\jmath})m = (25\hat{\imath} + 31\hat{\jmath} + 7\hat{k})m$$

Υπολογίσουμε κατόπιν το μέτρο της συνισταμένης μετατόπισης

$$|\vec{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{(25)^2 + (31)^2 + (7)^2}m = 40\ m$$

Γνωρίζουμε ότι: $$cos\theta_x = \frac{R_x}{R} = \frac{25}{40} = \frac{5}{8} = 0{,}625 \Rightarrow \theta_x = 51{,}32^o$$

$$cos\theta_y = \frac{R_y}{R} = \frac{31}{40} = 0{,}775 \Rightarrow \theta_y = 39{,}2^o \qquad cos\theta_z = \frac{R_{zy}}{R} = \frac{7}{40} = 0{,}175 \Rightarrow \theta_z = 79{,}9^o$$

Πολλαπλασιασμός / διαίρεση με βαθμωτή ποσότητα

- Το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού ή της διαίρεσης ενός διανύσματος με μια βαθμωτή ποσότητα είναι διάνυσμα.
- Το μέτρο του διανύσματος πολλαπλασιάζεται ή διαιρείται με τη βαθμωτή ποσότητα.
- Αν η βαθμωτή ποσότητα είναι θετική, το διάνυσμα που προκύπτει έχει την ίδια κατεύθυνση με το αρχικό διάνυσμα, ενώ αν είναι αρνητική το διάνυσμα που προκύπτει έχει αντίθετη κατεύθυνση από το αρχικό διάνυσμα.

- $\vec{B} = m\vec{A}, m \in \mathbb{R} \Rightarrow |\vec{B}| = |m||\vec{A}|$

- $\vec{B} \uparrow\uparrow \vec{A}$, αν $m > 0$
- $\vec{B} \uparrow\downarrow \vec{A}$, αν $m < 0$

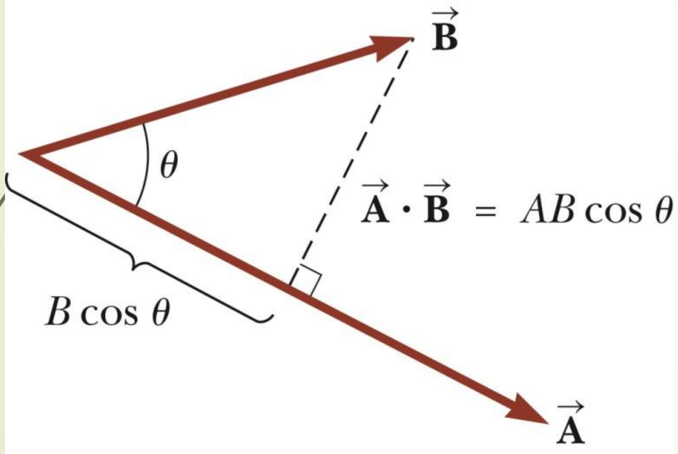
Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

- Γράφουμε το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων ως $\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{B}}$.

θ είναι η γωνία μεταξύ των A και B.

$$\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{B}} \equiv A\,B\cos\theta$$

- **Το εσωτερικο γινόμενο είναι βαθμωτό μέγεθος.**



- Αντιμεταθετική ιδιότητα.
  - $\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}}\cdot\vec{\mathbf{A}}$
- Επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού.
  - $\vec{\mathbf{A}}\cdot\left(\vec{\mathbf{B}}+\vec{\mathbf{C}}\right) = \vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{C}}$

Εσωτερικά γινόμενα μοναδιαίων διανυσμάτων

$$\hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = 1$$

- Σε μορφή συνιστωσών: $\hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = 0$

$$\vec{\mathbf{A}} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}}$$

$$\vec{\mathbf{B}} = B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} + B_z\hat{\mathbf{k}}$$

$$\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{B}} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

$$\cos\theta = \frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{A\,B} = \frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{\sqrt{A_x{}^2 + A_y{}^2 + A_z{}^2}\sqrt{B_x{}^2 + B_y{}^2 + B_z{}^2}} = \frac{\vec{\mathrm{A}}\cdot\vec{\mathrm{B}}}{\mathrm{AB}}$$

Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων - 1

Παράδειγμα υπολογισμού εσωτερικού γινομένου

Τα διανύσματα $\vec{A}$ και $\vec{B}$ δίδονται από τις σχέσεις $\vec{A} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$ και $\vec{B} = -\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$
α) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{A} \bullet \vec{B}$
β) Να υπολογίσετε τη γωνία θ μεταξύ των δύο διανυσμάτων.

ΛΥΣΗ

α) $\vec{A} \bullet \vec{B} = (2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}) \bullet (-\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}) = -2\hat{\imath} \bullet \hat{\imath} + \cancel{4\hat{\imath} \bullet \hat{\jmath}}^{0} - \cancel{3\hat{\jmath} \bullet \hat{\imath}}^{0} + 6\hat{\jmath} \bullet \hat{\jmath} = -2 + 0 - 0 + 6 = 4$

β) Γνωρίζουμε ότι: $cos\theta = \dfrac{\vec{A} \bullet \vec{B}}{AB}$ αλλά

$$A = |\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

$$B = |\vec{B}| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

Επομένως $cos\theta = \dfrac{\vec{A} \bullet \vec{B}}{AB} = \dfrac{4}{\sqrt{13}}\dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{4}{\sqrt{65}}$

Πως υπολογίζουμε εάν δύο διανύσματα είναι κάθετα, παράλληλα ή αντιπαράλληλα;

Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων - 2

Παράδειγμα υπολογισμού εσωτερικού γινομένου

Ένα σωματίδιο δέχεται μια σταθερή δύναμη $\vec{F} = (5\hat{\imath} + 2\hat{\jmath})N$ και υφίσταται μια μετατόπιση στο επίπεδο xy η οποία δίδεται από τη σχέση $\Delta\vec{r} = (2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath})m$. Να υπολογίσετε το έργο W που παράγει η δύναμη στο σωματίδιο.

ΛΥΣΗ

$$\vec{F} \bullet \Delta\vec{r} = (5\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}) \bullet (2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}) = 5\hat{\imath} \bullet 2\hat{\imath} + \overset{0}{\cancel{5\hat{\imath} \bullet 3\hat{\jmath}}} + \overset{0}{\cancel{2\hat{\jmath} \bullet 2\hat{\imath}}} + 2\hat{\jmath} \bullet 3\hat{\jmath} = 10 + 0 + 0 + 6 = 16\,J$$

Το αποτέλεσμα του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων είναι πάντα ένα
ΒΑΘΜΩΤΟ ΜΕΓΕΘΟΣ

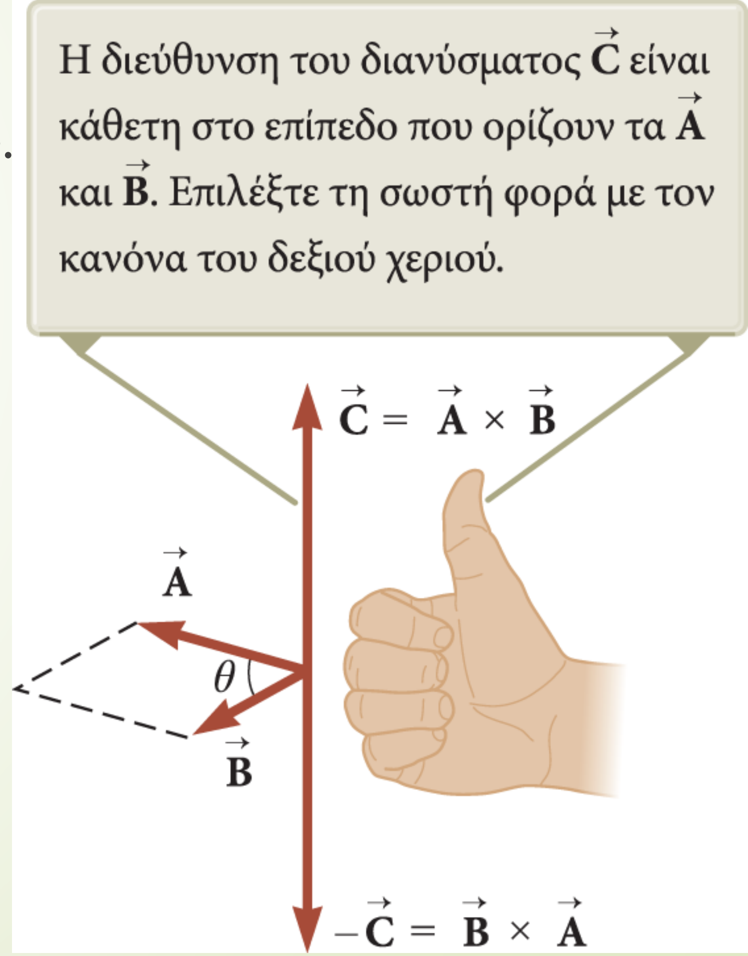
Εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

- Για δύο οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\mathbf{A}}$ και $\vec{\mathbf{B}}$:
- Το διανυσματικό (εξωτερικό) γινόμενο των $\vec{\mathbf{A}}$ και $\vec{\mathbf{B}}$ είναι ένα *τρίτο* ***διάνυσμα***, το

$$\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$$

- Το μέτρο του διανύσματος C είναι *AB* sin *θ*
  - *θ* είναι η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ των $\vec{\mathbf{A}}$ και $\vec{\mathbf{B}}$.

- Η ποσότητα *AB* sin θ ισούται με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν τα $\vec{\mathbf{A}}$ και $\vec{\mathbf{B}}$.
- Η διεύθυνση του $\vec{\mathbf{C}}$ είναι κάθετη στο επίπεδο που σχηματίζουν τα $\vec{\mathbf{A}}$ και $\vec{\mathbf{B}}$
- Ο καλύτερος τρόπος για να προσδιορίσουμε την κατεύθυνση του διανύσματος $\vec{\mathbf{C}}$ είναι να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα του δεξιού χεριού.



Ιδιότητες εξωτερικού γινομένου - 1

- Στο διανυσματικό γινόμενο δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα. Η σειρά με την οποία πολλαπλασιάζουμε τα δύο διανύσματα έχει σημασία.
  - Για να λάβετε υπόψη τη σειρά, θυμηθείτε ότι $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = -\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}}$. Επίσης $\vec{\mathbf{A}} \times \left(-\vec{\mathbf{B}}\right) = -\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$
- Αν $\vec{A} || \vec{B}$ ($\theta = 0^o$ ή 180^o), τότε $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = 0$
  - Επίσης, $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{A}} = 0$.
- Αν $\vec{A} \perp \vec{B}$, τότε $\left|\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}\right| = AB$.
- Στο διανυσματικό γινόμενο ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα: $\vec{\mathbf{A}} \times (\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}}) = \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{C}}$

Εξωτερικά γινόμενα μοναδιαίων διανυσμάτων

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}} = 0$$

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = -\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{k}}$$

$$\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{i}}$$

$$\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} = -\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{j}}$$

Επίσης $\hat{\mathbf{i}} \times \left(-\hat{\mathbf{j}}\right) = -\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}}$

Χρήση οριζουσών

Το διανυσματικό γινόμενο μπορεί να εκφραστεί σε μορφή ορίζουσας ως

$$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} - \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} \hat{\mathbf{j}} + \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} \hat{\mathbf{k}}$$

- Αν αναπτύξουμε τις ορίζουσες, παίρνουμε τη σχέση

$$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = \left(A_y B_z - A_z B_y\right)\hat{\mathbf{i}} - \left(A_x B_z - A_z B_x\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(A_x B_y - A_y B_x\right)\hat{\mathbf{k}}$$

Παραδείγματα υπολογισμού Εξωτερικού Γινομένου - 1

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\mathbf{A}} = 2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}},\ \vec{\mathbf{B}} = -\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}$

Υπολογίστε το $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$

ΛΥΣΗ

$$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = (2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}) \times (-\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}})$$

$$= 2\hat{\mathbf{i}} \times (-\hat{\mathbf{i}}) + 2\hat{\mathbf{i}} \times 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{j}} \times (-\hat{\mathbf{i}}) + 3\hat{\mathbf{j}} \times 2\hat{\mathbf{j}}$$

$$= 0 + 4\hat{\mathbf{k}} + 3\hat{\mathbf{k}} + 0 = 7\hat{\mathbf{k}}$$

Χρήση οριζουσών ?

Παραδείγματα υπολογισμού Εξωτερικού Γινομένου - 2

Δίνονται η δύναμη και η θέση:

$\vec{F} = (2.00\,\hat{i} + 3.00\,\hat{j})\,N$

$\vec{r} = (4.00\,\hat{i} + 5.00\,\hat{j})\,m$

Να υπολογίσετε τη μηχανική ροπή $\vec{\tau}$ εάν $\vec{\tau} = \vec{r}x\vec{F}$

ΛΥΣΗ

$$\vec{\tau} = \vec{r}x\vec{F} = [(4,00\hat{\imath} + 5,00\hat{\jmath})N]x[(2,00\hat{\imath} + 3,00\hat{\jmath})N] =$$

$$\left[\begin{matrix} \underbrace{\cancel{(4,00)(2,00)\hat{\imath}x\hat{\imath}}}_{0} + (4,00)(3,00)\hat{\imath}x\hat{\jmath} + \\ (5,00)(2,00)\hat{\jmath}x\hat{\imath} + \underbrace{\cancel{(5,00)(3,00)\hat{\jmath}x\hat{\jmath}}}_{0} \end{matrix}\right] = \left[\left(12,00\hat{k} - 10,00\hat{k}\right)\right] = 2,00\hat{k}\ Nm$$

Υπενθυμίζουμε: $\hat{\imath}x\hat{\imath} = \hat{\jmath}x\hat{\jmath} = \hat{k}x\hat{k} = 0$

$\hat{\imath}x\hat{\jmath} = \hat{k}$ $\quad$ $\hat{\jmath}x\hat{k} = \hat{\imath}$ $\quad$ $\hat{k}x\hat{\imath} = \hat{\jmath}$

$\hat{\jmath}x\hat{\imath} = -\hat{k}$ $\quad$ $\hat{k}x\hat{\jmath} = -\hat{\imath}$ $\quad$ $\hat{\imath}x\hat{k} = -\hat{\jmath}$

Η έννοια της παραγώγου (derivative)

Έστω ένα μέγεθος y που εξαρτάται (μεταβάλλεται) συναρτήσει ενός άλλου μεγέθους x

$$y = f(x)$$

Ταχύτητα: $v = f(t)$

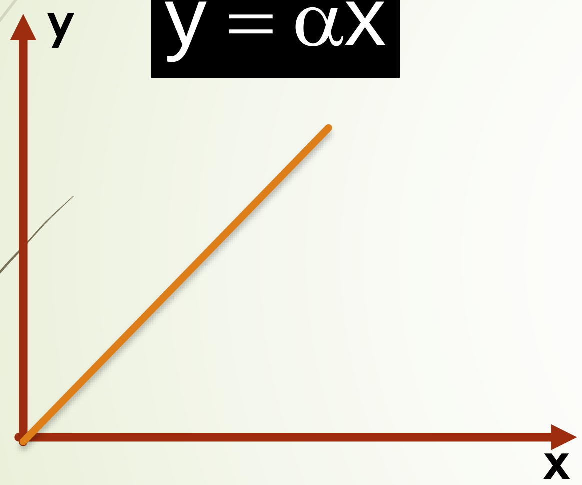
Επιτάχυνση: $\alpha = f(t)$

Βαρυτική δύναμη: $F = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2} \rightarrow F = f(r)$

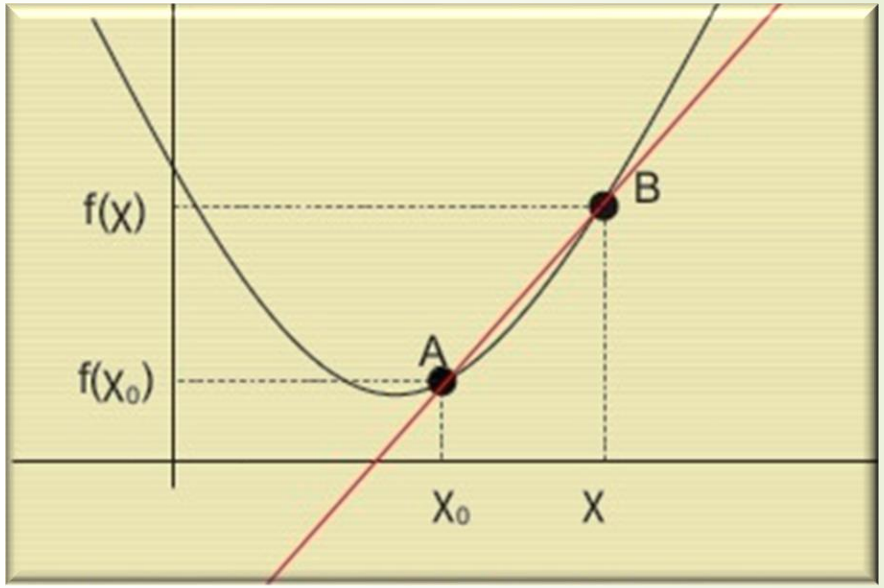
Δύναμη Laplace: $\vec{F}_L = I\vec{\ell} \times \vec{B}$

Ευθύγραμμος ρευματοφόρος αγωγός

Η έννοια της παραγώγου (derivative)



$y = \alpha x$

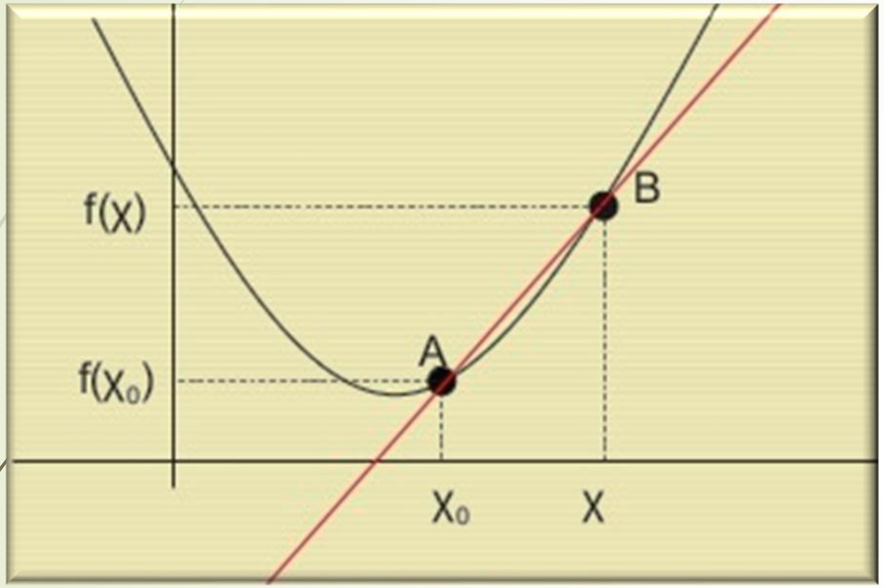


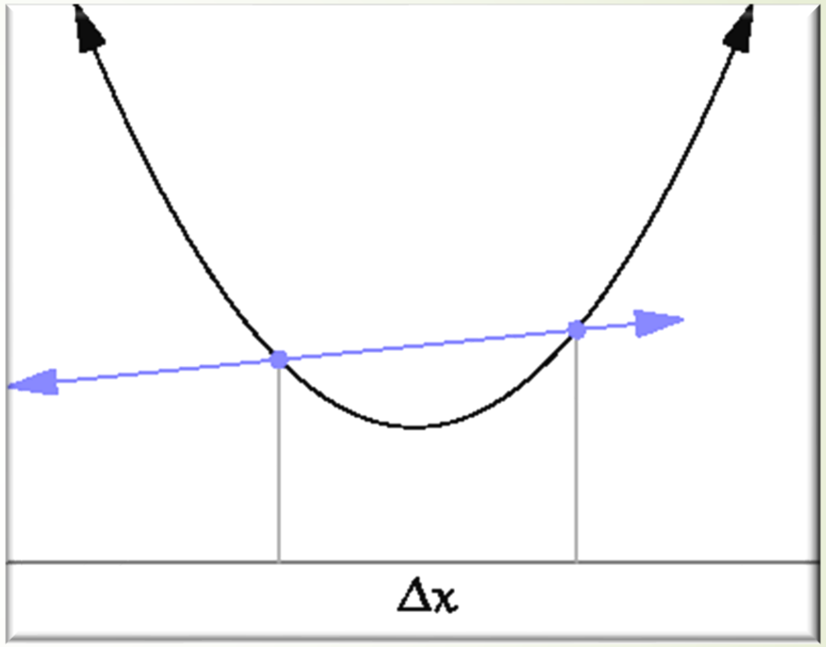
$$\text{Κλίση}: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \alpha$$

$$\text{Κλίση}: \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Η κλίση της ευθείας AB

Η έννοια της παραγώγου (derivative)





$$\text{Κλίση}: \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Η κλίση της ευθείας AB

$$\left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{\Delta x \to 0} = \frac{dy}{dx}$$

Η κλίση της εφαπτομένης σε οποιοδήποτε σημείο της καμπύλης

Η έννοια της παραγώγου (derivative)

$\frac{dy}{dx}$ Παράγωγος της συνάρτησης y(x) ως προς x

Τί εκφράζει:

- Την κλίση της καμπύλης f(x) συναρτήσει του x σε οποιοδήποτε τυχαίο σημείο της
- Πόσο γρήγορα (ή αργά) μεταβάλλεται το μέγεθος y συναρτήσει του μεγέθους x

ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

Η έννοια της παραγώγου (derivative)

Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων	**Παράγωγοι σύνθετων συναρτήσεων**
$(c)' = 0$	
$(x)' = 1$	
$(x^{\nu})' = \nu x^{\nu-1}, \quad \nu \in N^*$	$([f(x)]^{\nu})' = \nu\,[f(x)]^{\nu-1} . f'(x)$
$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (για κάθε $x > 0$)	$\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} f'(x) \quad f(x)>0$
$(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$	$(\eta\mu f(x))' = \sigma\upsilon\nu f(x) \cdot f'(x)$
$(\sigma\upsilon\nu x)' = -\,\eta\mu x$	$(\sigma\upsilon\nu f(x))' = -\,\eta\mu f(x) \cdot f'(x)$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0$	$(\ln f(x))' = \frac{1}{f(x)} f'(x), \quad f(x) > 0$
$(\ln\|x\|)' = \frac{1}{x}$	$(\ln\|f(x)\|)' = \frac{1}{f(x)} f'(x)$
$(\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$	$\left(\varepsilon\varphi f(x)\right)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 f(x)} \cdot f'(x)$
$(\sigma\varphi x)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$	$\left(\sigma\varphi f(x)\right)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 f(x)} \cdot f'(x)$
$(e^x)' = e^x$	$\left(e^{f(x)}\right)' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$
$(\alpha^x)' = \alpha^x \cdot \ln\alpha$	$\left(\alpha^{f(x)}\right)' = \alpha^{f(x)} \cdot \ln\alpha \cdot f'(x)$
	$\left([f(x)]^t\right)' = t[f(x)]^{t-1} \cdot f'(x)$

Η έννοια της παραγώγου (derivative)

Κανόνες παραγώγισης

$$(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x)$$

$$(c\cdot f(x))' = c\cdot f'(x) \qquad (f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2} \qquad \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$g(f(x)) = g'(f(x))\, f'(x)$$

$(sin3x)'$=cos3x (3x)' =3cos3x **Σύνθετη συνάρτηση**

$(x^2cosx)'=(x^2)'cosx+ x^2(cosx)'=2xcosx - x^2sinx$ **Παραγώγιση Γινομένου**

$$\left(\frac{sin\theta}{cos\theta}\right)' = \frac{(sin\theta)'cos\theta - sin\theta(cos\theta)'}{cos^2\theta} = \frac{cos\theta * cos\theta + sin\theta * sin\theta}{cos^2\theta} = \frac{1}{cos^2\theta}$$

Παραγώγιση Πηλίκου

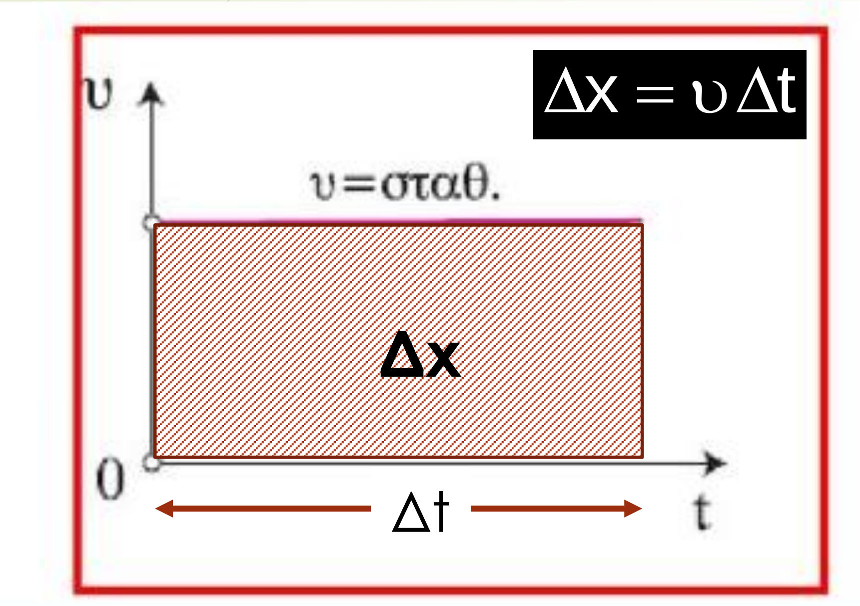
Ιδιότητες εξωτερικού γινομένου - 2

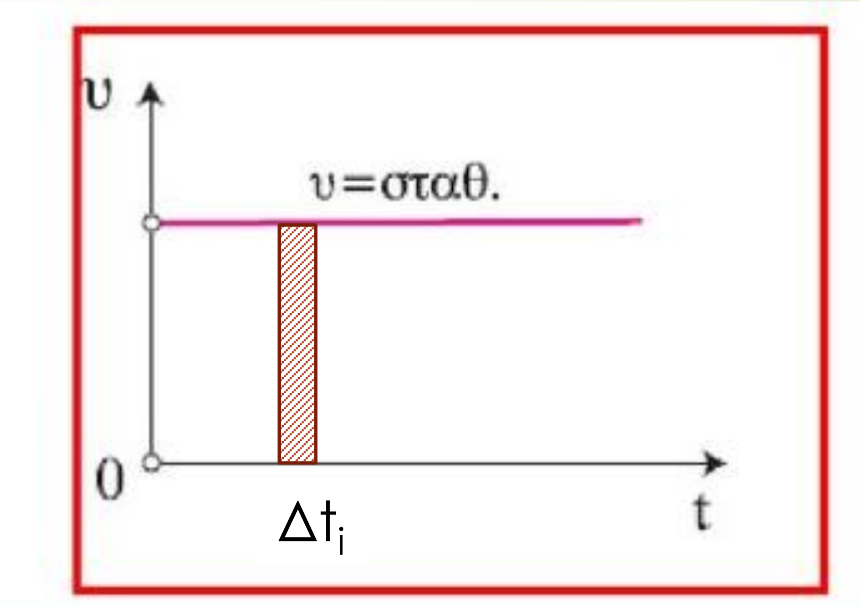
Η παράγωγος του διανυσματικού γινομένου ως προς μια μεταβλητή, όπως ο χρόνος *t*, είναι

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\mathbf{A}}\times\vec{\mathbf{B}}\right)=\frac{d\vec{\mathbf{A}}}{dt}\times\vec{\mathbf{B}}+\vec{\mathbf{A}}\times\frac{d\vec{\mathbf{B}}}{dt}$$

Είναι σημαντικό να τηρούμε τη σειρά των παραγόντων του γινομένου.

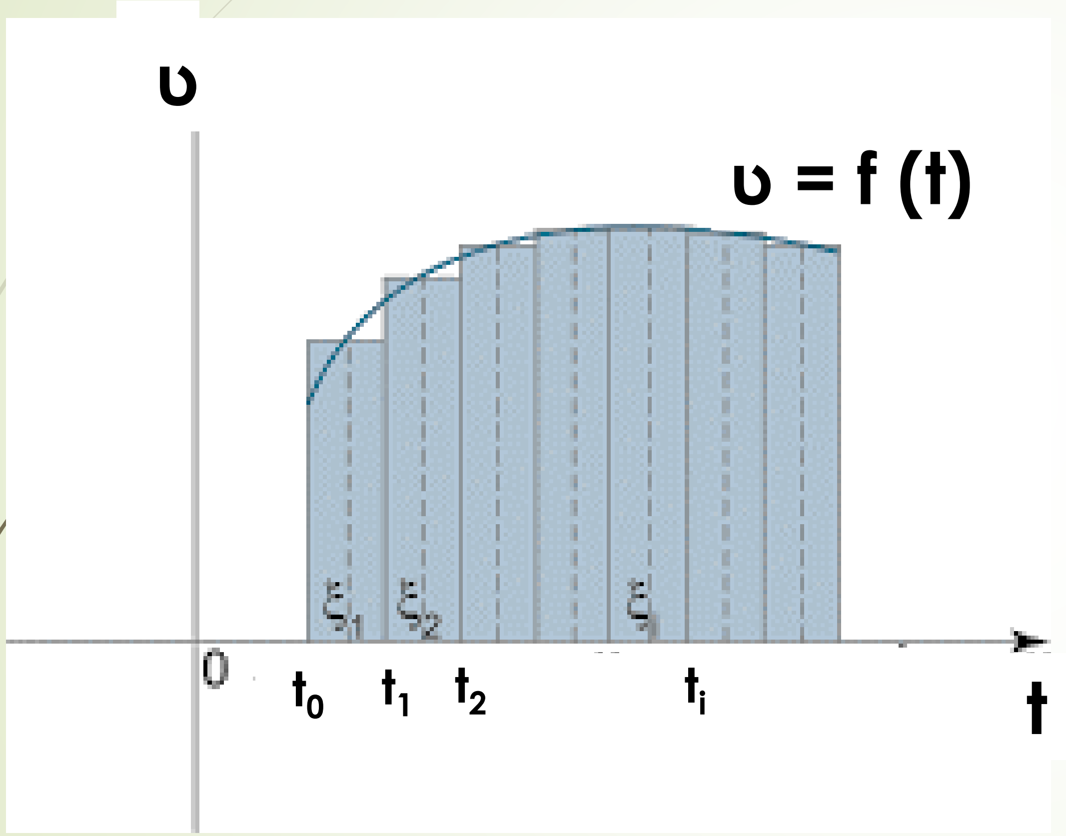
Η έννοια του ολοκληρώματος





$$\Delta x = \sum_i \upsilon \Delta t_i$$

Η έννοια του ολοκληρώματος



$$\Delta x = \sum_i \upsilon(t)\,\Delta t_i = \int_{t_{\alpha\rho\chi}}^{t_{\tau\varepsilon\lambda}} \upsilon(t)\,dt$$

ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

ΚΑΝΟΝΕΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

Βασικά Ολοκληρώματα

1. $\int dx = x + c$

2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$

4. $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + c$

5. $\int e^{ax}\, dx = \frac{1}{a}e^{ax} + c$

6. $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

7. $\int x e^{ax}\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1) + c$

8. $\int x^2 e^{ax}\, dx = \frac{e^{ax}}{a^3}(a^2x^2 - 2ax + 2) + c$

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4}$$

$$\int e^x dx = e^x + \mathrm{c}$$

$$\int e^{3x} dx = \frac{1}{3} e^{3x} + \mathrm{c}$$

Βασικά Ολοκληρώματα

$\int sinxdx = -cosx$+C
$\int sin3xdx = -\frac{1}{3}cosx$+C

$\int cosxdx = sinx$+C
$\int cos3xdx = \frac{1}{3}sinx$+C

10. $\int \ln x\, dx = x \ln x - x + c$

11. $\int \sin kx\, dx = -\frac{1}{k}\cos kx + c$

12. $\int \cos kx\, dx = \frac{1}{k}\sin kx + c$

13. $\int \tan kx\, dx = -\frac{1}{k}\ln \cos kx + c$

14. $\int \cot kx\, dx = \frac{1}{k}\ln \sin kx + c$

Μαθηματικός Φορμαλισμός

Χωρικές Συντεταγμένες:
Θέση σημείου στο χώρο
Καρτεσιανές συντεταγμένες
Κυλινδρικές συντεταγμένες
Σφαιρικές συντεταγμένες

Διανύσματα:
Πρόσθεση και Αφαίρεση
Εσωτερικό γινόμενο
Εξωτερικό γινόμενο

Διαφορικός Λογισμός:
Παράγωγος
Μερική Παράγωγος
Ρυθμός μεταβολής
(Χρονική Παράγωγος)

Ολοκληρωτικός Λογισμός:
Επιφανειακά
Ολοκληρώματα
Επικαμπύλια
Ολοκληρώματα
Όρια ολοκλήρωσης
Αλλαγή μεταβλητής

Καλή Μελέτη