2.5. Δυαδικοί αριθμοί με πρόσημο

Το αποτέλεσμα της αφαίρεσης δύο θετικών δυαδικών αριθμών θα μπορούσε να ήταν αρνητικό αν ο μειωτέος ήταν μικρότερος από τον αφαιρετέο. Συνεπώς υπάρχει η ανάγκη ορισμού θετικών και αρνητικών δυαδικών αριθμών. Για να το πετύχουμε αυτό κάνουμε την εξής σύμβαση: Κάθε θετικός αριθμός θα έχει ως MSB το 0 και κάθε αρνητικός αριθμός θα έχει ως MSB το 1. Υπάρχουν τρεις διαφορετικοί τρόποι για τον συμβολισμό (παράσταση) των προσημασμένων αριθμών, οι εξής:

(i) Προσημασμένου μέτρου (signed magnitude),

(ii) Συμπληρώματος ως προς 1 (1's complement),

(iii) Συμπληρώματος ως προς 2 (2's complement).

Η μορφή συμπληρώματος ως προς 2 είναι εκείνη που χρησιμοποιείται στους υπολογιστές. Θα αναφέρουμε όμως και τις τρεις παραστάσεις για να γίνουν κατανοητά τα πλεονεκτήματα καθεμιάς.

Προσημασμένου μέτρου

Σύμφωνα με αυτή την μορφή συμβολισμού, το πρώτο bit από αριστερά είναι το bit του προσήμου (0 για +, 1 για -) και τα υπόλοιπα bits υποδηλώνουν το μέγεθος του αριθμού. Ο συμβολισμός αυτός είναι ο πλέον βολικός για εμάς, αλλά δύσχρηστος για μια μηχανή, μια που πρέπει να λαμβάνουμε πρώτα το πρόσημο υπόψη μας πριν κάνουμε μια πράξη. Σύμφωνα με αυτή την μορφή παράστασης ο αριθμός $(+3)_{10}$ θα γράφεται στο δυαδικό ως $(011)_2$ με ακρίβεια τριών bits ή $(0011)_2$ με ακρίβεια τεσσάρων bits, ενώ ο αριθμός $(-3)_{10}$ θα γράφεται ως $(1011)_2$ με ακρίβεια τεσσάρων bits. (Βλ. πίνακα 2.2).

Πίνακας 2.2

Παράδειγμα προσημασμένων αριθμών των 4-bits. Παράσταση των ακεραίων αριθμών

-8 έως +7 στο δυαδικό με ακρίβεια 4 δυαδικών ψηφίων

	Signed Magnitude	1's Complement	2's Complement
+7	0111	0111	0111
+6	0110	0110	0110
+5	0101	0101	0101
+4	0100	0100	0100
+3	0011	0011	0011
+2	0010	0010	0010
+1	0001	0001	0001
0	$\begin{cases} 0000 \\ 1000 \end{cases}$	$\begin{cases} 0000 \\ 1111 \end{cases}$	0000
-1	1001	1110	1111
-2	1010	1101	1110
-3	1011	1100	1101
-4	1100	1011	1100
-5	1101	1010	1011
-6	1110	1001	1010
-7	1111	1000	1001
-8	-	-	1000

Συμπλήρωμα ως προς 1

Οι θετικοί αριθμοί έχουν την μορφή προσημασμένου μέτρου. Οι αρνητικοί προκύπτουν από τους αντίστοιχους θετικούς με αντιστροφή των δυαδικών ψηφίων από 0 σε 1 και από 1 σε 0. Παράδειγμα ο $(+3)_{10}$ γράφεται ως $(0011)_2$, ενώ ο $(-3)_{10}$ ως $(1100)_2$ (βλ. Πίνακα 2.2).

Η πρόσθεση στο σύστημα αυτό γίνεται κανονικά όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη παράγραφο. Η αφαίρεση γίνεται με πρόσθεση του αντιθέτου (του συμπληρώματος ως προς 1) του αφαιρετέου. Αν προκύψει κρατούμενο το προσθέτουμε στο αποτέλεσμα που μόλις βρήκαμε. Το κρατούμενο αυτό ονομάζεται τελικό (end around carry).

Παράδειγμα:

$(7)_{10}$ - $(5)_{10}$ = $(7)_{10}$ + $(-5)_{10}$ = $(+2)_{10}$

$(0111)_2$ - $(0101)_2$ = $(0111)_2$ + $(1010)_2$ = $(0010)_2$

$$
\begin{array}{r}
0111 \\
+\ 1010 \\
1\ 0001 \\
+\ \ \ \ 1 \\
\hline
0010
\end{array}
$$

Τελικό κρατούμενο

Παράδειγμα:

$(5)_{10}$ - $(7)_{10}$ = $(5)_{10}$ + $(-7)_{10}$ = $(-2)_{10}$

$(0101)_2$ - $(0111)_2$ = $(0101)_2$ + $(1000)_2$ = $(1101)_2$

$$
\begin{array}{r}
0101 \\
+\ 1000 \\
\hline
1101
\end{array}
$$

Εδώ δεν υπάρχει τελικό κρατούμενο. Το αποτέλεσμα είναι σωστό και συμβολίζει τον αριθμό $(-2)_{10}$ σε συμπλήρωμα ως προς 1. Αυτό μπορεί να επιβεβαιωθεί είτε μέσω του πίνακα 2.2, είτε αντιστρέφοντας τα ψηφία του αποτελέσματος, οπότε προκύπτει το $(0010)_2$, δηλαδή το $(+2)_{10}$.

Συμπλήρωμα ως προς 2

Οι θετικοί αριθμοί έχουν την γνωστή πλέον μορφή προσημασμένου μέτρου. Οι αρνητικοί προκύπτουν από τους αντίστοιχους σε συμπλήρωμα ως προς 1 προσθέτοντας μία μονάδα.

Η πρόσθεση στο σύστημα αυτό γίνεται κατά τα γνωστά. Η αφαίρεση γίνεται με πρόσθεση του αντιθέτου (του συμπληρώματος ως προς 2) του αφαιρετέου. Αν από αυτή την πρόσθεση προκύψει κρατούμενο, αυτό αγνοείται!

Παράδειγμα:

$(7)_{10} - (5)_{10} = (7)_{10} + (-5)_{10} = (+2)_{10}$

$$
\begin{array}{lcr}
(+5)_{10} & = & (0101)_2 \\
(-5)_{10} & \xrightarrow{\text{Συμπ. ως 1}} & (1010)_2 \\
 & & +\quad 1 \\
\hline
(-5)_{10} & \xrightarrow{\text{Συμπ. ως 2}} & (1011)_2
\end{array}
$$

Άρα η πρόσθεση του $(-5)_{10}$ στο $(+7)_{10}$ δίνει:

$$
\begin{array}{r}
0111 \\
+\ 1011 \\
\hline
\cancel{1}0010
\end{array}
$$

αγνοείται $\rightarrow$ $\cancel{1}0010$

Παράδειγμα:

$(5)_{10} - (7)_{10} = (5)_{10} + (-7)_{10} = (-2)_{10}$

$$
\begin{array}{lcr}
(+7)_{10} & = & (0111)_2 \\
(-7)_{10} & \xrightarrow{\text{Συμπ. ως 1}} & (1000)_2 \\
 & & +\quad 1 \\
\hline
(-7)_{10} & \xrightarrow{\text{Συμπ. ως 2}} & (1001)_2
\end{array}
$$

Και τελικά προσθέτουμε το $(-7)_{10}$ στο $(+5)_{10}$ και έχουμε το τελικό αποτέλεσμα:

$$
\begin{array}{r}
0101 \\
+\ 1001 \\
\hline
1110
\end{array}
\xrightarrow{\text{Συμπ. ως 2}} (-2)_{10}
$$

Προσοχή: Για να κάνετε σωστά τις πράξεις να φροντίσετε οι αριθμοί σας να έχουν το ίδιο πλήθος δυαδικών ψηφίων λαμβάνοντας πάντοτε υπόψη και το πρόσημο!

Παράδειγμα: Να υπολογισθεί η διαφορά Α-Β όπου $A = (37)_{10}$, $B = (4)_{10}$.

πρόσημο

Βήμα 1^{ο}: $A = (+37)_{10} = (0100101)_2$

$B = (\quad 4)_{10} = \quad (100)_2$

Βήμα 2^{ο}: $B = (+4)_{10} = (0000100)_2$

Βήμα 3^{ο}: $-B = (-4)_{10} = (1111100)_2$ σε συμπλήρωμα ως προς 2

Βήμα 4^{ο}: $A - B = A + (-B) =$

$$
\begin{array}{r}
0100101 \\
+\ 1111100 \\
\hline
\cancel{1}0100001
\end{array}
= (33)_{10}.
$$

αγνοείται $\rightarrow$ $\cancel{1}0100001 = (33)_{10}$.

Σημείωση $1^{η}$: Ένας δυαδικός αριθμός $(X)_2 = α_{n-1}\ α_{n-2} \ldots α_1 α_0 . α_{-1} \ldots α_{-m}$, όπου $α_i$, $i = -m, \ldots, n-1$ (με $α_{n-1}$ το bit προσήμου) σε μορφή συμπληρώματος ως προς 2, μετατρέπεται σε δεκαδικό με βάση τη σχέση:

$$(X)_{10} = -α_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \sum_{i=-m}^{n-2} α_i 2^i \qquad (5)$$

Σημείωση $2^{η}$: Ένας εποπτικός τρόπος για την εύρεση του συμπληρώματος ως προς 2 ενός δυαδικού αριθμού είναι ο ακόλουθος: αρχίζοντας από δεξιά (δηλ. από το LSB του αριθμού) ξαναγράφουμε κάθε bit όπως έχει, μέχρι και της πρώτης μονάδας που θα συναντήσουμε, ενώ τα υπόλοιπα bits τα αντιστρέφουμε.

Παραδείγματα: α) Ο αριθμός $(-2)_{10}$ προκύπτει από τον $(+2)_{10}$ ως εξής:

$$\underbrace{00}_{\text{Αντιστροφή}}\ \ \underbrace{10}_{\text{Αντιγραφή}}$$
$$\overbrace{11}\ \ \overbrace{10}$$

β) Ο αριθμός $(-76)_{10}$ προκύπτει από τον $(+76)_{10}$ ως εξής:

$$\underbrace{01001}_{\text{Αντιστροφή}}\ \ \underbrace{100}_{\text{Αντιγραφή}}$$
$$\overbrace{10110}\ \ \overbrace{100}$$

Σημείωση $3^{η}$: Τα πλεονεκτήματα του συμπληρώματος ως προς 2 έναντι των άλλων δύο μορφών αναπαράστασης των αριθμών είναι τα εξής (βλ. πίνακα 2.2):

α) υπάρχει μόνο ένας τρόπος παράστασης του μηδενός,

β) υπάρχει παράσταση για το -2^n, όπου n το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων,

γ) η αφαίρεση γίνεται με απλή πρόσθεση των αριθμών αδιαφορώντας για το τελικό κρατούμενο.

2.6. Συμπληρώματα αριθμών: Μιά γενικότερη ματιά

Συμπληρώματα (complements) μπορούν να υπάρξουν όχι μόνο για αριθμούς του δυαδικού συστήματος αλλά και για οποιοδήποτε άλλο σύστημα αρίθμησης με βάση b. Σε κάθε περίπτωση υπάρχουν δύο ειδών συμπληρώματα, δηλαδή ως προς b-1 και ως προς b. Το συμπλήρωμα ως προς b-1 ενός αριθμού X με N ψηφία ισούται με $(b^N-1)-X$, ενώ το συμπλήρωμα ως προς b του ίδιου αριθμού ισούται με b^N-X. Δηλαδή, το συμπλήρωμα ως προς b προκύπτει από το συμπλήρωμα ως προς b-1 με πρόσθεση μιας μονάδας.

Ας εξετάσουμε την περίπτωση των δεκαδικών αριθμών (b=10) και ας δούμε πώς θα μπορούσαμε να κάνουμε αφαίρεση, προσθέτοντας το συμπλήρωμα ως προς 9 του αφαιρετέου. Ας υπολογίσουμε ως παράδειγμα πόσα χρόνια πέρασαν από την στιγμή που πρωτοπαρουσιάστηκε ο πρώτος προσωπικός Η/Υ (Personal Computer, PC) το 1981. Με άλλα λόγια, ας υπολογίσουμε την διαφορά 1998-1981. Το συμπλήρωμα ως προς 9 του 1981 (αφαιρετέου) προκύπτει με αφαίρεση αυτού από τον τετραψήφιο αριθμό $9999 = 10^4-1$ και ισούται με 8018. Άρα 1998 - 1981 = 1998 + 8018.

$$\begin{array}{lrr} & & 1998 \\ & + & 8018 \\ \text{Τελικό κρατούμενο} & & 1\ 0016 \\ & + & 1 \\ \hline & & 0017 \end{array}$$

Παρατηρούμε ότι το τελικό κρατούμενο που προέκυψε προστέθηκε στο άθροισμα ώστε να πάρουμε το σωστό αποτέλεσμα που είναι 17 χρόνια. Γίνεται φανερό πως, όπως και στην αντίστοιχη περίπτωση του δυαδικού συστήματος, αν χρησιμοποιούσαμε το συμπλήρωμα ως προς 10 το αποτέλεσμα θα ήταν σωστό και δεν θα χρειαζόταν η πρόσθεση του τελικού κρατουμένου.