Άσκηση 1

Να βρεθεί (εφόσον υπάρχει) η λύση του συστήματος.

$$\begin{gathered} x + w = 1 \\ -x + y + 2z + w = 3 \\ 3x + 3y + z - w = 5 \end{gathered}$$

Λύση Άσκησης 1

Χρησιμοποιούμε τον επαυξημένο πίνακα.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & | & 3 \\ 3 & 3 & 1 & -1 & | & 5 \end{bmatrix}$$

<u>Λύση</u>:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & | & 3 \\ 3 & 3 & 1 & -1 & | & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 + R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & | & 4 \\ 0 & 3 & 1 & -4 & | & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 3R_2}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & | & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & | & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-5} & \mathbf{-10} & | & \mathbf{-10} \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to -\frac{1}{5}R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & | & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_3} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & | & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-2} & | & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & | & \mathbf{2} \end{bmatrix}$$

Οπότε:

$$\begin{gathered} z = 2 - 2w \\ y = 2w \\ x = 1 - w \end{gathered}$$

Άρα, η γενική μορφή της λύσης είναι: **(1-w, 2w,2-2w,w)**

Άσκηση 2

Να διερευνηθεί το σύστημα για τις διάφορες τιμές του λ.

$$\begin{aligned} \lambda x + y + z &= 1 \\ x + \lambda y + z &= 1 \\ x + y + \lambda z &= 1 \end{aligned}$$

Λύση Άσκησης 2

Υπολογίζουμε την ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων

$$\begin{aligned} D = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} &= \lambda(\lambda^2 - 1) - (\lambda - 1) + (1 - \lambda) = \lambda(\lambda^2 - 1) - (\lambda - 1) - (\lambda - 1) \\ &= \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1) - 2(\lambda - 1) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda - 2) = (\lambda - 1)(\lambda - 1)(\lambda + 2) \\ &= (\lambda - 1)^2(\lambda + 2) \end{aligned}$$

α) Το σύστημα έχει μοναδική λύση για $\lambda \neq 1 \; \kappa\alpha\iota \; \lambda \neq -2$

$$\begin{aligned} D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} &= (\lambda^2 - 1) - (\lambda - 1) + (1 - \lambda) = (\lambda^2 - 1) - 2(\lambda - 1) = (\lambda - 1)(\lambda + 1 - 2) \\ &= (\lambda - 1)^2 \end{aligned}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 1) - (\lambda - 1) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$$

$$D_z = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 1) + (1 - \lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$$

Οπότε

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{1}{\lambda + 2}, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{1}{\lambda + 2}, \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{1}{\lambda + 2},$$

Άρα για $\lambda \neq 1 \; \kappa\alpha\iota \; \lambda \neq -2$, το σύστημα έχει μοναδική λύση την:

$$\left(\frac{1}{\lambda + 2}, \quad \frac{1}{\lambda + 2}, \quad \frac{1}{\lambda + 2} \right)$$

β) Για λ = 1

$$\begin{matrix} x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \end{matrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - L_1]{L_2 \to L_2 - L_1} \begin{matrix} x+y+z=1 \\ 0+0+0=0 \\ 0+0+0=0 \end{matrix} \to x+y+z=1$$

Άρα ο σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής: $(1-y-z, y, z)$

γ) Για λ = -2

$$\begin{matrix} -2x+y+z=1 \\ x-2y+z=1 \\ x+y-2z=1 \end{matrix} \xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_1} \begin{matrix} x+y-2z=1 \\ x-2y+z=1 \\ -2x+y+z=1 \end{matrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 + 2L_1]{L_2 \to L_2 - L_1} \begin{matrix} x+y-2z=1 \\ 0-3y+3z=0 \\ 0+3y-3z=3 \end{matrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 + L_2}$$

$$\begin{matrix} x+y+2z=1 \\ 0-3y+3z=0 \\ 0+0+0=3 \end{matrix}$$

Άρα για λ = -2 το σύστημα είναι αδύνατο

Άσκηση 3

Ανάλυση εισροών – εκροών