

Αριστοποίηση Οικονομικών Συναρτήσεων

Παράδειγμα 1: Έστω ότι η βραχυπρόθεσμη συνάρτηση παραγωγής μιας επιχείρησης δίνεται από την σχέση:

$$Q = 6L^2 - 0.2L^3, \text{ όπου } L \text{ το πλήθος εργατών}$$

- A) Να βρεθεί το πλήθος των εργατών που μεγιστοποιεί την παραγωγή.
B) Να βρεθεί το πλήθος των εργατών που μεγιστοποιεί το μέσο προϊόν εργασίας (AP_L).
Γ) Να υπολογιστεί το οριακό προϊόν εργασίας (MP_L) και το μέσο προϊόν εργασίας (AP_L) για την τιμή L του ερωτήματος (β).

Λύση:

A)

$$\frac{dQ}{dL} = 12L - 0.6L^2 = L(12 - 0.6L)$$

Άρα

$$L = 0 \text{ ή } L = \frac{12}{0.6} = 20$$

Επιπλέον

$$\frac{d^2Q}{dL^2} = 12 - 1.2L$$

Όπου

$$\text{Για } L = 0, \frac{d^2Q}{dL^2} = 12 > 0. \text{ Συνεπώς } L = 0 \text{ ΤΕ}$$

$$\text{Για } L = 20, \frac{d^2Q}{dL^2} = 12 - 24 = -12 < 0. \text{ Συνεπώς } L = 20 \text{ ΤΜ}$$

Η επιχείρηση θα πρέπει να χρησιμοποιήσει 20 εργάτες προκειμένου να μεγιστοποιήσει την παραγωγή της:

$$Q(20) = 6 \times 20^2 - 0.2 \times 20^3 = 800$$

* Το ίδιο συμπέρασμα προκύπτει με την εφαρμογή του κριτηρίου της πρώτης παραγώγου.

B)

Το μέσο προϊόν εργασίας προκύπτει από το πηλίκο της συνολικής παραγωγής προς την εργασία:

$$AP_L = \frac{Q}{L} = \frac{6L^2 - 0.2L^3}{L} = 6L - 0.2L^2$$

Επίσης

$$\frac{dAP_L}{dL} = 6 - 0.4L$$

Άρα

$$L = 15$$

Επιπλέον

$$\frac{d^2AP_L}{dL^2} = -0.4 < 0. \text{ Συνεπώς } L = 15 \text{ TM}$$

Η επιχείρηση θα πρέπει να χρησιμοποιήσει 15 εργάτες προκειμένου να μεγιστοποιήσει την μέσο προϊόν εργασίας (παραγωγικότητα εργασίας)

* Το ίδιο συμπέρασμα προκύπτει με την εφαρμογή του κριτηρίου της πρώτης παραγώγου.

Γ)

Από το (β) ερώτημα $L=15$.

Για $L = 15$, ισχύει:

$$AP_L(15) = 6 \times 15 - 0.2 \times 15^2 = 45$$

και

$$MP_L = \frac{dQ}{dL} = 12L - 0.6L^2. \text{ Άρα } MP_L(15) = 12 \times 15 - 0.6 \times 15^2 = 45.$$

Συμπέρασμα:

Για $L = 15$, μεγιστοποιείται η παραγωγικότητα εργασίας και **$MP_L = AP_L$** .

Παράδειγμα 2: Έστω ότι η συνάρτηση ζήτησης για ένα αγαθό είναι:

$$P + Q = 30$$

Αντίστοιχα η συνάρτηση συνολικού κόστους είναι:

$$TC = \frac{1}{2}Q^2 + 6Q + 7$$

A) Να βρεθεί το επίπεδο παραγωγής που μεγιστοποιεί τα συνολικά έσοδα.

B) Να βρεθεί το επίπεδο παραγωγής που μεγιστοποιεί το κέρδος.

Γ) Να υπολογιστεί το οριακό έσοδο (MR) και το οριακό κόστος (MC), για το επίπεδο παραγωγής του ερωτήματος (β).

Λύση:

A)

Η συνάρτηση συνολικών εσόδων δίνεται από την έκφραση:

$$TR = P \times Q = (30 - Q)Q = 30Q - Q^2$$

Επίσης

$$\frac{dTR}{dQ} = 30 - 2Q$$

Άρα

$$\text{Για } \frac{dTR}{dQ} = 0 \Rightarrow Q = 15$$

Επιπλέον

$$\frac{d^2TR}{dQ^2} = -2 < 0. \quad \text{Συνεπώς } Q = 15 \text{ TM}$$

Η επιχείρηση θα πρέπει να έχει επίπεδο παραγωγής $Q = 15$, προκειμένου να μεγιστοποιήσει τα έσοδά της.

B)

Η συνάρτηση κέρδους είναι:

$$Profit = TR - TC = 30Q - Q^2 - \left(\frac{1}{2}Q^2 + 6Q + 7\right) = -\frac{3}{2}Q^2 + 24Q - 7$$

Επίσης

$$\frac{dProfit}{dQ} = -3Q + 24$$

Άρα

$$\text{Για } \frac{dProfit}{dQ} = 0 \Rightarrow Q = 8$$

Επιπλέον

$$\frac{d^2Profit}{dQ^2} = -3 < 0. \quad \text{Συνεπώς } Q = 8 \text{ TM}$$

Η επιχείρηση θα πρέπει να έχει επίπεδο παραγωγής $Q = 8$, προκειμένου να μεγιστοποιήσει τα κέρδη της.

Γ)

$$MR = \frac{dTR}{dQ} = 30 - 2Q$$

$$MC = \frac{dTC}{dQ} = Q + 6$$

Από το ερώτημα (β) ισχύει ότι $Q = 8$.

Για $Q = 8$

$$MR = 30 - 2 \times 8 = 14 = 8 + 6 = MC$$

Συμπέρασμα:

Για $Q = 8$, μεγιστοποιείται το κέρδος και **MR = MC**.

Παράδειγμα 3: Έστω ότι μια επιχείρηση μπορεί να χρεώνει με διαφορετική τιμή τους εγχώριους από τους διεθνείς πελάτες.

Η συνάρτηση ζήτησης για την εγχώρια αγορά είναι:

$$P_1 + Q_1 = 500$$

Αντίστοιχα η συνάρτηση ζήτησης για την διεθνή αγορά:

$$2P_2 + 3Q_2 = 720$$

Η συνάρτηση συνολικού κόστους είναι:

$$TC = 50000 + 20Q, \quad \text{όπου } Q = Q_1 + Q_2$$

Να καθοριστεί το επίπεδο χρέωσης ώστε να μεγιστοποιείται το κέρδος της επιχείρησης.

Λύση:

Περίπτωση Α: Διαφορετική Χρέωση.

Το συνολικό κόστος είναι ανεξάρτητο από την αγορά. Άρα

$$MC = \frac{dTC}{dQ} = 20$$

Για την εγχώρια αγορά ισχύει:

$$TR_1 = P_1 \times Q_1 = (500 - Q_1)Q_1 = 500Q_1 - Q_1^2$$

Επίσης

$$MR_1 = \frac{dTR_1}{dQ_1} = 500 - 2Q_1$$

Άρα

$$\text{Για } MR_1 = MC \Rightarrow 500 - 2Q_1 = 20 \Rightarrow Q_1 = 240$$

Συνεπώς

$$\text{Για } Q_1 = 240, \quad P_1 = 500 - 240 = 260$$

Η επιχείρηση μεγιστοποιεί το κέρδος της στην εγχώρια αγορά για $P_1=260$.

Με αντίστοιχη διαδικασία υπολογίζεται η τιμή χρέωσης για την διεθνή αγορά.

Περίπτωση Β: Ίδια Χρέωση.

Αφού η τιμή χρέωσης είναι η ίδια οι αντίστοιχες εξισώσεις ζήτησης για την εγχώρια και διεθνή αγορά είναι:

Η συνάρτηση ζήτησης για την εγχώρια αγορά είναι:

$$P + Q_1 = 500$$

Αντίστοιχα η συνάρτηση ζήτησης για την διεθνή αγορά:

$$2P + 3Q_2 = 720$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει:

$$Q_1 = 500 - P \quad \text{και} \quad Q_2 = 240 - \frac{2}{3}P$$

Συνεπώς

$$Q = Q_1 + Q_2 = 500 - P + 240 - \frac{2}{3}P = 740 - \frac{5}{3}P$$

Λύνοντας ως προς P:

$$Q = 740 - \frac{5}{3}P \Leftrightarrow P = 444 - \frac{3}{5}Q$$

Η συνάρτηση συνολικών εσόδων δίνεται από την έκφραση:

$$TR = P \times Q = (444 - \frac{3}{5}Q)Q = 444Q - \frac{3}{5}Q^2$$

Επίσης

$$MR = \frac{dTR}{dQ} = 444 - \frac{6}{5}Q$$

$$\text{Για } MR = MC \Rightarrow 444 - \frac{6}{5}Q = 20 \Rightarrow Q = \frac{1060}{3}$$

Άρα

$$P = 444 - \frac{3}{5} \times \frac{1060}{3} = 232$$

Η επιχείρηση μεγιστοποιεί το κέρδος της για P=232.