

Άσκηση 1

Να βρεθεί η κλιμακωτή μορφή του πίνακα A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Λύση:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2 \rightarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \rightarrow L_4 - 2L_1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 + L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_4 \rightarrow L_4 - \frac{1}{2}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} \\ \xrightarrow{L_4 \rightarrow L_4 - 2L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 2

Να βρεθεί η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του πίνακα A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}$$

Λύση:

A

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_4 \rightarrow -\frac{1}{10}L_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{L_1 \rightarrow L_1 - L_4 \\ L_2 \rightarrow L_2 - 4L_4 \\ L_3 \rightarrow L_3 - 5L_4}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow -\frac{1}{2}L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \xrightarrow{\substack{L_1 \rightarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \rightarrow L_2 - 2L_3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow \frac{1}{2}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 3

Να βρεθεί η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του πίνακα A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Λύση:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2 \rightarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - 3L_1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & -4 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - 3L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & -10 & -10 \end{bmatrix}$$

Συνεχίζουμε την διαδικασία για την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του πίνακα A

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & -10 & -10 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow -\frac{1}{5}L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - 2L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 4

Να βρεθεί η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του πίνακα A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & 0 & 2 \\ -2 & -6 & 4 & -6 & -10 \\ 3 & 9 & -6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$$

Λύση:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & 0 & 2 \\ -2 & -6 & 4 & -6 & -10 \\ 3 & 9 & -6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{L_2 \rightarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - 3L_1}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 9 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 + \frac{3}{2}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Συνεχίζουμε την διαδικασία για την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του πίνακα A

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow -\frac{1}{3}L_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{L_1 \rightarrow L_1 - 2L_3 \\ L_2 \rightarrow L_2 + 6L_3}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{L_2 \rightarrow -\frac{1}{2}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 + 3L_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 5

Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα A με τη μέθοδο του επαυξημένου πίνακα.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Λύση:

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\substack{L_2 \rightarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - 3L_1}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - 3L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -6 & -3 & 1 \end{array} \right]$$

Συνεχίζουμε με την αναγωγή σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -6 & -3 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 \rightarrow -\frac{1}{5}L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - 2L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{array} \right]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{7}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{6}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$