Άσκηση 1:

Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα A, αν $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Άσκηση 2:

Να βρεθεί η ορίζουσα του πίνακα A, αν $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & -3 & -2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

Άσκηση 3:

Να δείξετε ότι η ορίζουσα του πίνακα $B = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & 5 & -3 & -2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ είναι ίση με $-\det(A)$

Σημειώνεται ότι ο πίνακας B προκύπτει από τον A, αν εφαρμόσουμε στον πίνακα A την γραμμοπράξη $L_1 \leftrightarrow L_2$.

Λύση Άσκησης 1:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 1(2+3) - 1(-1+6) + 1(1+4) = 5 - 5 + 5 = 5$$

Έστω C ο πίνακας αλγεβρικών συμπληρωμάτων.

$c_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5,\quad c_{12} = -M_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-1+6) = -5,\quad c_{13} = M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 4 = 5,$

$c_{21} = -M_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-1-1) = 2,\quad c_{22} = M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3,\quad c_{23} = -M_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1,$

$c_{31} = M_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -3 + 2 = -1,\quad c_{32} = -M_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -(-3-1) = 4,\quad c_{33} = M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3,$

$$adj(A) = C^T = \begin{bmatrix} 5 & -5 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 4 & -3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -5 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A) = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -5 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2/5 & -1/5 \\ -1 & -3/5 & 4/5 \\ 1 & 1/5 & -3/5 \end{bmatrix}$$

Λύση Άσκησης 2:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & -3 & -2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2 \to L_2 + 2L_1 \\ L_3 \to L_3 - 2L_1 \\ L_4 \to L_4 + L_1}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & -3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

<u>Παράδειγμα εκτέλεσης των γραμμοπράξεων:</u>

Περίπτωση $L_2 \to L_2 + 2L_1$

$$\begin{array}{ccccc} L_2 & -2 & -3 & 2 & -5 \\ +2L_1 & 2 & 6 & -4 & 4 \\ - & - & - & - & - \\ = & 0 & 3 & -2 & -1 \end{array}$$

$$\det(A) = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & -6 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} -1 & -6 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= 3 * (17) + 2 * (-23) - 1 * (1) = 51 - 46 - 1 = 4$$

Λύση Άσκησης 3:

$$B = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & 5 & -3 & -2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{L_1 \to L_1 + 2L_2 \\ L_3 \to L_3 - 2L_2 \\ L_4 \to L_4 + L_2}} \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & -3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\det(B) = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & -6 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = (-1) \left(3 \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} -1 & -6 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \right)$$
$$= (-1)(51 - 46 - 1) = -4$$

Άρα $\det(B) = -\det(A)$