Άσκηση 1:

Αν Α και Β οι πίνακες:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \kappa\alpha\iota \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

Να βρείτε (όπου ορίζονται):

i. A^2,
ii. B^2,
iii. AB,
iv. BA,
v. A^T,
vi. B^T,
vii. A^{-1},
viii. B^{-1}.

i) Δεν ορίζεται

ii) $$B^2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9+10 & 6-2 \\ 15-5 & 10+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 4 \\ 10 & 11 \end{bmatrix}$$

iii) $$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-5 & 2+1 \\ 0+15 & 0-3 \\ 6+5 & 4-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 15 & -3 \\ 11 & 3 \end{bmatrix}$$

iv) Δεν ορίζεται

v) $$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

vi) $$B^T = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

vii) Δεν ορίζεται

viii) $$B^{-1} = -\frac{1}{13} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{13} & \frac{2}{13} \\ \frac{5}{13} & -\frac{3}{13} \end{bmatrix}$$

Άσκηση 2:

Αν $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ και $f(x) = x^2 - 2x + 3$, να υπολογιστεί η $f(A)$.

Λύση:

$$f(A) = A^2 - 2A + 3I = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 19 & 4 \\ 10 & 11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 10 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} = 16\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 3:

Αν $A = \begin{bmatrix} \lambda & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, να βρεθεί η τιμή του λ για την οποία ο πίνακας Α αποτελεί μια ρίζα του πολυωνύμου:

$f(x) = x^2 - 7x + 10.$

Λύση:

$$f(A) = A^2 - 7A + 10I = \begin{bmatrix} \lambda & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - 7\begin{bmatrix} \lambda & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + 10\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda^2 & 2\lambda + 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7\lambda & 14 \\ 0 & 14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^2 - 7\lambda + 10 & 2\lambda - 10 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Για να είναι ο πίνακας Α μια ρίζα του πολυωνύμου θα πρέπει όλα τα στοιχεία του τελευταίου πίνακα να είναι 0, άρα: $2\lambda - 10 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 5$.

Για $\lambda = 5$, $\quad \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$

Συνεπώς για λ = 5 ο πίνακας Α είναι μια ρίζα του πολυωνύμου.

Άσκηση 4:

Αν $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -13 & 27 \end{bmatrix}$, να βρεθεί ένας πίνακας Α τέτοιος ώστε $A^3 = B$.

<u>Λύση:</u>

Έστω $A = \begin{bmatrix} x & 0 \\ y & z \end{bmatrix}$

$$A^2 = \begin{bmatrix} x & 0 \\ y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 0 \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 & 0 \\ xy + yz & z^2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} x^2 & 0 \\ xy + yz & z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 0 \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^3 & 0 \\ x^2y + xyz + yz^2 & z^3 \end{bmatrix}$$

Για $A^3 = B$, ισχύει ότι:

$x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1, \qquad \forall\, x \in \Re$

$z^3 = 27 \Leftrightarrow z = 3, \quad \forall\, z \in \Re$

Για $x = 1$ $\kappa\alpha\iota$ $z = 3$, έχουμε: $y + 3y + 9y = -13 \Leftrightarrow 13y = -13 \Leftrightarrow y = -1$

Άρα ο πίνακας Α που ικανοποιεί την ισότητα $A^3 = B$ είναι: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

*** Η ίδια λύση θα προκύψει αν εξ αρχής θέσουμε:** $\boldsymbol{A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 3 \end{bmatrix}}$

Άσκηση 5:

Αν $B = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 18 \\ 0 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$, να βρεθεί ένας τριγωνικός πίνακας Α με θετικές διαγώνιες καταχωρίσεις τέτοιος

ώστε A^2 = B.

<u>Λύση:</u>

Έστω Α ο άνω τριγωνικός πίνακας με θετικές διαγώνιες καταχωρίσεις: $\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 0 & 2 & x_3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 0 & 2 & x_3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 0 & 2 & x_3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 + 2x_1 & x_2 + x_1x_3 + 3x_2 \\ 0 & 4 & 2x_3 + 3x_3 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3x_1 & x_1x_3 + 4x_2 \\ 0 & 4 & 5x_3 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Για A^2 = B, ισχύει ότι:

$$3x_1 = 9 \Leftrightarrow x_1 = 3$$

$$5x_3 = 10 \Leftrightarrow x_3 = 2$$

Για $x_1 = 3 \; και \; x_3 = 2$, έχουμε:

$$3 * 2 + 4x_2 = 18 \Leftrightarrow 4x_2 = 12 \Leftrightarrow x_2 = 3$$

Άρα $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$