Γενικά Μαθηματικά

Δημήτρης Φ. Παπαδόπουλος
dimfpap@upatras.gr

Τμήμα Διοικητικής Επιστήμης και Τεχνολογίας
Πανεπιστήμιο Πατρών

Ορίζουσα Πίνακα

Πρώτης Τάξης Ορίζουσα

Η ορίζουσα πρώτης τάξης ενός πίνακα $A = [a_{11}]$ συμβολίζεται με $det(A)$ ή $|a_{11}|$ και ισούται με τον αριθμό a_{11}.

Παράδειγμα:
Η ορίζουσα του πίνακα $A = [95]$ είναι $det(A) = |95| = 95$.

Δεύτερης Τάξης Ορίζουσα

Η ορίζουσα δεύτερης τάξης ενός πίνακα $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ ισούται με $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Παράδειγμα:

Η ορίζουσα του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ είναι $det(A) = 5 * 4 - 3 * 2 = 14$.

Επίλυση Γραμμικών Συστημάτων 2×2 με τη χρήση ορίζουσας

Έστω το σύστημα $\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{array}$

τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση για $D \neq 0$, δηλαδή για $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$. Η μοναδική λύση του συστήματος εκφράζεται με τη χρήση οριζουσών ως:

$x = \frac{N_x}{D}$ και $y = \frac{N_y}{D}$, όπου $N_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ και $N_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

Παράδειγμα:

Έστω το σύστημα $\begin{array}{l} 2x + 3y = 5 \\ 3x - 4y = 2 \end{array}$

τότε $D = -17 \neq 0$. Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση. Επίσης $x = \frac{N_x}{D} = \frac{26}{17}$ και $y = \frac{N_y}{D} = \frac{11}{17}$.

Τρίτης Τάξης Ορίζουσα

Η ορίζουσα τρίτης τάξης ενός πίνακα $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

ισούται με:

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Άρα $det(A) = \alpha_{11}(\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{23}\alpha_{32}) - \alpha_{12}(\alpha_{21}\alpha_{33} - \alpha_{23}\alpha_{31}) + \alpha_{13}(\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{22}\alpha_{31})$

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Παράδειγμα

Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Η ορίζουσα του πίνακα Α είναι:

$det(A) = 1(6-2) - 3(-3-4) + 2(-2-8) = 4 + 21 - 20 = 5.$

Κανόνας του Cramer

Το τετραγωνικό σύστημα $AX = B$, έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν $D \neq 0$, η οποία προκύπτει από τις σχέσεις:
$x_1 = \frac{N_1}{D}, x_2 = \frac{N_2}{D}, \ldots, x_n = \frac{N_n}{D}$, όπου $D = det(A)$ και
$N_i = det(A_i), i = 1(1)n$.

Παράδειγμα:

Έστω το σύστημα $\begin{array}{c} 2x - 3y + 2z = 7 \\ x + 2y - 4z = 3 \\ 3x - 4y - 6z = 5 \end{array}$ τότε $D = -58 \neq 0$. Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση η οποία δίνεται από τις σχέσεις:
$x = \frac{N_x}{D} = \frac{-234}{-58}$, $y = \frac{N_y}{D} = \frac{-46}{-58}$ και $z = \frac{N_z}{D} = \frac{-38}{-58}$, όπου

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & -4 & -6 \end{vmatrix}, \; N_x = \begin{vmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 5 & -4 & -6 \end{vmatrix}, \; N_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \\ 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}$$

και $N_z = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & 5 \end{vmatrix}$.

Άσκηση

Έστω το σύστημα $\begin{aligned} x+y+z&=5 \\ x-2y-3z&=-1 \\ 2x+y-z&=3 \end{aligned}$

Να βρεθεί (εφόσον υπάρχει) η λύση του συστήματος...

Ελάσσονες Ορίζουσες

Αν $A = [\alpha_{ij}]$ ο n τετραγωνικός πίνακας, τότε M_{ij} είναι η ορίζουσα του $n-1$ τετραγωνικού υποπίνακα του Α, που προκύπτει από την διαγραφή της i-οστής γραμμής και της j-οστής στήλης.
Η ορίζουσα M_{ij} καλείται ελάσσων ορίζουσα του στοιχείου α_{ij} του πίνακα Α, ενώ η έκφραση $(-1)^{i+j}M_{ij}$ ονομάζεται αλγεβρικό συμπλήρωμα (ή συμπαράγοντας) του στοιχείου α_{ij}.
Παράδειγμα:

Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ τότε η ελάσσων ορίζουσα M_{32} και το αλγεβρικό συμπλήρωμα του στοιχείου α_{32} είναι:

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3 \text{ και } (-1)^{3+2}M_{32} = (-1)3 = -3$$

Προσαρτημένος Πίνακας

Ο προσαρτημένος πίνακας ενός τετραγωνικού πίνακα A, είναι ο ανάστροφος του πίνακα των αλγεβρικών συμπληρωμάτων των στοιχειών του A, δηλαδή $adj(A) = [C]^T$, όπου C ο πίνακας αλγεβρικών συμπληρωμάτων.

Παράδειγμα:

Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ τότε τα αλγεβρικά συμπληρώματα των 9 στοιχείων του A είναι:

$c_{11} = 4, c_{12} = 7, c_{13} = -10$

$c_{21} = -5, c_{22} = -5, c_{23} = 10$

$c_{31} = -1, c_{32} = -3, c_{33} = 5$

Οπότε $adj(A) = \begin{bmatrix} 4 & 7 & -10 \\ -5 & -5 & 10 \\ -1 & -3 & 5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 4 & -5 & -1 \\ 7 & -5 & -3 \\ -10 & 10 & 5 \end{bmatrix}$

Αντίστροφος Τετραγωνικού Πίνακα

Αν $A = [\alpha_{ij}]$ ένας τετραγωνικός πίνακας, τότε ο αντίστροφος του είναι:
$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A)$.

Παράδειγμα:

Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ και έστω ο πίνακας αλγεβρικών συμπληρωμάτων των στοιχείων του

$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix}$, έτσι ώστε $adj(A) = C^T$

Αντίστροφος Τετραγωνικού Πίνακα (2)

$$det(A) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} = 1(2*3-1*2) - 3(-1*3-1*4) + 2(-1*2-2*4) = 4+21-20 = 5$$

$$c_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4 \quad c_{12} = -M_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 7 \quad c_{13} = M_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -10$$

$$c_{21} = -M_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -5 \quad c_{22} = M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5 \quad c_{23} = -M_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 10$$

$$c_{31} = M_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad c_{32} = -M_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \quad c_{33} = M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

$$adj(A) = C^T = \begin{bmatrix} 4 & 7 & -10 \\ -5 & -5 & 10 \\ -1 & -3 & 5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 4 & -5 & -1 \\ 7 & -5 & -3 \\ -10 & 10 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A) = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & -5 & -1 \\ 7 & -5 & -3 \\ -10 & 10 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 & -1 & -1/5 \\ 7/5 & -1 & -3/5 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Ορίζουσα $n \times n$ Πίνακα

Η ορίζουσα ενός $n \times n$ πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$ ισούται με:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} M_{ij}$$

όπου:
M_{ij} είναι η ελάσσων ορίζουσα του $(n-1) \times (n-1)$ πίνακα ο οποίος προκύπτει από τη διαγραφή της i γραμμής και της j στήλης του αρχικού πίνακα Α.
Σημείωση: Όταν για έναν πίνακα Α ισχύει $\det(A) = 0$, τότε αυτός ονομάζεται ιδιάζων.

Υπολογισμός Ορίζουσας n Τάξης (εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού)

Για τον υπολογισμό μιας ορίζουσας n τάξης χρησιμοποιούμε έναν αλγόριθμο, σύμφωνα με τον οποίο μειώνουμε την τάξη της κατα 1. Ο αλγόριθμος αυτός έχεις τα εξής βήματα:
α) Επιλογή ενός στοιχείου $a_{ij} = 1$ ή ελλέιψη αυτού $a_{ij} \neq 0$.
β) Χρήση του στοιχείου a_{ij} που επιλέχθηκε, ως οδηγό στοιχείο, και εφαρμογή στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών (ή στηλών) έτσι ώστε να μηδενίσουμε τα υπόλοιπα στοιχεία της στήλης (ή της γραμμής) που βρίσκεται το στοιχείο οδηγός.
γ) Ανάπτυξη της ορίζουσας ως προς την στήλη (ή την γραμμή), που περιέχει το στοιχείο a_{ij}.

Γραμμοπράξεις - Στοιχειώδεις Μετασχηματισμοί

Επιτρεπτές γραμμοπράξεις:

- Αμοιβαία ανταλλαγή δύο γραμμών L_i, L_j $(L_i \leftrightarrow L_j)$.
- Αντικατάσταση μιας γραμμής L_i με ένα μη-μηδενικό πολλαπλάσιο του εαυτού της kL_i $(L_i \to kL_i)$.
- Αντικατάσταση μιας γραμμής L_i με το άθροισμα ενός πολλαπλάσιου μιας άλλης γραμμής kL_j και της ίδιας $(L_i \to L_i + kL_j)$.

Ιδιότητες Ορίζουσας - Στοιχειώδεις Μετασχηματισμοί

Για δύο τετραγωνικούς πίνακες A και B, αν χρησιμοποιώντας κάποιον στοιχειώδη μετασχηματισμό οδηγούμαστε από τον A στον B, ισχύει ότι:

- Αν πραγματοποιηθεί αμοιβαία ανταλλαγή μεταξύ δύο διαδοχικών γραμμών (ή στηλών) του A, τότε $|B| = -|A|$.
- Αν αντικατασταθεί μια γραμμή (ή στήλη) L_i του A με ένα μη-μηδενικό πολλαπλάσιο του εαυτού της kL_i, τότε $|B| = k|A|$.
- Αν αντικατασταθεί μια γραμμή (ή στήλη) L_i του A με το άθροισμα ενός πολλαπλάσιου μιας άλλης γραμμής (ή στήλης) kL_j και της ίδιας ($L_i \to L_i + kL_j$), τότε $|B| = |A|$.

Παράδειγμα Υπολογισμού Ορίζουσας 4ης Τάξης

Έστω ότι θέλουμε να υπολογιστεί η ορίζουσα του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Αρχικά επιλέγουμε ένα στοιχείο το οποίο να ισούται με τη μονάδα, έστω το $a_{11} = 1$. Έπειτα πραγματοποιούμε τους απαραίτητους μετασχηματισμούς έτσι ώστε τα υπόλοιπα στοιχεία της στήλης όπου βρίσκεται το $a_{11} = 1$ να μηδενιστούν.

$$L_2 \to L_2 - L_1 \tag{1}$$

$$L_3 \to L_3 - 3L_1 \tag{2}$$

$$L_4 \to L_4 - 4L_1 \tag{3}$$

Παράδειγμα Υπολογισμού Ορίζουσας 4ης Τάξης - συνέχεια

Άρα: $det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & -7 & -5 & -11 \\ 0 & -11 & -8 & -10 \end{vmatrix} =$

$(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & -4 & -3 \\ -7 & -5 & -11 \\ -11 & -8 & -10 \end{vmatrix} =$

$-2(50 - 88) + 4(70 - 121) - 3(56 - 55) = -131.$